

混沌系统不稳定周期轨道的搜索算法

岳毅宏, 韩文秀

(天津大学 管理学院, 天津 300072)

摘要: 对混沌系统不稳定周期轨道(unstable periodic orbits, UPO's)的搜索算法进行了深入研究. 首先分析了传统的 Newton-Raphson 算法(NR 算法)及 Schmelcher-Diakonos 算法(SD 算法)各自的优点和缺点. 然后提出了一种新的 UPO's 搜索算法, 称之为 NR-SD 算法. 该方法集中了 NR 算法和 SD 算法各自的优点, 能够在保证收敛全局性的条件下, 极大地提高 UPO's 的搜索效率. 此外, NR-SD 算法采用了一种全新的初始点确定策略, 该策略能够保证搜索到所有的长周期 UPO's. 最后借助于实例模拟验证了 NR-SD 算法的有效性, 同时论证了周期 p 与 p 周期 UPO's 数目之间的关系.

关键词: 不稳定周期轨道(UPO's); UPO's 搜索算法; Newton-Raphson 算法(NR 算法); Schmelcher-Diakonos(SD 算法); NR-SD 算法

中图分类号: TP1 文献标识码: A

Algorithms for searching unstable periodic orbits of chaotic systems

YUE Yi-hong, HAN Wen-xiu

(School of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: The algorithms for searching unstable periodic orbits (UPO's) of chaotic systems are studied. Firstly, the advantages and disadvantages of the conventional Newton-Raphson algorithm (NR algorithm) and Schmelcher-Diakonos algorithm (SD algorithm) were respectively analyzed. Then, a new searching algorithm called NR-SD algorithm was proposed collecting advantages of both NR and SD algorithms: the global convergence guaranteed, the NR-SD algorithm greatly improves the searching efficiency. Moreover, in the NR-SD algorithm a new strategy of determining initial points was used so that all long-periodic UPO's could be found. Finally, the effectiveness of the NR-SD algorithm was verified by numerical simulation of an example. The relation between the period p and the number of p -periodic UPO's was established as well.

Key words: unstable periodic orbits (UPO's); UPO's searching algorithm; Newton-Raphson algorithm (NR algorithm); Schmelcher-Diakonos algorithm (SD algorithm); NR-SD algorithm

1 引言(Introduction)

研究表明,混沌系统表面上貌似随机运动,其实内部存在着严密的规律性.在混沌吸引子内部镶嵌着无数的周期轨道,只不过这些轨道是不稳定的,因此称之为“不稳定周期轨道”(UPO's).UPO's 构成了混沌系统的基础框架^[1~5],混沌系统的许多动态变量,比如,拓扑熵、Lyapunov 指数谱、分形维数等,都可以通过无数的 UPO's 来表达^[1~3,6].在混沌系统的控制中,为了以较小的代价实现系统的稳定,往往需要把系统的运动控制到一条 UPO 上,其方法是:首先找到一条能够实现系统控制目标的 UPO,然后使之稳定.这种方法得益于无数 UPO's 的性能

多样化,作者几乎总能找到一条满足控制需求的目标 UPO.因此,在对混沌系统实施控制之前,需要找到目标 UPO,这就涉及到 UPO's 的搜索问题.传统的 UPO's 搜索算法有 Newton-Raphson 算法(NR 算法)^[7~9]、Schmelcher-Diakonos 算法(SD 算法)^[10~13],但它们各自都存在一些缺陷.基于此,本文在对 NR 算法及 SD 算法进行深入分析的基础上,提出了一种新的 UPO's 搜索算法,称之为 NR-SD 算法.该算法结合了两种传统算法的优点,克服了它们各自的缺点,在保证 UPO's 搜索全局性的条件下极大地提高了搜索效率.此外,本文在对新算法进行理论分析的基础上,利用实例模拟验证了算法的有效性.

2 NR及SD算法(NR and SD algorithms)

2.1 NR算法^[7-9](NR algorithm)

NR算法又称Newton-Raphson算法.该算法基于迭代思想,通过选用恰当的初始点和迭代规则,反复迭代而最终趋于不稳定周期轨道点.

考虑 N 维充分混沌系统

$$X_{t+1} = f(X_t, a). \quad (1)$$

其中, a 为系统参数.系统(1)的 p 周期轨道点就是下列函数的零解:

$$g(X, a) = f^{(p)}(X, a) - X. \quad (2)$$

式(2)中, $f^{(p)}(X, a)$ 为 $f(X, a)$ 的 p 次迭代.寻找 X 使得 $g(X, a) = 0$ 的过程为:首先选定初值 X_0 ,然后按下式迭代:

$$X_{\text{new}} = X_{\text{old}} + \delta X. \quad (3)$$

对于式(3)中的 δX ,由下列方程决定:

$$-J(X)\delta X = g(X, a). \quad (4)$$

式(4)中, $J(X)$ 为 $g(X, a)$ 的雅可比矩阵, $J(X) = \partial g / \partial X$.

