

一种利用系统状态方程构造小波的方法

王宇¹, 时伟², 龙兴武¹

(1. 国防科技大学理学院, 湖南长沙 410073; 2. 国防科技大学机械电子与自动化学院, 湖南长沙 410073)

摘要: 当使用小波解决问题时, 得到的结果与所选用的小波有较大的关系. 如何针对特定的问题来构造适用的小波还没有有效的方法. 阐述了一种利用消失矩条件和线性时不变系统的状态方程来构造小波的方法. 为此首先简要的介绍了 Diophantine 方程和消失矩条件, 然后利用系统的模式函数可以从解状态方程的特征根得到的特性, 通过添加令小波与模式函数正交的条件, 得到了构造小波的方法. 并进一步对用所推导的方法构造双正交关于 0 对称的实小波这一具体情况进行了讨论. 最后给出了应用此方法构造小波的一个实际的例子.

关键词: 小波; 模式; 消失矩条件

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Wavelet construction using state equation

WANG Yu¹, SHI Wei², LONG Xing-wu¹

(1. School of Science, National University of Defense Technology, Hunan Changsha 410073, China;

2. School of Mechanism and Electric, National University of Defense Technology, Hunan Changsha 410073, China)

Abstract: The selection of wavelet plays an important role in the result when one uses wavelets to resolve problems. Unfortunately there is no effective way to construct proper wavelet for special problems. Motivated by the filter reconstruction and vanish-moment conditions, a general construction approach based on the state equation was proposed for linear time-invariant systems. First, the Diophantine equations and vanish-moment conditions were briefly introduced. Second, based on the exponential mode functions derived by the characteristic roots of the system, an orthonormal condition between mode and wavelet functions and algebraic equations were presented to construct the wavelet functions. Third, a bi-orthogonal real wavelet symmetry about 0 with odd length was constructed by using the proposed approach. Finally, an example was given to illustrate the construction approach.

Key words: wavelet; mode; vanish-moment

1 引言 (Introduction)

第一代小波由于其具有平移不变性, 在工程实践中有着广泛的应用. 而利用小波进行数据处理, 其效果会随所取小波的不同有所不同, 因此构造适用于特定问题的小波有着很强的应用背景. 构造第一代小波的方法之一是 Daubechies 等人提出的从完全重构滤波器的角度出发, 利用消失矩条件来构造^[1,2]. 本文针对线性定常系统的情况对这种方法进行了改进. 即: 由系统的状态方程求出系统的各个模式, 然后令小波函数与系统模式正交, 作为消失矩条件的附加条件, 从而获得了一种利用系统状态方程构造适用小波的方法.

2 Daubechies 方法简介 (Introduction of Daubechies methods)

Cohen 等人利用 Daubechies 的思想构造小波的方法是构造双正交小波常用的办法, 其基本过程是求解添加了消失矩条件的 Diophantine 方程. 设小波函数、尺度函数及其对偶函数所对应的双尺度方程为

$$\begin{cases} \varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t-k), & \tilde{\varphi}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_k \varphi(2t-k), \\ \Psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2t-k), & \tilde{\Psi}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_k \varphi(2t-k), \end{cases} \quad (1)$$

则 Diophantine 方程为

$$\begin{cases} \sum_n (\tilde{h}_{k-2n} \tilde{h}_{l-2n} + \tilde{g}_{k-2n} \tilde{g}_{l-2n}) = \delta_{k,l}, \\ \sum_k h_k = 1, \quad \sum_k g_k = 0, \\ g_n = (-1)^n \tilde{h}_{1-n}, \quad \tilde{g}_n = (-1)^n h_{1-n}. \end{cases} \quad (2)$$

消失矩条件为

$$\begin{cases} \int_R x^k \Psi(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ \int_R x^k \tilde{\Psi}(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tilde{N}-1. \end{cases} \quad (3)$$

为便于求解, 可将消失矩条件转换为以下的等价形式:

$$\sum_n (-1)^n n^k h_n = 0, \quad \sum_n (-1)^n n^k \tilde{h}_n = 0. \quad (4)$$

将以上的方程组(2)和(4)联立, 可解得 4 组所需的系数 $h_n, \tilde{h}_n, g_n, \tilde{g}_n$.

