文章编号: 1000-8152(2004)02-0283-04

不确定关联大系统的分散变结构控制

郭建国, 周凤岐, 周 军
(西北工业大学 航天学院, 陕西 西安 710072)

摘要: 针对不确定关联大系统,提出了一种变结构渐近稳定控制律.利用左特征向量设计了关联大系统的切换面,在理想切换面附近利用一个辅助函数,建立一个柔化带来柔化控制律.利用 Lyapunov 稳定性理论和对角占优性质,严格证明了所设计的不确定关联大系统的变结构控制系统的全局渐近稳定性.这种变结构控制律不仅提高了系统进入滑动模态的快速性,而且消除切换面附近的抖振.仿真算例验证了该方法的有效性.

关键词: 切换函数; 左特征向量; 辅助函数; 变结构分散控制
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Decentralized variable structure control of interconnected large scale system with uncertainties

GUO Jian-guo, ZHOU Feng-qi, ZHOU Jun
(College of Astronautics, Northwestern Polytechnic University, Shanxi Xi'an, 710072, China)

Abstract: A variable structure asymptotically stabilizing control law is proposed for the interconnected large scale systems with uncertainties. The switch surface is designed by making use of the left eigenvectors, and a soft boundary layer is built near the ideal switch surface by using an auxiliary function to make the control law continuous. The Lyapunov stability theory and the diagonal dominant property are used to prove the global asymptotic stability of the interconnected large scale system with uncertainties and with the variable structure control applied. The variable structure control makes the system quickly entering into the sliding mode and eliminates chattering near the switch surface. An illustrative example is given to verify the effectiveness of the method.

Key words: switch function; left eigenvalue; auxiliary function; decentralized variable structure control

1 引言(Introduction)

从 Lefebvre[1]对关联大系统采用变结构控制以来,对关联大系统变结构控制研究的文献[1~3]有很多,使用的递阶或分层控制法只适用于关联阵为三角阵的情况;或者是不确定项完全满足匹配条件;而本文考虑的是不确定项不满足匹配条件的关联大系统.同时切换面的选取对于变结构控制的设计是很重要的,它[4]要满足系统存在稳定滑动模态的条件.本文基于左特征向量构造了各个子系统的切换面,提高了系统进入滑动模态的快速性;并利用辅助函数建立了一个柔化带,不仅使系统具有期望的稳定滑动模态,而且使设计的分散变结构控制律在带内连续,有效地抑制了系统在切换面附近的抖振,使关联大系统全局渐近稳定.

2 系统描述(System description)

本文考虑由 N 个子系统组成的多输入不确定关联大系统

$$\dot{x}_i = (A_i + \Delta A_i)x_i + B_i u_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} (A_{ij} + \Delta A_{ij})x_j (i = 1,2,\cdots,N). \quad (1)$$

其中: $x_i \in \mathbb{R}_i^{n_i}$, $u_i \in \mathbb{R}_i^{m_i}$ 分别为子系统的状态、控制信号;(A_i, B_i) 能控,且 B_i 列满秩;A_{ij} 为子系统之间的状态关联阵;ΔA_i 和 ΔA_{ij} 为系统参数的摄动阵,且 $\|\Delta A_{ij}\| \leqslant \alpha_{ij}$, $\|\Delta A_i\| \leqslant \alpha_{ii}$.

引理 1[5] 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$,若 A 可逆且 $|A_{22}| \neq 0$,记 $A_{11,2} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ 可逆,则

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11,2}^{-1} & -A_{11,2}A_{12}A_{22}^{-1} \\ A_{22}^{-1}A_{21}A_{11,2}^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}A_{11,2}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

引理 2 设 $a, b_1, b_2, \cdots, b_N$ 为任意非零向量,则 $2a^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{N} b_i) \leqslant \beta a^{\mathrm{T}}a + \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{N} b_i^{\mathrm{T}}b_i$(常数 $\beta > 0$).

