第 21 卷第 2 期
2004 年 4 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol.21 No.2
Apr. 2004

文章编号: 1000 - 8152(2004)02 - 0291 - 04

离散广义大系统的 Lyapunov 稳定性分析

沃松林, 邹 云
(南京理工大学 自动化系,江苏 南京 210094)

摘要: 广义大系统的稳定性是广义大系统理论的基本问题之一,对其稳定性的研究要比状态空间大系统复杂得多,因为广义大系统不仅需要考虑稳定性,而且还要考虑正则性和因果性(离散广义系统)及脉冲自由(连续广义系统).本文在所有孤立子系统都是正则的且具有因果关系的条件下,利用 Lyapunov 方程,应用 Lyapunov 函数方法,研究了广义离散线性大系统和广义离散非线性大系统的稳定性和不稳定性问题,给出了离散广义大系统稳定性和不稳定性判定定理,得到了离散广义大系统的关联稳定参数域和不稳定域.

关键词: 广义离散系统; 大系统; Lyapunov 函数; 关联参数域
中图分类号: TP18 **文献标识码**: A

Lyapunov stability analysis of singular discrete large-scale systems

WO Song-lin, ZOU Yun
(Department of Automation, Nanjing University of Science & Technology, Jiangsu Nanjing 210094, China)

Abstract: Asymptotic stability is one of the fundamental problems in the theory of singular large-scale systems. Its determination is more complicated than that for nonsingular large-scale systems in state-space form, because for singular large-scale systems one has to consider not only stability but also regularity and impulse immunity (for continuous singular systems) and causality (for discrete singular systems). In this paper the problem of asymptotic stability and instability for the singular discrete linear large-scale systems and singular discrete non-linear large-scale systems is investigated by the method of Lyapunov equation and Lyapunov function. Under the condition that all isolated subsystems are regular and causal, the criteria are given to determine whether or not the discrete singular large-scale system is asymptotically stable or unstable. The interconnecting parameter regions of asymptotic stability and instability for the system are obtained as well.

Key words: singular discrete system; large-scale system; Lyapunov function; interconnecting parameter regions

1 引言(Introduction)

稳定性是指系统在受到扰动作用后,其运动可返回原平衡状态的一种性能,它是所有自动控制系统都应满足的一个基本特性.继古典控制理论和现代控制理论之后,大系统理论成了自动控制理论的第三代理论的主要内容.因为大系统规模宠大,因素众多,结果复杂,所以常常很难采用经典的“一揽子”解决方式.一般采用简化和分解两种处理方法[1~3].自从 1974 年 Rosenbrock[4]在研究复杂的电路网络系统中首先提出广义系统问题以来,人们已经发现电力、电路、航空、机器人、核反应和化工过程等工程和经济、生物、人口等等实际系统中广泛存在既有微分方程,又有代数方程的系统(即广义系统).广义系统具有状态的层次性和无穷运动模式[5~7],但不具有传统的因果性和结构稳定性,齐次初值问题可能不相容,有解也可能不唯一等困难,对其稳定性研究也就相当困难[8],文献[9] 研究了广义线性连续大系统的稳定性.本文利用 Lyapunov 方程,应用 Lyapunov 函数法,研究了广义离散大系统和广义离散非线性大系统的稳定性与孤立子系统稳定性的关系,通过孤立子系统稳定性来判断广义大系统的稳定性,并给出其关联参数域.

记 $\lambda_{\max}(H)$, $\lambda_{\min}(H)$ 分别为矩阵 H 的最大特征值和最小特征值.

2 离散广义系统的稳定性(Stability of singular discrete systems)

对于广义离散系统

$$Ex(k+1) = Ax(k), \tag{1}$$

其中: $x(k)$ 为 n 维状态向量, E, A 为 $n \times n$ 阶常系数矩阵, $\operatorname{rank} E = r < n$.假定系统正则(即存在 s_0

收稿日期:2002 - 10 - 16; 收修改稿日期:2003 - 05 - 29.
基金项目:国家自然科学基金项目(60074007);教育部资助优秀青年教师基金项目;高等学校骨干教师资助计划项目.

使得 $\det(s_0E-A)\neq 0$) 且具有因果关系. 如果 V 为 $n\times n$ 阶半正定矩阵, W 为 $n\times n$ 阶对称矩阵,则称

$$A^{\mathrm T}VA-E^{\mathrm T}VE=-E^{\mathrm T}WE \tag{2}$$

为广义离散系统的 Lyapunov 方程.