3 利用系统状态方程构造小波 (Construct wavelet using state equation)

记线性定常系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ z = Cx + Dv. \end{cases} \quad (5)$$

设状态转移矩阵 A 有 N 个特征值, 记为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, 不妨假定这些特征值都不相同, 则系统有 N 个模式 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_N t}$.

本文构造小波的方法是除了消失矩条件外, 还令小波函数与这 N 个模式函数正交, 用数学形式来表示即为

$$\begin{cases} \int_R e^{\lambda_k t} \Psi(t) dt = 0, & k = 1, 2, \dots, N, \\ \int_R e^{\lambda_k t} \tilde{\Psi}(t) dt = 0, & k = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (6)$$

将此方程组与方程组 (2)、(4) 联立求解便可获得所需小波.

方程 (6) 是积分形式的表示, 不便于直接计算, 下面推导方程 (6) 的一个简化形式. 记 $H(\omega) = \sum_n h_n e^{-jn\omega}$, $\hat{\Psi}(\omega)$, $\hat{\varphi}(\omega)$ 分别为小波函数和尺度函数 $\Psi(t)$, $\varphi(t)$ 的傅立叶变换. 依 Mallat 定理, 有

$$\hat{\Psi}(\omega) = -e^{-\frac{j\omega}{2}} \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (7)$$

因为 $\int_R e^{\lambda_k t} \Psi(t) dt = \hat{\Psi}(\omega) |_{\omega=\lambda_k j}$, 所以方程

$$\begin{cases} \int_R e^{\lambda_k t} \Psi(t) dt = 0 \\ -e^{-\frac{j\omega}{2}} \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) |_{\omega=\lambda_k j} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

这个方程比较复杂, 在这里只取这个方程的一个特殊解 $\overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} |_{\omega=\lambda_k j} = 0$, 后面的计算表明这样做是可取的. 将 λ_k 的一般形式 $\lambda_k = a_k + b_k j$ 带入 H 的表达式

$$\begin{aligned} H(\omega/2 + \pi) &= \sum_n h_n \exp(-jn\omega/2 - jn\pi) = \\ &= \sum_n (-1)^n h_n \exp(-jn\omega/2), \end{aligned} \quad (9)$$

则小波函数的正交方程组简化为

$$\begin{cases} \sum_n (-1)^n h_n \exp(na_k/2) \exp(nb_k j/2) = 0, \\ k = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (10)$$

同理也可以得到对偶小波函数的正交方程组的简化形式.

将简化的正交方程组与 Diophantine 方程及消失矩条件联立, 便得到所需的方程组

$$\begin{cases} \sum_n (\bar{h}_{k-2n} \bar{h}_{l-2n} + \bar{g}_{k-2n} \bar{g}_{l-2n}) = \delta_{k,l}, \\ \sum_k h_k = 1, \quad \sum_k g_k = 0, \\ \sum_n (-1)^n h_n \exp(na_k/2) \exp(nb_k j/2) = 0, \\ \hspace{15em} k = 1, 2, \dots, \\ \sum_n (-1)^n \bar{h}_n \exp(na_k/2) \exp(nb_k j/2) = 0, \\ \hspace{15em} k = 1, 2, \dots, \\ g_n = (-1)^n \bar{h}_{1-n}, \quad \bar{g}_n = (-1)^n h_{1-n}, \\ \sum_n (-1)^n n^m h_n = 0, \quad \sum_n (-1)^n n^m \bar{h}_n = 0. \end{cases} \quad (11)$$

关于这组方程有以下一些注意事项.

首先当滤波器的非零系数个数小于约束条件的个数时, 方程不一定有解, 因此构造时要求两组分解与重构系数足够长或者是舍弃一些条件; 其次, 即使滤波器的非零系数个数满足要求, 方程也不一定有解; 第三, 上述方程是在系统没有重复本征值的条件下得到的, 当有重复本征值 λ_k 时, 方程可由令 $\lambda_k, \lambda_k e^{\lambda_k}, \dots$ 与小波正交来得到.

下面, 作者就常用的奇数长关于 0 对称的双正交小波的情形求这组方程的解.