收稿日期:2002-01-14; 收修改稿日期:2003-09-23.
基金项目:西北工业大学博士论文创新基金项目(2003Y16110);西北工业大学青年科技创新基金项目(2003Y16141).

事实上,对任意非零向量 a 和 b_i,有 $2a^{\mathrm T}b_i \leqslant \beta a^{\mathrm T}a + \frac{1}{\beta}b_i^{\mathrm T}b_i$(常数 $\beta > 0$),引理可得.

引理 3[5] 设 $W = (w_{ij})$ 为一对角线以外的元素均非正的 $N\times N$ 实方阵,若 W 为严格对角阵,则存在正向量 x,使得 $x^{\mathrm T}W > 0$.

因$(A_i \quad B_i)$可控和 B_i 列满秩知,存在矩阵 $K_i \in \mathbb{R}^{m_i\times n_i}$,使 $\bar A_i = A_i + B_iK_i$ 稳定,设 $\bar A_i$ 的 n_i 个稳定特征根为 $\lambda_{i1},\lambda_{i2},\cdots,\lambda_{im_i},\mu_{i1},\mu_{i2},\cdots,\mu_{i,n_i-m_i}$,设这些特征根对应的左特征向量组成的矩阵为 $\begin{pmatrix} G_{i1} & G_{i2}\\ V_{i1} & V_{i2}\end{pmatrix}$,则其可逆.

对关联大系统(1),用左特征向量设计的切换函数为 $S = (S_1^{\mathrm T},S_2^{\mathrm T},\cdots,S_N^{\mathrm T})^{\mathrm T}$,其中 S_i 为第i个子系统的切换函数:

$$S_i = C_ix_i,\ C_i = (V_{i1} \quad V_{i2}). \tag{2}$$

3 滑动模态的稳定性(Stability of sliding mode)

因关联项和不确定项不满足匹配条件,则系统(1)可化为如下形式:

$$\begin{aligned}\dot x_{i1} = {}&\bar A_{i11}x_{i1} + \bar A_{i12}x_{i2} + \Delta\bar A_{i11}x_{i1} + \Delta\bar A_{i12}x_{i2} + \\ &\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(\bar A_{ij11}x_{j1} + \bar A_{ij12}x_{j2}) + \\ &\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(\Delta\bar A_{ij11}x_{j1} + \Delta\bar A_{ij12}x_{j2}),\end{aligned} \tag{3a}$$

$$\begin{aligned}\dot x_{i2} = {}&\bar A_{i21}x_{i1} + \bar A_{i22}x_{i2} + \Delta\bar A_{i21}x_{i1} + \Delta\bar A_{i22}x_{i2} + \\ &\bar B_iu_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{N}(\bar A_{ij21}x_{j1} + \bar A_{ij22}x_{j2}) + \\ &\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(\Delta\bar A_{ij21}x_{j1} + \Delta\bar A_{ij22}x_{j2}).\end{aligned} \tag{3b}$$

当 $S_i = C_ix_i = V_{i1}x_{i1} + V_{i2}x_{i2} = 0$ 时,系统(3)的滑动模态方程为

$$\dot x_{i1}^* = A_i^*x_{i1}^* + \Delta A_i^*x_{i1}^* + \sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}^*x_{j1}^* + \sum_{j=1,j\neq 1}^{N}\Delta A_{ij}^*x_{j1}^*. \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned}A_i^* &= \bar A_{i11} - \bar A_{i12}V_{i2}^{-1}V_{i1},\\ \Delta A_i^* &= \Delta\bar A_{i11} - \Delta\bar A_{i12}V_{i2}^{-1}V_{i1},\\ A_{ij}^* &= \bar A_{ij11} - \bar A_{ij12}V_{j2}^{-1}V_{j1},\\ \Delta A_{ij}^* &= \Delta\bar A_{ij11} - \Delta\bar A_{ij12}V_{j2}^{-1}V_{j1}.\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}\Lambda_{i1} &= \mathrm{diag}\ (\mu_1,\mu_{i2},\cdots,\mu_{i,n_i-m_i}),\\ \Lambda_{i2} &= \mathrm{diag}\ (\lambda_{i1},\lambda_{i2},\cdots,\lambda_{im_i}),\end{aligned}$$

