文章编号：1000-8152(2004)01-0094-03

基于 Delta 算子的统一代数 Lyapunov 方程解的上下界

张端金[1,2]，杨 苹[2]，吴 捷[2]
（1. 郑州大学 信息工程学院，河南 郑州 450052；2. 华南理工大学 电力学院，广东 广州 510640）

摘要：基于 Delta 算子描述，统一研究了连续代数 Lyapunov 方程(CALE)和离散代数 Lyapunov 方程(DALE)的定界估计问题.采用矩阵不等式方法，给出了统一的代数 Lyapunov 方程(UALE)解矩阵的上下界估计，在极限情形下可分别得到 CALE 和 DALE 的估计结果.计算实例表明了本文方法的有效性.

关键词：Lyapunov 方程；Delta 算子；矩阵的界
中图分类号：TP13　　**文献标识码**：A

Matrix bounds for the solution of the unified algebraic Lyapunov equation using Delta operator

ZHANG Duan-jin[1,2], YANG Ping[2], WU Jie[2]
(1. College of Information Engineering, Zhengzhou University, Henan Zhengzhou 450052, China;
2. Electric Power College, South China University of Technology, Guangdong Guangzhou 510640, China)

Abstract: The estimation problem of matrix bounds for the continuous algebraic Lyapunov equation (CALE) and the discrete algebraic Lyapunov equation (DALE) could be considered by unified approach using delta operator. The upper and lower matrix bounds for the solution of the unified algebraic Lyapunov equation (UALE) are presented in terms of matrix inequality approach, and the obtained bounds reduce to existing ones for the continuous and discrete Lyapunov equations in the limiting cases. The proposed results are illustrated through an example.

Key words: Lyapunov equation; Delta operator; matrix bound

1 引言(Introduction)

Lyapunov 方程在控制理论和状态估计问题的研究中具有重要作用，如稳定性分析、鲁棒控制等问题通常需要求解这类方程.然而当矩阵维数增大时，方程求解将变得相当困难；另一方面，有时可能只需要方程的近似解或精确解的初值估计.为此对 Lyapunov 方程解的特征值、迹和解矩阵的上下界进行估计，具有重要的实用价值，已取得很多成果[1].

Delta 算子方法(定义为[2] $\delta=(q-1)/T$，q 为移位算子，T 为采样周期)作为一种新的离散化方法，不仅避免了传统的 q 移位算子方法在高速采样时引起的病态条件问题，而且可将连续系统和离散系统的许多结果纳入 Delta 算子的统一框架，在高速信号处理与数字采样控制领域具有重要的应用前景[3].目前关于 Delta 算子 Lyapunov 方程的研究已取得一些进展.文献[4]给出了基于 Delta 算子的统一 Lyapunov 方程解的特征值的定界估计.文献[5]给出 Delta 算子 Lyapunov 方程解的几何平均和算术平均值的上下界.文献[6]研究连续模型、Z 域离散模型和 Delta 域统一模型描述的 Lyapunov 方程解的特征值的估计问题.文献[7]给出 Delta 算子 Lyapunov 方程解的条件数的估计.此外，文献[8,9]还给出了基于 Delta 算子的统一代数 Riccati 方程解的定界估计结果.

本文研究 Delta 算子描述的 Lyapunov 方程解的估计问题，给出了统一代数 Lyapunov 方程解矩阵的上下界估计公式.下文中 $\lambda_i(X)$ 表示矩阵 $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的第 i 个特征值，设定按递减次序排列，即 $\lambda_1(X)\geqslant\lambda_2(X)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(X)$.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑 Delta 算子描述的统一 Lyapunov 方程(UALE)

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+TA^{\mathrm{T}}PA+Q=0. \tag{1}$$

其中：$A,P,Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$P,Q>0$，且 A 的特征值位

收稿日期：2002-11-11；收修改稿日期：2003-04-28.
基金项目：河南省自然科学基金项目(0311011600)；河南省高校青年骨干教师资助计划项目([2003]100).

于 $|\lambda_i(A)+1/T|=1/T$ 的稳定区域内.

注 1　根据统一描述的 Lyapunov 方程，可以分别得到连续时间代数 Lyapunov 方程(CALE)和离散时间代数 Lyapunov 方程(DALE).

a) 在式(1)中，令 $T=0$，可得 CALE:

$$A^{\mathrm T}P+PA+Q=0. \tag{2}$$

b) 在式(1)中，令 $T=1$ 和 $TA+I=A$，可得 DALE:

$$A^{\mathrm T}PA-P+Q=0. \tag{3}$$

本文目的是在无须求解 Lyapunov 方程的前提下，给出 UALE(1)解矩阵的定界估计.

