文章编号：1000-8152(2004)01-0125-04

一类 2-D 不确定离散系统的弹性保成本控制

关新平[1]，张群亮[2]，龙承念[1]

（1.燕山大学 电气工程学院，河北 秦皇岛 066004；2.上海交通大学 自动化研究所，上海 200030）

摘要：当被控系统的数学模型存在不确定性时，需要设计鲁棒控制器才能使得受控系统稳定，然而，如果控制器本身也存在不确定性时，系统就会变得复杂难以控制，使用传统的鲁棒控制方法很难达到期望的控制目标，甚至不能保证受控系统的稳定性．本研究就是针对当系统模型和控制器同时存在不确定性时，给出了设计稳定控制器的简便方法．通过将控制器的不确定性分别表示为加法式和乘法式摄动，研究了以上两种系统的弹性保成本控制问题，并给出了相应控制器的设计方法．在主要结果推导过程中，巧妙运用了各种矩阵不等式放缩和等价参数变换等数学方法，最终将主要结果表示为线性矩阵不等式(LMI)．利用 Matlab 的 LMI 工具箱，可以很方便地设计所需要的控制器．最后，对同一个受控系统，分别施加利用本文结果和已有结果设计的控制器，发现前者可以很好地控制系统，而后者却不能使受控系统稳定，从而验证了所得结果的有效性．

关键词：2-D 离散系统；不确定性；增益摄动；保成本控制．

中图分类号：TP13　　**文献标识码**：A

Resilient guaranteed cost control for a class of 2-D uncertain discrete systems

GUAN Xin-ping[1], ZHANG Qun-liang[2], LONG Cheng-nian[1]

(1. Institute of Electrical Engineering, Yanshan University, Hebei Qinhuangdao 066004, China;
2. Institute of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: When there exist uncertainties in the mathematical model of a controlled system, robust controller is needed to stabilize the controlled system. But if controller itself has uncertainties too, the controlled system will become complicated and difficult to control, at the same time, desirable control target is hard to achieve by traditional robust control methods, even stability can not be guaranteed either. For these reasons, the study was conducted to provide convenient methods to design stable controllers for those systems which have uncertainties in their models and controllers. By describing uncertainties as additive and multiplicative perturbations respectively, two resilient guaranteed cost control problems were considered, and the design methods for corresponding controllers were given simultaneously. During the study, the main results were expressed as LMIs by employing various mathematical techniques, such as zooms of matrix inequalities, equivalent parameter transformations etc. Using LMI tool box of Matlab software, it is very easy to design the appropriate controllers. Finally, through employing one controller designed by results in this paper and the other one designed by existed methods on the same controlled system, it is found that the former could stabilize the system perfectly, but the latter fails, which proveed the effectiveness of the derived results.

Key words: 2-D discrete systems; uncertainty; gain perturbations; guaranteed cost control

1 引言(Introduction)

近年来，2-D 离散系统的研究引起了众多学者的关注[1]．基于 2-D 李雅普诺夫方程的方法，文献[2]给出了一类常系数 2-D 离散系统渐近稳定的充分条件．文献[3]推广并改进了文献[2]的结果，给出了一种新的 2-D 离散系统稳定性判定的广义 Lyapunov 方程的方法，并且证明了它比文献[2]的结果有着更广的应用范围．文献[4,5]分别基于 Fornasini-Marchesini 模型和 Fornasini-Marchesini LSS 模型讨论了 2-D 离散系统的稳定性问题，并给出了相应的稳定性判据．当系统参数存在不确定性的情况下，文献[6,7]分别研究了 2-D 离散系统的静态状态反馈和动态输出反馈问题，并将鲁棒控制器的设计问题转化为 LMI 可行解的问题．以上结果都是关于 2-D 系

收稿日期：2001-10-08；收修改稿日期：2002-12-05．

统的稳定性分析和鲁棒镇定问题.但是,实际系统不仅要求闭环系统鲁棒稳定,还要求系统具有一定的鲁棒性能,例如,在一维系统的 H_∞ 控制[8]、保成本控制[9],文献[10]将文献[9]结果推广到了2-D不确定离散系统,提出了2-D系统保成本控制的概念,并分别就状态可测和不可测两种情况,研究了2-D不确定离散系统的保成本控制问题.