那么有

$$\begin{pmatrix} G_{i1} & G_{i2}\\ V_{i1} & V_{i2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar A_{i11} & \bar A_{i12}\\ \bar A_{i21} & \bar A_{i22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{i1} & 0\\ 0 & \Lambda_{i2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_{i1} & G_{i2}\\ V_{i1} & V_{i2}\end{pmatrix}.$$

令 $\begin{pmatrix} G_{i1} & G_{i2}\\ V_{i1} & V_{i2}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_{i1} & \xi_{i2}\\ \eta_{i1} & \eta_{i2}\end{pmatrix}$,则

$$\begin{pmatrix} \bar A_{i11} & \bar A_{i12}\\ \bar A_{i21} & \bar A_{i22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_{i1} & \xi_{i2}\\ \eta_{i1} & \eta_{i2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{i1} & \xi_{i2}\\ \eta_{i1} & \eta_{i2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Lambda_{i1} & 0\\ 0 & \Lambda_{i2}\end{pmatrix},$$

故

$$\bar A_{i11}\xi_{i1} + \bar A_{i12}\eta_{i1} = \xi_{i1}\Lambda_{i1}. \tag{5}$$

记 $V_{i2}\in\mathbb{R}^{m_i\times m_i}$ 可逆且$(G_{i1} - G_{i2}V_{i2}^{-1}V_{i1})$可逆,由引理1知

$$\eta_{i1} = -V_{i2}^{-1}V_{i1}\xi_{i1}. \tag{6}$$

将式(6)代入式(5)得

$$(\bar A_{i11} - \bar A_{i12}V_{i2}^{-1}V_{i1})\xi_{i1} = \xi_{i1}\Lambda_{i1}.$$

显然 A_i^* 是滑动模态方程(4)含期望特征值的矩阵,关于方程(4)的稳定性,有以下定理:

定理 1 若 λ_i^* 满足

$$\lambda_i^* + \beta_im_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{N}\|A_{ji}^*\|^2/\beta_j + \sum_{j=1}^{N}\alpha_{ji}/\beta_j < 0,$$

则滑动模态方程(4)渐近稳定.其中 $\lambda_i^* = \max\ \{A_i^*$ 的特征值$\}$,常数 $\beta_i > 0$,m_i 为 $A_{ij}^*\neq 0$ 和 $\Delta A_{ij}^*\neq 0$ 的个数.

证 取 Lyapunov 函数为

$$V = \sum_{i=1}^{N}x_{i1}^{*\mathrm T}x_{i1}^*,$$

则

$$\dot V = \sum_{i=1}^{N}2x_{i1}^{*\mathrm T}[A_i^*x_{i1}^* + \Delta A_i^*x_{i1}^* + \sum_{j=1,j\neq 1}^{N}A_{ij}^*x_{j1}^* + \sum_{j=1,j\neq 1}^{N}\Delta A_{ij}^*x_{j1}^*].$$

由引理2可得

$$\dot V \leqslant \sum_{i=1}^{N}2[\lambda_i^*\|x_{i1}^*\|^2 + \beta_im_i\|x_{i1}^*\|^2 + (\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\|A_{ij}^*\|^2/\beta_i + \sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}/\beta_j)\|x_{j1}^*\|^2].$$

其中:$\beta_i > 0$ 常数,m_i 为 $A_{ij}^*\neq 0$ 和 $\Delta A_{ij}^*\neq 0$ 的个数.

$$\dot V \leqslant \sum_{i=1}^{N}2(\lambda_i^* + \beta_im_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{N}\|A_{ji}^*\|^2/\beta_j + \sum_{j=1}^{N}\alpha_{ji}/\beta_j)\|x_{i1}^*\|^2.$$

由定理的条件得 $\dot V \leqslant 0$,则滑动模态方程(4)渐近稳定.