引理 1[10]　对 $X,Y\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$X=X^{\mathrm T}$，$Y=Y^{\mathrm T}$，则有

$$\begin{cases}\lambda_{i+j-1}(X+Y)\leqslant\lambda_j(X)+\lambda_i(Y),\\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n,\ i+j\leqslant n+1,\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases}\lambda_{i+j-n}(X+Y)\geqslant\lambda_j(X)+\lambda_i(Y),\\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n,\ i+j\geqslant n+1.\end{cases} \tag{5}$$

3 主要结果(Main results)

定理 1　若 $\lambda_1[(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)]<1$，则对于 UALE(1)，正定解矩阵 P 的上界为

$$P\leqslant\frac{\lambda_1(Q)}{-\lambda_1(A+A^{\mathrm T}+TAA^{\mathrm T})}(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)+TQ. \tag{6}$$

证　式(1)的等价形式为

$$P=(TA+I)^{\mathrm T}P(TA+I)+TQ. \tag{7}$$

因为 $P\leqslant\lambda_1(P)I$，进一步有

$$P\leqslant\lambda_1(P)(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)+TQ. \tag{8}$$

根据引理 1 得到

$$\lambda_1(P)\leqslant\lambda_1[\lambda_1(P)(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)+TQ]\leqslant$$
$$\lambda_1(P)\lambda_1[(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)]+T\lambda_1(Q). \tag{9}$$

解上述不等式，并考虑假设条件和 $\lambda_i((TA+I)(TA+I)^{\mathrm T})=1+T\lambda_i(A+A^{\mathrm T}+TAA^{\mathrm T})$，可得

$$\lambda_1(P)\leqslant\frac{\lambda_1(Q)}{-\lambda_1(A+A^{\mathrm T}+TAA^{\mathrm T})}. \tag{10}$$

于是将式(10)代入式(8)即得到式(6).　　证毕.

定理 2　若 $\lambda_1[(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)]<1$，则对于 UALE(1)，正定解矩阵 P 的下界为

$$P\geqslant\frac{\lambda_n(Q)}{-\lambda_n(A+A^{\mathrm T}+TAA^{\mathrm T})}(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)+TQ. \tag{11}$$

证　因为 $P\geqslant\lambda_n(P)I$，由式(7)可得

$$P\geqslant\lambda_n(P)(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)+TQ. \tag{12}$$

由 $\lambda_1[(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)]<1$ 可推出 $\lambda_n[(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)]<1$，以下类似于定理 1 的证明过程，得到

$$\lambda_n(P)\geqslant\frac{\lambda_n(Q)}{-\lambda_n(A+A^{\mathrm T}+TAA^{\mathrm T})}. \tag{13}$$

将上式代入式(12)即得式(11).　　证毕.

由式(6)和式(11)，还可给出 UALE(1)的解矩阵的更精确估计如下：

定理 3　如果正定矩阵 P 满足 UALE(1)，且 $\lambda_1[(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)]<1$，则有

$$\varphi_k(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)+TQ\geqslant P\geqslant$$
$$\rho_k(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)+TQ,\ k=0,1,2,\cdots. \tag{14}$$

其中常数 $\varphi_k>0$ 和 $\rho_k>0$ 可分别定义为

$$\rho_k=\lambda_n[\rho_{k-1}(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)+TQ],\ k=1,2,\cdots, \tag{15a}$$

$$\rho_0=\frac{\lambda_n(Q)}{-\lambda_n(A+A^{\mathrm T}+TAA^{\mathrm T})}, \tag{15b}$$

$$\varphi_k=\lambda_1[\varphi_{k-1}(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)+TQ],\ k=1,2,\cdots, \tag{16a}$$

$$\varphi_0=\frac{\lambda_1(Q)}{-\lambda_1(A+A^{\mathrm T}+TAA^{\mathrm T})}, \tag{16b}$$

且有

$$\varphi_k\leqslant\varphi_{k-1}\leqslant\cdots\leqslant\varphi_0,\ \rho_k\geqslant\rho_{k-1}\geqslant\cdots\geqslant\rho_0.$$

证　由式(12)和式(13)得到

$$P\geqslant\lambda_n(P)(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)+TQ, \tag{17}$$

$$P\geqslant\rho_0(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)+TQ. \tag{18}$$

根据式(15)和式(18)，有

$$\lambda_n(P)\geqslant\lambda_n[\rho_0(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)+TQ]=\rho_1. \tag{19}$$

将式(19)代入式(17)得

$$P\geqslant\rho_1(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)+TQ. \tag{20}$$

在式(19)中应用引理 1，得到

$$\rho_1=\lambda_n[\rho_0(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)+TQ]\geqslant$$
$$\rho_0\lambda_n[(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)]+\lambda_n(TQ)=\rho_0. \tag{21}$$