定义 系统(1)是渐近稳定的,如果对于系统(1)的任一解 $x(k)$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty}x(k)=0$. 容易知道如下结果:

定理 1 广义离散系统正则且具有因果关系,则它渐近稳定的充要条件是任意给定的 r 阶正定矩阵 $W_1>0$, 必存在形如 $W=P^{\mathrm T}\begin{pmatrix}W_1&0\\0&I_2\end{pmatrix}P$ 正定矩阵和 $V=P^{\mathrm T}\begin{pmatrix}V_1&0\\0&0\end{pmatrix}P$ 半正定矩阵,满足式(2). 这里 P 为 n 阶可逆矩阵, V_1 为 r 阶正定矩阵, I_2 为 $n-r$ 阶单位矩阵.

定理 2 广义离散系统(1)正则且具有因果关系,它至少有一特征值在单位圆外(即系统不稳定的),则任意给定的 r 阶正定矩阵 $W_1>0$, 必存在形如 $W=P^{\mathrm T}\begin{pmatrix}W_1&0\\0&I_2\end{pmatrix}P$ 正定矩阵和 $V=P^{\mathrm T}\begin{pmatrix}V_1&0\\0&0\end{pmatrix}P$ 半正定矩阵,满足

$$A^{\mathrm T}VA-E^{\mathrm T}VE=E^{\mathrm T}WE. \tag{3}$$

这里 P 为 n 阶可逆矩阵, V_1 为 r 阶正定矩阵, I_2 为 $n-r$ 阶单位矩阵.

3 离散线性广义大系统的稳定性(Stability of singular discrete large-scale systems)

考虑离散线性广义大系统

$$E_ix_i(k+1)=A_{ii}x_i(k)+\sum_{j=1,j\neq i}^{m}A_{ij}x_j(k)\ (i=1,2,\cdots,m). \tag{4}$$

其中: E_i 为 $n_i\times n_i$ 常系数矩阵, $\sum\limits_{i=1}^{m}n_i=n$, $\operatorname{rank}E_i=r_i\leqslant n_i$, $\sum\limits_{i=1}^{m}r_i=r$, $x_i(k)\in\mathbb R^{n_i}$, $A_{ij}=(a_{ks})$ 为 $n_i\times n_j$ 常系数矩阵 $(i,j=1,2,\cdots,m)$, $x(k)=(x_1(k)^{\mathrm T},\cdots,x_m(k)^{\mathrm T})^{\mathrm T}$.

系统(4)按主对角线的孤立子系统为

$$E_ix_i(k+1)=A_{ii}x_i(k)\ (i=1,2,\cdots,m). \tag{5}$$

引理 1 对 $\forall u,v\in\mathbb R^n$, 半正定矩阵 $V\geqslant 0$, $\forall\varepsilon>0$ 有

$$2u^{\mathrm T}Vv\leqslant \varepsilon u^{\mathrm T}Vu+\frac{1}{\varepsilon}v^{\mathrm T}Vv.$$

定理 3 如果系统(4)满足如下条件:

a) 它对应的孤立子系统(5)都正则,具有因果关系且渐近稳定.

b) $\|A_{ij}x_j\|\leqslant\delta\|E_jx_j\|\ (i,j=1,2,\cdots,m,\ i\neq j)$.

则存在正数 $\Delta_1>0$, 当 $\delta<\Delta_1$ 时,有系统(4)渐近稳定(Δ_1 由式(8)决定).

证 由条件 a)及定理 1 知:对 $W_{1i}=I_{1i}$ 为 r_i 阶单位矩阵,存在正定矩阵 W_i, 半正定矩阵 V_i, 使得有

$$A_{ii}^{\mathrm T}V_iA_{ii}-E_i^{\mathrm T}V_iE_i=-E_i^{\mathrm T}W_iE_i. \tag{6}$$

记

$$\begin{aligned}\alpha_i&=\frac{\lambda_{\max}(V_i-W_i)}{\lambda_{\min}(W_i)},\\ \bar\alpha&=\max\{\alpha_i:i=1,2,\cdots,m\},\\ \bar\lambda&=\max\{\lambda_{\max}(V_i):i=1,2,\cdots,m\},\\ \underline{\lambda}&=\min\{\lambda_{\min}(W_i):i=1,2,\cdots,m\}.\end{aligned} \tag{7}$$

显然 $\alpha_i\geqslant 0$, 不妨设 $\alpha_i>0$, 取 $\varepsilon_i=\dfrac{1}{2(m-1)\alpha_i}$(对 $\alpha_i=0$ 时,取 $\varepsilon_i=1$ 可进行以下类似证明).