4 奇数长关于 0 对称双正交实小波的构造 (Construct biorthogonal real wavelet symmetry about 0 with odd length)

当奇数长实小波及其对偶函数关于 0 对称时, 取 h_n, \bar{h}_n 为实数, 通过变量替换及合并有关项, 并将实部和虚部的系数分开, 完全滤波器方程约减为

$$\begin{cases} \sum_n \bar{h}_{n+2l} h_n = \frac{1}{2} \delta_{0,l}, \quad l = 0, 1, \dots, \\ h_0 + 2 \sum_{k>0} h_k = 1, \quad \sum_k g_k = 0, \\ g_n = (-1)^n \bar{h}_{1-n}, \quad \bar{g}_n = (-1)^n h_{1-n}, \\ \sum_n (-1)^n n^m h_n = 0, \quad \sum_n (-1)^n n^m \bar{h}_n = 0, \\ \sum_n (-1)^n h_n \exp(na_k/2) \cos(nb_k/2) = 0, \\ \sum_n (-1)^n h_n \exp(na_k/2) \sin(nb_k/2) = 0, \\ \sum_n (-1)^n \bar{h}_n \exp(na_k/2) \cos(nb_k/2) = 0, \\ \sum_n (-1)^n \bar{h}_n \exp(na_k/2) \sin(nb_k/2) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

与单纯用消失矩方法构造奇数长 0 对称小波一样, 首先并不能保证此方程组在任何情况下都有解;

其次在方程组有解的情况下还要确定这组解是否真的给出了一个小波. Daubechies 的以下两个关于双正交小波的定理可以帮助解决这个问题:

定理 1 设低通及对偶滤波器满足

$$\begin{aligned} H(\omega) &= (1 + e^{-i\omega}) \Gamma(\bar{\omega}) / 2^\delta, \\ \Gamma(\bar{\omega}) &= (1 + O(|\omega|^\delta)), \\ \tilde{H}(\bar{\omega}) &= (1 + e^{-i\bar{\omega}}) \tilde{\Gamma}(\bar{\omega}) / 2^\delta, \\ \tilde{\Gamma}(\bar{\omega}) &= (1 + O(|\bar{\omega}|^\delta)). \end{aligned}$$

如果 $\Gamma(\omega)$ 与 $\tilde{\Gamma}(\bar{\omega})$ 对于某个 $k \in N$ 分别使得

$$\begin{aligned} \sup [|\Gamma(\bar{\omega}) \Gamma(\frac{\omega}{2}) \cdots \Gamma(\frac{\omega}{2^{k-1}})|]^{\frac{1}{k}} &\leq 2^{\delta-\alpha}, \\ \sup [|\tilde{\Gamma}(\bar{\omega}) \tilde{\Gamma}(\frac{\bar{\omega}}{2}) \cdots \tilde{\Gamma}(\frac{\bar{\omega}}{2^{k-1}})|]^{\frac{1}{k}} &\leq 2^{\delta-\alpha} \end{aligned}$$

成立, 则当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 与 1 时, 双尺度方程 $\varphi(t) = \sum_k h_k \varphi(2t - k)$ 与 $\tilde{\varphi}(t) = \sum_k \tilde{h}_k \tilde{\varphi}(2t - k)$ 的阶梯性算法分别在 $L^2(R)$ 与 $C(R)$ 意义下逐点收敛.

$$\begin{cases} h_0 \tilde{h}_0 + 2h_1 \tilde{h}_1 = 0.5, & h_3 \tilde{h}_1 + h_2 \tilde{h}_0 + h_1 \tilde{h}_1 = 0, & h_5 \tilde{h}_1 + h_4 \tilde{h}_0 + h_3 \tilde{h}_1 = 0, & h_6 \tilde{h}_0 + h_5 \tilde{h}_1 = 0, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1.1803 & 1.2185 & -0.1832 & -1.2843 & 3.0258 & -4.6577 \\ 0 & 0.2422 & -0.8770 & 1.6405 & -2.1372 & 1.9174 & -0.6010 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ (1 \quad -1 \quad 1)(\tilde{h}_1 \quad \tilde{h}_0 \quad \tilde{h}_1)' = 0. \end{cases} \quad (14)$$

解之可得 h_n, \tilde{h}_n . 保留 4 位有效数字, 所得系数如下:

$$\begin{aligned} h_0 &= 0.6803, & h_{-1} &= h_1 = 0.3197, & h_{-2} &= h_2 = -0.1183, & h_{-3} &= h_3 = -0.0832, \\ h_{-4} &= h_4 = 0.0349, & h_{-5} &= h_5 = 0.0135, & h_{-6} &= h_6 = -0.0067, & \tilde{h}_0 &= 0.5, & \tilde{h}_{-1} &= \tilde{h}_1 = 0.25. \end{aligned}$$

经验证满足定理 1 的条件, 其尺度函数和小波函数如图 1 所示.