最近,Keel 和 Bhattacharyya 在文献[11]中指出,现有的鲁棒控制设计方法(如 H_∞、μ、l_1 等综合方法)都是仅考虑系统参数的不确定性,而没有考虑控制器增益的不确定性.当控制器参数存在摄动时(这种情况经常出现的,例如,系统初运行时,控制器的微调,以及控制器性能衰减时,增益参数的变化),传统的鲁棒控制方法表现出高度的脆弱性.如果设计系统时,不考虑控制器的摄动,将会导致系统的性能指标变差甚至不稳定.为此,文献[12]提出了弹性控制器的概念,并针对一类不确定性系统给出了弹性控制器的设计方法.目前,关于一维系统的弹性控制已有一些结果[13],但据作者所知,关于2-D离散系统的相关研究结果还没有.基于这个问题,本文研究了一类2-D不确定离散系统的弹性保成本控制问题,解决了当系统的状态矩阵,输入矩阵含有不确定性,以及控制器增益存在摄动时,2-D闭环系统的鲁棒镇定问题,同时考虑了系统的保成本及成本函数的优化问题.最后的结果以LMI形式给出,利用现有的LMI工具箱,可以很方便地设计出系统所需要的弹性控制器.

2 问题描述(Problem description)

考虑一类由LSS模型描述的不确定2-D离散系统

$$\begin{cases} x(i+1,j+1) = \\ (A_1+\Delta A_1)x(i+1,j)+(A_2+\Delta A_2)x(i,j+1)+ \\ (B_1+\Delta B_1)u(i+1,j)+(B_2+\Delta B_2)u(i,j+1), \\ y(i,j)=Cx(i,j)+Du(i,j), \\ x(0,j)=x_{0j},\ x(i,0)=x_{i0}. \end{cases} \tag{1}$$

其中:$x(i,j)\in \mathbb{R}^n$,$u(i,j)\in\mathbb{R}^m$,$y(i,j)\in\mathbb{R}^l$ 分别是系统状态;输入、输出向量 A_1,A_2,B_1,B_2 是具有适当维数的常值矩阵;$\Delta A_1,\Delta A_2,\Delta B_1,\Delta B_2$ 代表系统参数中的不确定性,且满足条件

$$[\Delta A_i \quad \Delta B_i] = HF(t)[E_{1i} \quad E_{2i}]\ (i=1,2). \tag{2}$$

上式中:H,E_{1i},E_{2i} 是常数矩阵,$F(t)$ 是满足 $\|F(t)\|\leqslant 1$ 条件的未知矩阵.

定义2-D离散系统(1)的保成本函数为

$$\begin{aligned} J = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\{ & x^{\mathrm T}(i+1,j)Q_1x(i+1,j)+ \\ & x^{\mathrm T}(i,j+1)Q_2x(i,j+1)+ \\ & u^{\mathrm T}(i+1,j)R_1u(i+1,j)+ \\ & u^{\mathrm T}(i,j+1)R_2u(i,j+1)\}. \end{aligned} \tag{3}$$

式中 $Q_i>0$,$R_i>0$ 是给定的加权矩阵.

对于给定的2-D离散系统(1),设计如下形式的弹性控制器:

$$u(i,j)=(K+\Delta K)x(i,j). \tag{4}$$

式中:K 表示控制器增益,ΔK 表示控制器增益的摄动.本文将考虑两种形式的摄动:

a) ΔK 是加法式摄动:

$$\Delta K = M_1\Delta_1(t)N_1,\ \Delta_1^{\mathrm T}(t)\Delta_1(t)\leqslant I. \tag{5}$$

其中:M_1,N_1 是已知维数的常数矩阵,$\Delta_1(t)$ 是未知元素矩阵.