取

$$v[Ex(k)]=\sum_{i=1}^{m}v_i[E_ix_i(k)]=\sum_{i=1}^{m}[E_ix_i(k)]^{\mathrm T}V_i[E_ix_i(x)]$$

为系统(4)的 Lyapunov 函数,由引理 1,则它沿系统(4)的增量为

$$\Delta v\mid_{(4)}=v[Ex(k+1)]-v[Ex(k)]=\sum_{i=1}^{m}\Delta v_i\mid_{(4)}.$$

而

$$\begin{aligned}&\Delta v_i\mid_{(4)}=\\ &\{[E_ix_i(k+1)]^{\mathrm T}V_i[E_ix_i(k+1)]-[E_ix_i(k)]^{\mathrm T}V_i[E_ix_i(k)]\}\mid_{(4)}=\\ &(A_{ii}x_i+\sum_{j=1,j\neq i}^{m}A_{ij}x_j)^{\mathrm T}V_i(A_{ii}x_i+\sum_{j=1,j\neq i}^{m}A_{ij}x_j)-(E_ix_i)^{\mathrm T}V_i(E_ix_i)\leqslant\\ &-(E_ix_i)^{\mathrm T}W_i(E_ix_i)+\sum_{j=1,j\neq i}^{m}[\varepsilon_i(A_{ii}x_i)^{\mathrm T}V_i(A_{ii}x_i)+\frac{1}{\varepsilon_i}(A_{ij}x_j)^{\mathrm T}V_i(A_{ij}x_j)]+\\ &\lambda_{\max}(V_i)\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\ \sum_{s=1,s\neq i}^{m}\|A_{is}x_s\|\,\|A_{ij}x_j\|\leqslant\\ &-\frac{1}{2}\lambda_{\min}(W_i)(E_ix_i)^{\mathrm T}(E_ix_i)+\end{aligned}$$

$$2(m-1)\alpha_i\lambda_{\max}(V_i)\delta^2\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\|E_jx_j\|^2+$$

$$\lambda_{\max}(V_i)\delta^2\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\|E_jx_j\|\Big)^2,$$

有

$$\Delta v\mid_{(4)}=\sum_{i=1}^{m}\Delta v\mid_{(4)}\leqslant$$

$$-\Big\{\frac{1}{2}\underline{\lambda}-(2\bar{\alpha}+1)(m-1)^2\bar{\lambda}\delta^2\Big\}\sum_{i=1}^{m}\|E_ix_i\|^2.$$

取

$$\Delta_1=\sqrt{\frac{\underline{\lambda}}{2(2\bar{\alpha}+1)(m-1)^2\bar{\lambda}}}>0.\tag{8}$$

当 $\delta<\Delta_1$ 时,$\Delta v\mid_{(4)}\leqslant 0$,所以 $\lim\limits_{k\to+\infty}E_ix_i=0$.

由孤立子系统(5)正则,具有因果关系,则存在相应维数的常系数可逆矩阵 P_i,Q_i,使得

$$P_iE_iQ_i=\begin{pmatrix}I_{ii}^{(1)}&0\\0&0\end{pmatrix},\ P_iA_{ii}Q_i=\begin{pmatrix}A_{ii}^{(1)}&0\\0&I_{ii}^{(2)}\end{pmatrix}.$$

并记

$$P_iA_{ij}Q_j=\begin{pmatrix}A_{ij}^{(1)}&A_{ij}^{(12)}\\A_{ij}^{(21)}&A_{ij}^{(2)}\end{pmatrix}.$$

其中:$I_{ii}^{(1)},I_{ii}^{(2)}$ 分别为 r_i 阶和 n_i-r_i 阶单位矩阵;$A_{ii}^{(1)},A_{ij}^{(1)},A_{ij}^{(12)},A_{ij}^{(21)},A_{ij}^{(2)}$ 为相应维数的常系数矩阵.