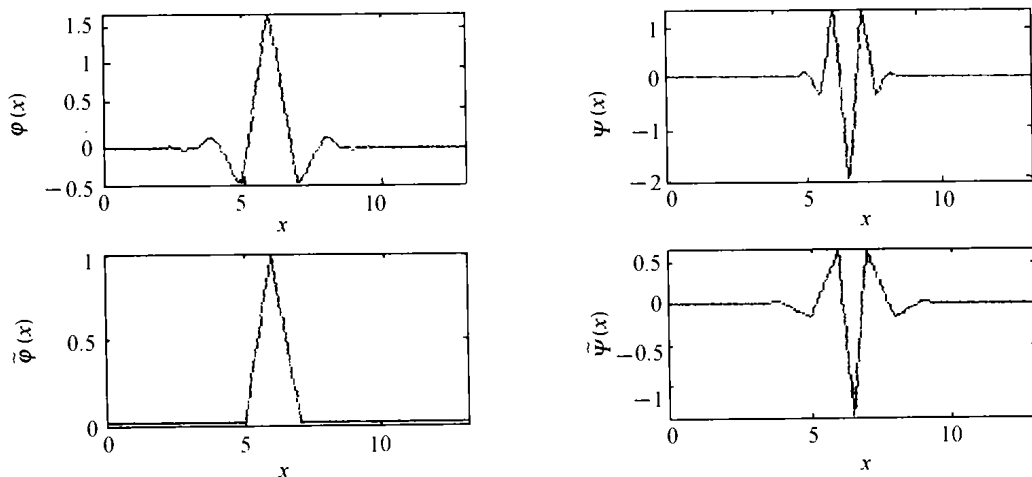


图 1 尺度函数和小波函数

Fig. 1 Scaling and wavelet function

定理 2 滤波器函数 $H(\bar{\omega})$ 与 $\tilde{H}(\bar{\omega})$ 均为奇数长且小波函数支撑集关于 0 对称, 则它们的长度之差必为 2 的奇数倍数.

5 构造实例 (Example)

某些传感器的输入输出关系可以用一个二阶方程来表示, 例如取方程

$$\ddot{x} + \dot{x} + 1.25x = \mu,$$

则其状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1.25 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}, \\ \dot{z} = (1 \quad 0)x + v. \end{cases} \quad (13)$$

状态转移矩阵的特征值为 $\lambda = -0.5 \pm 1j$.

取所求小波为关于 0 对称的 13-3 小波, 取一阶消失矩, 将 $a = -0.5, b = \pm 1$ 代入方程组 (12). 因 13-3 小波只有 11 个待定的系数, 方程 (12) 的所有方程无法同时满足, 故此只保留小波函数的正交方程, 舍弃对偶小波的正交方程, 得到方程组 (14):

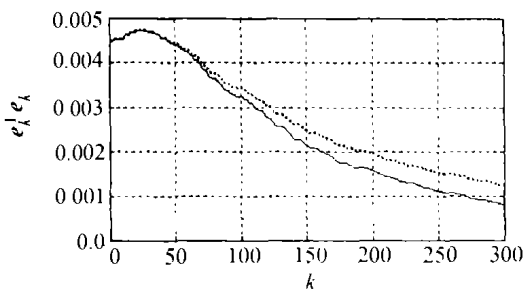


图3 在最坏情形干扰作用下的 $e_k^T e_k$

Fig. 3 $e_k^T e_k$ in present of worse case disturbance

5 结论(Conclusion)

本文对混合 H_2/H_∞ 参数辨识问题进行了研究. 所得的辨识算法不仅能满足规定的鲁棒性能, 且为 LS 参数估计误差判据提供了一个最优上界. 该算法容许在参数辨识时可以在精度与鲁棒性之间进行权衡. 结果表明: 提高辨识的鲁棒性, 需要牺牲辨识的精度作为代价. 这一方法不仅丰富了目前鲁棒辨识的内容, 还揭示了辨识精度与鲁棒性之间的矛盾关系.