注 1 这种形式的摄动常常出现在系统初运行阶段时系统控制器参数的微调.

b) ΔK 是乘法式摄动:

$$\Delta K = M_2\Delta_2(t)N_2K,\ \Delta_2^{\mathrm T}(t)\Delta_2(t)\leqslant I. \tag{6}$$

注 2 这种形式的控制器摄动常常出现在控制器性能衰减所导致的增益参数的变化.

定义 1[6] 考虑系统(1)及成本函数(3),如果有 $P=P^{\mathrm T}>0,\alpha>0,\beta>0(\alpha+\beta=1)$ 满足

$$[\bar A_1+\bar B_1\bar K \quad \bar A_2+\bar B_2\bar K]^{\mathrm T}P[\bar A_1+\bar B_1\bar K \quad \bar A_2+\bar B_2\bar K]- \begin{bmatrix}\alpha P & 0\\ 0 & \beta P\end{bmatrix}+E<0, \tag{7}$$

则称式(4)是系统的一个弹性保成本控制器.其中

$$\bar A_i = A_i+\Delta A_i(i=1,2),\ \bar K = K+\Delta K,$$

$$E=\begin{bmatrix} Q_1+\bar K^{\mathrm T}R_1\bar K & 0\\ 0 & Q_2+\bar K^{\mathrm T}R_2\bar K\end{bmatrix}. \tag{8}$$

引理 1[10] 对于2-D系统(1)及成本函数(3),如果满足式(7)的 P 存在,则成本函数(3)满足

$$J\leqslant \alpha x_{10}^{\mathrm T}Px_{10}+\beta x_{01}^{\mathrm T}Px_{01}. \tag{9}$$

3 主要结果(Main result)

在本节当中,本文将讨论2-D系统(1)的控制器增益存在式(5)、(6)形式摄动时的保成本控制问题.对此,有如下定理:

定理 对于2-D不确定离散系统(1)及成本函数(3),当系统的控制器增益存在式(5)、(6)形式的摄动时,系统(1)可以进行保成本控制的充分条件是存在矩阵 Y,对称矩阵 $X>0$,常数 $\varepsilon>0,\eta>0$,使得下面的LMI成立:

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 \\ \Xi_2^{\mathrm{T}} & \Xi_3 \end{bmatrix} < 0, \tag{10}$$

且系统的一个控制器为 $u(i,j) = YX^{-1}x(i,j)$. 其中式(10)中的参数分别为

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} -X+\varepsilon HH^{\mathrm{T}} & A_1X+B_1Y & A_2X+B_2Y & 0 & 0 \\ (A_1X+B_1Y)^{\mathrm{T}} & -\alpha X & 0 & (E_{11}X+E_{21}Y)^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}}(R_1)^{1/2} \\ (A_2X+B_2Y)^{\mathrm{T}} & 0 & -\beta X & (E_{12}X+E_{22}Y)^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & E_{11}X+E_{21}Y & E_{12}X+E_{22}Y & -\varepsilon I & 0 \\ 0 & (R_1)^{1/2}Y & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$\Xi_2 = \begin{bmatrix} 0 & \eta B_1M & \eta B_2M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega^{\mathrm{T}} & 0 & X(Q_1)^{1/2} & 0 \\ Y^{\mathrm{T}}(R_2)^{1/2} & 0 & 0 & 0 & \Omega^{\mathrm{T}} & 0 & X(Q_2)^{1/2} \\ 0 & \eta E_{21}M & \eta E_{22}M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$\Xi_3 = \begin{bmatrix} -I & \eta(R_1)^{1/2}M & \eta(R_2)^{1/2}M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta((R_1)^{1/2}M)^{\mathrm{T}} & -\eta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta((R_2)^{1/2}M)^{\mathrm{T}} & 0 & -\eta I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}. \tag{13}$$

证明略.