假定

$$\rho_{k-1}=\lambda_n[\rho_{k-2}(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)+TQ]\geqslant\rho_{k-2}, \tag{22}$$

则有

$$\rho_k=\lambda_n[\rho_{k-1}(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)+TQ]\geqslant$$
$$\lambda_n[\rho_{k-2}(TA+I)^{\mathrm T}(TA+I)+TQ]=\rho_{k-1}. \tag{23}$$

因此利用归纳法，本文证明了 $\rho_k\geqslant\rho_{k-1}\geqslant\cdots\geqslant\rho_0$

成立.类似可证 $\varphi_k \leqslant \varphi_{k-1} \leqslant \cdots \leqslant \varphi_0$. 证毕.

4 算例(Example)

考虑统一代数 Lyapunov 方程 UALE(1)解的估计问题,其中的参数取为

$$T = 0.1,\ A = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

由 UALE(1)求得方程的正定解为

$$P = \begin{bmatrix} 0.1041667 & 0 \\ 0 & 0.1010101 \end{bmatrix}.$$

由式(6)和式(11)得到解的上下界估计为

$$\begin{bmatrix} 0.10404 & 0 \\ 0 & 0.10101 \end{bmatrix} \leqslant P \leqslant \begin{bmatrix} 0.1041667 & 0 \\ 0 & 0.1010417 \end{bmatrix}.$$

可见本文方法与理论分析一致,并具有较小的保守性.

5 结论(Conclusion)

本文给出了基于 Delta 算子的统一代数 Lyapunov 方程解的上下界估计结果,在极限情形下可分别得到连续和离散 Lyapunov 方程的相关结论.

参考文献(References):

[1] KWON W H, MOON Y S, AHN S C. Bounds in algebraic Riccati and Lyapunov equations: a survey and some new results [J]. *Int J Control*, 1996, 64(3): 377 - 389.

[2] MIDDLETON R H, GOODWIN G C. Improves finite word length characteristics in digital control using Delta operator [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1986, 31(11): 1015 - 1021.

[3] 张端金, 王忠勇, 吴捷. 系统控制和信号处理中的 Delta 算子方法[J]. 控制与决策, 2003, 18(4): 385 - 391.
(ZHANG Duanjin, WANG Zhongyong, WU Jie. Survey on system control and signal processing using the Delta operator [J]. *Control and Decision*, 2003, 18(4):385 - 391.)

[4] MRABTI M, HMAMED A. Bounds for the solution of the Lyapunov matrix equation: a unified approach [J]. *Systems & Control Letters*, 1992, 18(1): 73 - 81.

[5] 邵锡军,杨成梧. Delta 域 Lyapunov 矩阵方程解的研究[J]. 南京理工大学学报, 1999, 23(3):193 - 196.
(SHAO Xijun, YANG Chengwu. Bounds of the solution in Delta domain Lyapunov matrices equation[J]. *J of Nanjing University of Science and Technology*, 1999, 23(3): 193 - 196.)

[6] MORI T, KOKANE H. On solution bounds for three types of Lyapunov matrix equations: continuous, discrete and unified equations [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(10): 1767 - 1770.

[7] SUCHOMSKI P. Numerically robust Delta-domain solutions to discrete-time Lyapunov equations [J]. *Systems & Control Letters*, 2002, 47(4): 319 - 326.

[8] ZHANG Duanjin, YANG Chengwu, WU Jie. Delta domain Riccati equation: A unified approach [J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(3): 430 - 432.

[9] 张端金,刘侠,吴捷. Delta 算子 Riccati 方程研究的新结果[J]. 应用数学, 2003, 16(3):104 - 107.
(ZHANG Duanjin, LIU Xia, WU Jie. New results on Delta operator Riccati equation [J]. *Mathematica Applicata*, 2003, 16(3):104 - 107.)

[10] 王松桂,贾忠贞. 矩阵论中不等式[M]. 合肥: 安徽教育出版社,1994.
(WANG Songgui, JIA Zhongzhen. *Inequalities in Matrix Theory* [M]. Hefei: Anhui Education Press,1994.)

作者简介:

张端金 (1966 —),男,教授.1998 年于南京理工大学获博士学位,2001 年在华南理工大学完成博士后研究工作.主要从事高速信号处理与鲁棒控制研究.E-mail: scutdjzhang@163.com;

杨 苹 (1967 —),女,副教授.1998 年于华南理工大学获博士学位.主要从事电力系统自动化与故障诊断研究.E-mail: eppyang@scut.edu.cn;

吴 捷 (1937 —),男,教授,博士生导师.主要从事电力电子与电力传动系统的建模与控制.E-mail: epjwu@scut.edu.cn.