参考文献(References):

- [1] 方崇智, 萧德云. 过程辨识[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988. (FANG Chongzhi, XIAO Deyun. *Process Identification* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1988.)
- [2] GRIMBLE M J, HASHIM R, SHAKED U. Identification algorithms based on H_∞ state-space filtering techniques [C] // *Proc of IEEE Conf on Decision and Control*. New York: IEEE Press, 1992; 2287 - 2292.
- [3] HASSIBI B, SAYED A H, KAILATH T. H_∞ optimality of the

- LMS algorithm [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1996, 44 (2): 267 - 280.
- [4] THEODOR Y, SHAKED U, BERMAN N. Time-domain H_∞ identification [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(7): 1019 - 1023.
- [5] DIDINSKY G, PAN Z, BASAR T. Parameter identification for uncertain plants using H_∞ methods [J]. *Automatica*, 1995, 31(9): 1227 - 1250.
- [6] SHAKED U, THEODOR Y. H_∞ -optimal estimation: A tutorial [C] // *Proc of IEEE Conf on Decision and Control*. New York: IEEE Press, 1992; 2278 - 2286.
- [7] SHAKED U, BERMAN N. H_∞ nonlinear filtering of discrete-time processes [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1995, 43(9): 2205 - 2209.
- [8] HADDAD W M, BERNSTEIN D S, MUSTAFA D. Mixed-norm H_2/H_∞ regulation and estimation: the discrete-time case [C] // *Proc of American Control Conference*. New York: IEEE Press, 1991: 1159 - 1164.
- [9] de SOUZA C E, XIE L. Robust H_∞ filtering [M] // LEONDES C T. *Control and Dynamic Systems*. San Diego: Academic Press, 1994, Vol 65, Part 2: 323 - 377.

作者简介:

吴淮宁 (1972—), 男, 北京航空航天大学自动化学院测控系副教授. 1997年6月获博士学位, 其后至1999年7月在北京理工大学从事博士后研究工作. 主要研究方向为鲁棒控制与滤波, 可靠控制, 模糊控制等. E-mail: huainingwu@163.com;

蔡开元 (1965—), 男, 北京航空航天大学自动化学院教授, 博士生导师, 教育部“长江学者奖励计划”特聘教授(第二批, 导航、制导与控制学科). 分别于1984年、1987年、1991年在北京航空航天大学获得学士、硕士、博士学位. 主要从事计算机系统可靠性、智能控制、模糊技术等方面的研究.

(上接第109页)

在这个例子中系统方程的系数是随意取的, 进一步的计算表明, 取其他的方程系数同样可以得到相应的小波系数, 并且当系统的响应时间减小时, 所求小波趋近于只满足一阶消失矩条件的 CDF5 - 3 小波.

6 结论(Conclusion)

本文利用线性系统的模式来得到小波, 通过构造实例, 证明本文的方法是可行的. 对于特定的线性系统, 其输出信号由若干个模式组成, 因此与系统模式正交的小波用于此系统时会有更好的效果, 本文正是基于此而添加的正交条件.

参考文献(References):

- [1] COHEN A, DAUBECHIES I, FEAUVEAU J. Bi-orthonormal bases

- of compactly supported wavelets [J]. *Communication on Pure and Applied Mathematics*, 1992, 45(5): 485 - 560.
- [2] DAUBECHIES I. Ten lectures on wavelets [C] // *CBMS-NSF Regional Conf Series in Applied Mathematics*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [3] 胡寿松. 自动控制原理[M]. 北京: 国防工业出版社, 1994. (HU Shousong. *Principle of Automatic Control* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1994.)

作者简介:

王宇 (1976—), 男, 2001年于国防科技大学自动控制系统获硕士学位, 现为国防科技大学博士生. 主要研究方向为惯性导航. E-mail: badu@163.net;

时伟 (1975—), 男, 2001年于国防科技大学自动控制系统获硕士学位, 现为国防科技大学博士生. 主要研究方向为模式识别与智能系统.

龙兴武 (1960—), 男, 国防科技大学理学院教授, 博士生导师. 主要研究领域为激光陀螺.