注 3　定理给出了控制器增益存在两种摄动时的统一结果，在实际应用中，应当选取合适的摄动形式. 当 ΔK 具有式(5)形式的加法式摄动时，定理中的参数 $M = M_1, \Omega = XN_1$；当 ΔK 具有式(6)形式的乘法式摄动时，定理中的参数 $M = M_2, \Omega = YN_2$.

注 4　定理给出了保成本控制的充分条件，但并不能保证成本函数为最小，为此，本文给出一个计算最小成本函数的方法. 假设系统的初始向量满足

$$S = \{x(i,0), x(0,j) \in \mathbb{R}^n : x(i,0) = UW_1, \; x(0,j) = UW_2, W_k^{\mathrm{T}}W_k < I, k = 1,2\},$$

则成本函数的上界为

$$J_0 \leqslant \lambda_{\max}(U^{\mathrm{T}}X^{-1}U). \tag{14}$$

实际应用时，可以解如下的优化问题

$$\min\ (\lambda) \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} -\lambda I & U^{\mathrm{T}} \\ U & -X \end{bmatrix} < 0, \\ \text{inequation (10)}. \end{cases} \tag{15}$$

推论　当系统控制器增益的摄动为零时，系统存在保成本控制器的充分条件是，如果存在矩阵 Y，对称矩阵 $X > 0$，常数 $\varepsilon > 0$，使得下面的 LMI 成立：

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & \hat{\Xi}_2^{\mathrm{T}} \\ \hat{\Xi}_2 & \hat{\Xi}_3 \end{bmatrix} < 0. \tag{16}$$

在上式当中，Ξ_1 与式(11)相同，$\hat{\Xi}_2, \hat{\Xi}_3$ 的表达形式如下：

$$\begin{cases} \hat{\Xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (R_2)^{1/2}Y & 0 & 0 \\ 0 & (Q_1)^{1/2}X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (Q_2)^{1/2}X & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{\Xi}_3 = \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{17}$$

则系统(1)的一个控制器可以选为 $u(i,j) = YX^{-1}x(i,j)$.

4　数值算例(Numerical example)

本节当中给出一个数值算例，用以说明本文结果的有效性. 沿用前面的符号，系统的参数如下：

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & 1 \\ 0 & -0.01 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ -0.5 & 0.081 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.097 \\ 0 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0.001 \end{bmatrix},$$

$$E_{11} = [-0.1 \quad 0],\ E_{12} = [-0.01 \quad 0.01],$$

$$\alpha = 0.4,\ \beta = 0.6,\ E_{21} = 0.15,\ E_{22} = 0.27,$$

$$M_1 = [0.12 \quad 0.16],\ N_1 = -0.1,\ N_2 = 1.$$

假设系统的状态初始向量是未知的，但满足条件 $x_{01}^{\mathrm{T}}x_{01} < 1, x_{10}^{\mathrm{T}}x_{10} < 1$，选取系统保成本函数(3)

的加权矩阵如下:

$$Q_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ Q_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ R_1=0.5,\ R_2=0.1.$$

i) 当控制器增益具有加法式摄动时,可以利用LMI工具箱求解式(15),可得系统(1)的一个弹性保成本控制器为

$$u(i,j)=[2.1999\quad 5.1927]x(i,j),\ \bar{J}\leqslant 168.163.$$

ii) 当控制器增益具有乘法式摄动时,可以利用LMI工具箱求解式(15),可得系统(1)的一个弹性保成本控制器为

$$u(i,j)=[2.2867\quad 5.0599]x(i,j),\ \bar{J}\leqslant 234.250.$$

为了说明弹性控制器优于非弹性控制器,以加法为例对二者进行比较.假设设计系统时不考虑控制器的摄动(理想状态),求解式(15),得到系统的一个控制器

$$u(i,j)=[2.1607\quad 5.1949]x(i,j).$$

将上式结果和i)的结果代入到式(7)当中,两者均能使系统鲁棒稳定.但是系统在实际运行当中,控制器不可避免地要受到一些扰动,假设控制器受到的扰动为

$$\Delta u(i,j)=[0.0120\quad 0.0160]\sin(t)x(i,j).$$

将 $u(i,j)+\Delta u(i,j)$ 的弹性控制器结果和非弹性控制器的结果代入到式(7)当中,可发现,弹性控制器的结果仍然满足式(7),而非弹性控制器结果却不满足.从上面的例子,可以看出,当系统的控制器受到很小的扰动时,非弹性控制器就不能保证闭环系统的稳定性,从而很好地说明了本文结果的优越性.