作变换

$$y_i(k)=\begin{pmatrix}y_i^{(1)}(k)\\y_i^{(2)}(k)\end{pmatrix}=Q_i^{-1}x_i(k),$$

则系统(4)等价于系统

$$\begin{cases}y_i^{(1)}(k+1)=\\A_{ii}^{(1)}y_i^{(1)}(k)+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{m}[A_{ij}^{(1)}y_j^{(1)}(k)+A_{ij}^{(12)}y_j^{(2)}(k)],\\0=y_i^{(2)}(k)+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{m}[A_{ij}^{(21)}y_j^{(1)}(k)+A_{ij}^{(2)}y_j^{(2)}(k)].\end{cases}\tag{9}$$

$i=1,2,\cdots,m$,由 $\lim\limits_{k\to+\infty}E_ix_i(k)=0$ 有 $\lim\limits_{k\to+\infty}y_i^{(1)}(k)=0$.

由条件 b)知道

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{j=1,j\neq i}^{m}[A_{ij}^{(21)}y_j^{(1)}(k)+A_{ij}^{(2)}y_j^{(2)}(k)]=0.$$

从而 $\lim\limits_{k\to+\infty}y_i^{(2)}(k)=0$,就有 $\lim\limits_{k\to+\infty}y_i(k)=0$,从而 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_i(k)=0$ 即系统(4)渐近稳定.

类似地可以证明:

定理 4 如果线性广义离散大系统(4)满足以下条件:

a) 它对应的孤立子系统(5)都正则,具有因果关系且它至少有一特征值在单位圆外(即系统不稳定的).

b) $\|A_{ij}x_j\|\leqslant\delta\|E_jx_j\|(i=j=1,2,\cdots,m,\ i\neq j)$.

则存在 $\Delta_2>0$,使得当 $\delta<\Delta_2$ 时,广义离散大系统(1)也是不稳定的.

4 非线性广义离散大系统的稳定性(Stability of singular non-linear discrete large-scale systems)

对于非线性广义离散大系统

$$E_ix_i(k+1)=$$

$$A_{ii}x_i(k)+\sum_{j=1,j\neq i}^{m}A_{ij}x_j(k)+$$

$$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)(i=1,2,\cdots,m),\tag{10}$$

其对应的孤立子系统为系统(5).

定理 5 如果系统(10)满足如下条件:

a) 它对应的孤立子系统(5)都正则,具有因果关系且渐近稳定;

b) $\|A_{ij}x_j\|\leqslant\delta\|E_jx_j\|(i,j=1,2,\cdots,m;i\neq j)$;

c) $\|f_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)\|\leqslant\eta\sum\limits_{i=1}^{m}\|E_ix_i\|(i=1,2,\cdots,m)$.

则存在正数 $\Delta_3>0,\Delta_4>0$,当 $\delta<\Delta_3,\eta<\Delta_4$ 时,有系统(10)渐近稳定(Δ_3,Δ_4 由式(11)决定).

证 由条件 a)及定理1知:对 $W_{1i}=I_{1i}$ 为 r_i 阶单位矩阵,存在正定矩阵 W_i,半正定矩阵 V_i,使得有式(6)成立.显然 $\alpha_i\geqslant 0$,不妨设 $\alpha_i>0$,取 $\bar{\varepsilon}_i=\frac{1}{2m\alpha_i}$(对 $\alpha_i=0$ 时,取 $\bar{\varepsilon}_i=1$ 可进行以下类似证明,$\alpha_i,\bar{\alpha},\bar{\lambda},\underline{\lambda}$ 同式(7)).

取

$$v[Ex(k)]=\sum_{i=1}^{m}v_i[E_ix_i(k)]=$$

$$\sum_{i=1}^{m}[E_ix_i(k)]^{\mathrm T}V_i[E_ix_i(k)]$$

为系统(10)的 Lyapunov 函数,类似于定理3的证明,有它沿系统(10)的增量为

$$\Delta v\mid_{(10)}\leqslant-\Big\{\Big[\frac{1}{4}\underline{\lambda}-m(m-1)(2\bar{\alpha}+1)\bar{\lambda}\delta^2\Big]+$$

$$\Big[\frac{1}{4}\underline{\lambda}-m^3(2\bar{\alpha}+1)\eta^2\bar{\lambda}\Big\}\sum_{i=1}^{m}\|E_ix_i\|^2.$$

取

$$\Delta_3 = \sqrt{\frac{\underline{\lambda}}{4m(m-1)(2\bar{\alpha}+1)\bar{\lambda}}} > 0,$$
$$\Delta_4 = \sqrt{\frac{\underline{\lambda}}{4m^3(2\bar{\alpha}+1)\bar{\lambda}}} > 0. \tag{11}$$

当 $\delta < \Delta_3, \eta < \Delta_4$ 时, $\Delta v\ |_{(10)} \leqslant 0$, 所以 $\lim\limits_{k\to+\infty} E_i x_i(k) = 0$, 类似于定理3的证明可得 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_i(k) = 0$ 即系统(10)渐近稳定.