4 系统的全局渐近稳定(Global asymptotic stability of system)

记辅助函数为 s_{di},其分量为

$s_{dik} =$

$S_{ik} - d_{ik}\mathrm{sat}\ (S_{ik}/d_{ik})(d_{ik} > 0,\ k = 1,2,\cdots,m_i)$.

取控制律

$$u_i = K_i x_i - (C_i B_i)^{-1}(M_i \| x_i \| + \varepsilon) s_{di}. \quad (7)$$

其中: $M_i > 0$,可由下面式(9)确定;$\varepsilon > 0$,则有以下定理:

定理2　不确定关联大系统(1)在控制律(7)作用下,系统状态能在有限间内达到带 $S_{2\Delta} = \{x \mid \| S_i(x) \| \leqslant 2\Delta_i\}$ 内.其中 $\Delta_i = \| d_i \|$, $d_i = (d_{i1}, d_{i2}, \cdots, d_{im_i})^{\mathrm{T}}$.

证　取 Lyapunov 函数为

$$V = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \| S_i \| \ (\gamma_i > 0).$$

将控制律(7)代入 $\dot{V}$ 得

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i S_i^{\mathrm{T}} \dot{S}_i / \| S_i \| =$$

$$\sum_{i=1}^{N} \gamma_i S_i^{\mathrm{T}} / \| S_i \| [\Lambda_{i2} S_i + C_i \Delta A_i x_i - (M_i \| x_i \| + \varepsilon) s_{di} + \sum_{j=1,j\neq i}^{N} (C_i A_{ij} + C_i \Delta a_{ij}) x_j]. \quad (8)$$

在 $S_{2\Delta} = \{x \mid \| S_i(x) \| \leqslant 2\Delta_i\}$ 外,存在 k,有 $| S_{ik} | - d_{ik} > f_i$, $\| s_{di} \| > f_i$.

令

$$\bar{\lambda}_i = \max\ (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \cdots, \lambda_{im_i}),$$

$$f_i = \min\ (d_{i1}, d_{i2}, \cdots, d_{im_i}),$$

$$b_{ij} = \| C_i A_{ij} \| + \| C_i \| \alpha_{ij},$$

取

$$M_i = \frac{1}{f_i}\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^{N} b_{ij} + \| C_i \| \alpha_{ij}\Big) + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0), \quad (9)$$

则式(8)化为

$$\dot{V} \leqslant \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \bar{\lambda}_i \| S_i \| - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \varepsilon f_i - \gamma^{\mathrm{T}} \theta y.$$

其中

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_N)^{\mathrm{T}},$$

$$y = (\| x_1 \|, \| x_2 \|, \cdots, \| x_N \|)^{\mathrm{T}},$$

$$\theta = \begin{pmatrix} \sum_{j=2}^{N} b_{ij} + \varepsilon & -b_{12} & \cdots & -b_{1N} \\ -b_{21} & \sum_{j=1,j\neq 2}^{N} b_{ij} + \varepsilon & \cdots & -b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -b_{N1} & -b_{N2} & \cdots & \sum_{j=1}^{N-1} b_{ij} + \varepsilon \end{pmatrix}.$$

显然 θ 为严格对角占优阵,由引理3知,存在正向量 z 使 $z^{\mathrm{T}}\theta = l$,取 $\gamma = z$,则有

$$\dot{V} \leqslant \sum_{i=1}^{N} \bar{\lambda}_i z_i \| S_i \| - \varepsilon \sum_{i=1}^{N} z_i f_i - \sum_{i=1}^{N} l_i \| x_i \| < -\varepsilon \sum_{i=1}^{N} z_i f_i < 0.$$

由以上知系统状态在控制律(7)作用下能在有限时间内快速到达带 $S_{2\Delta}$ 内.系统状态进入带内后,就有以下结果:

定理3　若 $\bar{\lambda}_i$ 满足 $\bar{\lambda}_i + \bar{\beta}_i \bar{m}_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{N} \| A_{ji} \|^2 / \bar{\beta}_j + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ji} / \bar{\beta}_j < 0$,则系统状态在控制律(7)作用下在带 $S_{2\Delta}$ 内渐近稳定.其中:$\bar{\lambda}_i = \max\ \{\bar{A}_i$ 的特征值$\}$, $\bar{m}_i$ 为 $A_{ij} \neq 0$ 和 $\Delta A_{ij} \neq 0$ 的个数,$\beta_i > 0$.

该定理的证明方法和定理1的相同,这里不再赘述.要注意的是由定理2的证明知系统进入带 $S_{2\Delta}$ 后,仍会进入带 $S_{2\Delta} = \{x \mid \| S_i(x) \| \leqslant \Delta_i\}$,而在带 S_Δ 内渐近稳定.

由以上定理知在 $S_{2\Delta}$ 内,变结构控制 u 连续,带 $S_{2\Delta}$ 起到了一个柔化和减振作用,适当地选择宽度 Δ_i 既可保证系统运动与理想滑模有相近的动态性质,又可有效地抑制抖动.

5　仿真算例(Simulation example)

例　考虑如下一个含有不匹配的不确定项的2阶子系统组成的4阶系统:

$$\dot{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \bar{a}_1 \\ -2 + \bar{a}_2 & 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 + \bar{b}_1 \\ 1.5 + \bar{b}_2 & 0.4 \end{pmatrix} x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \bar{c}_1 \\ -2 + \bar{c}_2 & 3 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 + \bar{d}_1 \\ 1.3 + \bar{d}_2 & 1 \end{pmatrix} x_1.$$

其中参数不确定项为

$$\bar{a}_1 = 0.2\sin\ (2t),\ \bar{a}_2 = 0.2\sin\ (t),$$

$$\bar{b}_1 = 0.05\cos\ (2t),\ \bar{b}_2 = 0.05\cos\ (t),$$

$$\bar{c}_1 = 0.3\sin\ (2t),\ \bar{c}_2 = 0.3\sin\ (t),$$

$$\bar{d}_1 = 0.1\cos\ (2t),\ \bar{d}_1 = 0.1\cos\ (t).$$

按本文方法设计切换面,选取系统期望的特征值: $\lambda_{11} = -3, \lambda_{12} = -2, \lambda_{21} = -3, \lambda_{22} = -2$.由此设计的切换面为 $S_1 = 3x_{11} + x_{12}, S_2 = 3x_{21} + x_{22}$.选取控制律为

$$u_1 = -4x_{11} - 8x_{12} - (4 \| x_1 \| + 0.01) s_{d1},$$

$$u_2 = -6.2x_{21} - 5.2x_{22} - (4\|x_2\| + 0.01)s_{d2}.$$

其中

$$x_1 = (x_{11}, x_{12})^{\mathrm{T}},\ x_2 = (x_{21}, x_{22})^{\mathrm{T}},$$

$$s_{d1} = S_1 - 0.03\mathrm{sat}\ (\frac{S_1}{0.03}),$$

$$s_{d2} = S_2 - 0.03\mathrm{sat}\ (\frac{S_2}{0.03}).$$

以下仿真图1~4可以看出系统状态达到了期望的特性,且控制律连续,消除了抖振.