5 结论(Conclusion)

本文考虑了一类不确定2-D离散系统的弹性保成本控制问题,针对实际系统控制器增益常常存在摄动,本文研究了系统弹性控制器的设计问题.当控制器增益存在加法式摄动和乘法式摄动时,给出了系统弹性控制器存在的充分条件,同时给出了成本函数的优化方法.最后的结果以LMI形式给出.

参考文献(References):

[1] BISIACCO M. State and output feedback stabilizability of 2-D systems [J]. *IEEE Trans on Circuits Systems*, 1985, 32(11):1246 - 1254.

[2] HINAMOTO T. 2-D Lyapunov equation and filter design based on the Fornasini-Marchesini second model [J]. *IEEE Trans on Circuits Systems*, 1993, 40(1):102 - 110.

[3] LU W S. On a Lyapunov approach to stability analysis of 2-D digital filters [J]. *IEEE Trans on Circuits Systems*, 1994, 41(5):665 - 669.

[4] TRINH H, FERNANDO T. Some new stability conditions for two dimensional difference systems [J]. *Int J of Systems Science*, 2000, 31(2):203 - 211.

[5] HINAMOTO T. Stability of 2-D discrete systems described by the Fornasini-Marchesini second model [J]. *IEEE Trans on Circuits Systems*, 1997, 44(2):254 - 257.

[6] DU C, XIE L. Stability analysis and stabilization of uncertain two-dimensional discrete systems: An LMI approach [J]. *IEEE Trans on Circuits Systems*, 1999, 46(12):1371 - 1374.

[7] DU C, XIE L. LMI approach to output feedback stabilization of 2-D discrete systems [J]. *Int J Control*, 1999, 72(2):97 - 106.

[8] YU L. Robust memoryless H_∞ controller design for linear time-delay systems with norm-bounded time-varying uncertainty [J]. *Automatica*, 1996, 32(12):1759 - 1762.

[9] GUAN X P, LIN Z Y, DUAN G R. Robust guaranteed cost control for discrete time uncertain systems with delay [J]. *IEE Proc-Control Theory and Applications*, 1999, 146(5):598 - 602.

[10] GUAN X P, LONG C N, DUAN G R. Robust optimal guaranteed cost control for 2-D disctete systems [J]. *IEE Proc-Control Theory and Applications*, 2001, 148(5):355 - 361.

[11] KEEL L H, BHATTACHARYA S P. Robust fragile or optimal? [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(8):1098 - 1105.

[12] HADDAD W M, CORRADO J R. Robust resilient dynamic controllers for systems with parametric uncertainty and controller gain variations [C]// *Proc of American Control Conference*. Philadephia, PA:[s.n.], 1998:2837 - 2841.

[13] YANG G H, WANG J L. Guaranteed cost control for discrete-time linear systems under controller gain perturbations [J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2000, 1(3):161 - 180.

作者简介:

关新平 (1963 —),男,燕山大学电气工程学院自动化系教授,博士生导师.主要从事ATM网络拥塞控制及混沌控制等研究. E-mail: xpguan@ysu.edu.cn;

张群亮 (1978 —),男,上海交通大学自动化所博士研究生.感兴趣的研究方向是不确定系统的鲁棒控制. E-mail: hbqlzhang@163.com;

龙承念 (1977 —),男,燕山大学控制理论与控制工程专业博士生.主要从事ATM网络控制等研究.