5 结束语(Conclusions)

广义大系统的稳定性是一个非常重要的问题,由于广义大系统的复杂性,对其稳定性的研究也是一件相当困难的事情.本文利用Lyapunov方程,应用Lyapunov函数法,研究了广义离散大系统和广义离散非线性大系统,得到了一些它们渐近稳定和不稳定的充分条件,同时给出了其参数域.由定理3知,孤立广义离散子系统的渐近稳定,在一定条件下得到了广义离散大系统的渐近稳定;由定理4知,孤立广义离散子系统的不稳定,在一定条件下得到了广义离散大系统的不稳定.至于它们之间的更紧密的关系,有待于进一步研究.

参考文献(References):

[1] MICHEL A N, MILLER R K. *Qualitative Analysis of Large-Scale Dynamical Systems* [M]. New York: Academic Press, 1977.

[2] SILJAK D D. *Large-Scale Dynamical Systems: Stability and Structure* [M]. New York: North-Holland, 1978.

[3] JAMSHIDI M. *Large-Scale Dynamical Systems: Modeling and Control* [M]. New York: North-Holland, 1983.

[4] ROSENBROCK H H. Structural properties of linear dynamical systems [J]. *Int J Control*, 1974,20(2):191-202.

[5] 张庆灵,戴冠中.有穷固定模的确定与消除[J].控制理论与应用,1997,14(3):407-410.
(ZHANG Qingling, DAI Guanzhong. Determination and elimination of finite fixed modes [J]. *Control Theory & Applications*, 1997, 14(3):407-410.)

[6] 王朝珠,王恩平.广义分散控制系统的无穷远固定模[J].系统科学与数学,1988,8(2):142-150.
(WANG Chaozhu, WANG Enping. Infinite fixed modes of descriptor decentralized control systems [J]. *J of Systems Science and Mathmatical Sciences*, 1988,8(2):142-150.)

[7] 张庆灵,胡仰曾.广义分散控制系统的结构脉冲固定模[J].系统科学与数学,1993.13(2):97-101.
(ZHANG Qingling, HU Yangzeng. Structure impulse fixed modes of descriptor decentralized control systems [J]. *J of Systems Science and Mathmatical Sciences*, 1993,13(2): 97-101).

[8] COMPBELL S L. *Singular Systems of Differential Equation* [M]. Progran, Sanfancisco: Pitman, Advanced Publishing, 1982.

[9] 陈潮填,刘永清.线性广义大系统的稳定性及其关联参数域[J].华南理工大学学报(自然科学版),1996,24(5):51-56.
(CHEN Chaotian, LIU Yongqing. Stability of large-scale linear singular dynamical systems and its interconnecting parameters regions [J]. *J of South China University of Technoloty (Natural Science)*, 1996, 24(5):51-56.)

作者简介:

沃松林 (1964—),男.1985年7月和1988年7月于四川大学数学系获理学学士和硕士学位;现为南京理工大学自动化系控制理论与控制工程学科博士研究生.E-mail: wosonglin2000@yahoo.com.cn;

邹 云 (1962—),男.1983年8月于西北大学数学系计算数学专业获理学学士学位;1987年3月和1990年6月于南京理工大学动力工程学院分别获控制理论与控制工程学科工学硕士和工学博士学位;1990年7月先后于南京理工大学动力工程学院和自动化系任教至今;1992年晋升副教授;1994年晋升教授;1998年获博士生指导教师资格;1990年至今:美国《数学评论》评论员、美国国家数学学会(AMS)会员.近期研究兴趣主要为:奇异系统理论、应急控制与评估理论与应用以及电力系统自动化等.E-mail: zouyun@jlonline.com.

(上接第290页)

[5] DONG Miaobo, WU Tiejun. Componentialization of learning system and its object-oriented programming implementation [C]// *Proc of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation*. [s.l.]: [s.n.],2002.

作者简介:

董苗波 (1976—),男.2002年于浙江大学控制系获得博士学位,现在清华大学深圳研究生院从事博士后研究工作.研究方向为学习控制,智能控制,人机协作,无人机控制等.E-mail: mbdong@sina.com;

孙增圻 (1943—),男,清华大学计算机系教授,博士生导师.1966年毕业于清华大学自动控制系,1981年在瑞典获得博士学位.主要从事智能控制,机器人,神经网络及模糊系统等方面的研究.