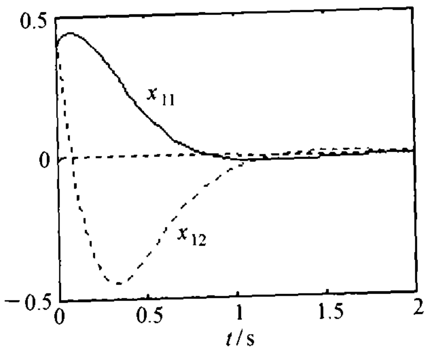

图1 x_1的变化曲线

Fig. 1 Behavior of x_1

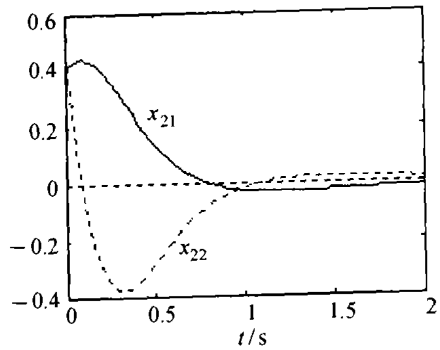

图2 x_2的变化曲线

Fig. 2 Behavior of x_2

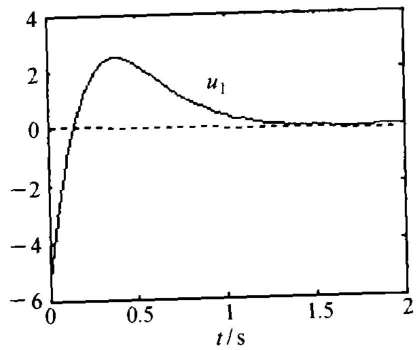

图3 u_1的变化曲线

Fig. 3 Behavior of u_1

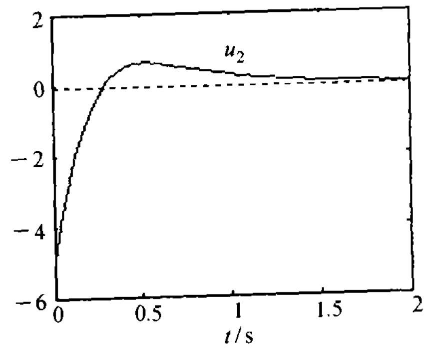

图4 u_2的变化曲线

Fig. 2 Behavior of u_2

6 结论(Conclusion)

针对不确定关联大系统,本文提出了利用左特征向量设计切换函数的方法,设计的分散变结构控制律可发挥系统自身能力抑制不确定项和关联项的影响,能使系统迅速稳定,同时减少了结论的保守性.同时利用辅助函数,在理想切换线附近形成一个柔化带,使设计的分散变结构控制在带内连续,既保持理想滑模的良好性质又抑制了抖动.仿真结果验证了该方法的有效性.

参考文献(References):

[1] RICHTER S, LEFEBVRE S, DECARLO R. Control of a class of nonlinear system by decentralized control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1982,28(12):1112-1114.

[2] WEN Xiangcai, LIU Yongqing. Decentralized variable structure control of large scale uncertain systems [J]. *Control Theory & Applications*, 1995,12(4):429-435.

[3] VESLY V. Decentralized variable structure control of complex systems[J]. *Int J of Systems Science*, 1998,29(3):311-321.

[4] 高为炳.变结构控制理论基础及设计方法[M].北京:科学出版社,1998.
(GAO Weibing. *Variable Structure Control Theory and Applications* [M]. Beijing: Science Press,1998.)

[5] 陈祖明,周家胜.矩阵论引论[M].北京:北京航空航天大学出版社,1998.
(CHEN Zuming, ZHOU Jiasheng. *Introduction to Matrix Theory* [M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronauntics Press, 1998.)

作者简介:

郭建国 (1975—),男.分别于1998年和2001年在河南师范大学数学系获学士和硕士学位,现在西北工业大学攻读博士学位.主要研究方向:先进的控制理论及应用,飞行器制导、控制与仿真. E-mail: gjg1975@tom.com;

周凤岐 (1935—),男.教授,博士生导师.主要研究方向:先进控制理论及应用,导弹控制系统设计与分析,光电与图像精确制导技术;

周 军 (1966—),男,教授,博士生导师.主要研究方向:变结构自适应控制理论,航天器制导,控制与仿真.