试验表明:只要初始点位于解的线性临域内, NR算法具有非常好的收敛性.当周期 p 很小时,较容易得到合适的初始点 X_0 ;当 p 较大时, NR算法变得很不实用,这是因为随着 p 的增大, X_0 选择盆的容积呈指数减小.而且,对于超过二维的映射,这种算法的计算量非常大,因此,很不实用.下面介绍一种更可靠、准确和实用的算法,称之为Schmelcher-Diakonos(SD)算法.

2.2 SD算法^[10-13](SD algorithm)

SD算法是由学者P. Schmelcher和F. K. Diakonon于1998年共同创立的.其基本思想是:通过线性转换将原始系统的不稳定周期轨道(UPO's)转换为稳定周期轨道(stable periodic orbits, SPO's),同时保持其在坐标空间中的位置不变性,而转换系统中的SPO's可以通过简单的迭代运算加以确定,这样就找到了原始系统的UPO's.下文中以搜索固定点(fixed points, FP's)为特例来介绍SD算法,如果要寻找周期 p 轨道点,只需将所有的 $f(\cdot)$ 替代为 $f^{(p)}(\cdot)$ 即可.

对于 N 维离散的混沌系统

$$U: X_{t+1} = f(X_t, a), \quad (5)$$

其中: a 为系统参数; U 是充分混沌的,并且只拥有不稳定固定点(FP's),本文的目标是依据映射(5)构建不同的动态系统 $\{S_k | k = 1, 2, \dots, M\}$,使得原来系统中的不稳定周期轨道点转换成新系统中的稳定

周期轨道点,而这些点在坐标系中的位置保持不变.为了达到这个目标, S_k 采取以下形式:

$$S_k: X_{t+1} = X_t + \Delta_k [f(X_t, a) - X_t]. \quad (6)$$

式(6)中, Δ_k 是一个可逆的 $N \times N$ 常数矩阵.由式(6)可得:假如 $X_t = X_F$ 为 U 的一个FP,则有

$$f(X_t, a) - X_t = 0. \quad (7)$$

由式(6)、(7)可知: X_F 也是 S_k 的一个FP.另一方面,如果 X_F 是 S_k 的一个FP,由于 Δ_k 是非奇异的,所以式(7)一定成立,则 X_F 也是 U 的一个FP.因此,式(6)所定义的 S_k 能够很好的实现SD算法思想.

为了稳定转换后系统 S_k 的FP,必须选择合适的 Δ_k ,实践证明,稳定所有FP's所需要的矩阵 Δ_k 的数量很少.而且,如果 Δ_k 所有元素的绝对值都足够小,就存在一个矩阵的通用集,使得其中至少有一个矩阵 Δ_k 能够满足转换需求.为了决定这个通用集,考虑下式:

$$M_k: T_{S_k} = 1 + \Delta_k(T_U - 1). \quad (8)$$

其中: T_U, T_{S_k} 分别为 U 和 S_k 的稳定矩阵,假设 T_U 为可逆、可对角化的实矩阵.因为 X_F 是一个不稳定的FP,所以 X_F 点处 T_U 至少有一个特征值的绝对值大于1.为了稳定 X_F ,采取两个步骤:

1) 令 $(\Delta_k)_{ij} = \lambda(C_k)_{ij}$,其中 $1 > \lambda > 0$, $(C_k)_{ij} = O(1)$.选择合适的 C_k ,使得矩阵 $C_k(T_U - 1)$ 的所有特征值的实部为负;

2) 基于步骤1),选择足够小的参数 λ ,使得矩阵的 $T_{S_k} = 1 + \lambda C_k(T_U - 1)$ 所有特征值的绝对值都小于1.

通过以上两个步骤, U 的不稳定FP变为 S_k 中稳定的FP.为了使SD算法更具实用性,因此,必须寻找一个更小的 $\{C_k\}$ 的集合.在实践中,取 $(C_k)_{ij} = 0/+1/1$,而且 C_k 的每行与每列只能有一个元素异于0,因此 C_k 是正交的.在 N 维空间中, C_k 的个数 $a_N = N!2^N$.

基于以上理论探讨,现在详细介绍 N 维系统中SD算法的应用.搜索步骤如下:

1) 在给定系统的状态空间中选择一系列初始点 $X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, \dots, X_0^{(n)}$,使得它们能够粗略地覆盖整个状态空间.

2) 选择 C_1 和充分小的参数值 λ ,依次以 $X_0^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)为初始点进行迭代.每次可能出现的迭代结果为:i) 迭代轨道渐近收敛于一个稳定的FP: X_F ; ii) 迭代轨道随时间继续在混沌吸引子中演化; iii) 迭代轨道趋于无限.

3) 以 C_2 替代 C_1 , 重复以上过程, 直到整个 $\{C_k\}$ 集中所有的 C_i 都被用到为止.

需要指出的是: 随着待搜索的 UPO's 周期 p 的增大, λ 值要不断减小, 这样才能保证搜索到所有 FP's.

3 NR-SD 算法(NR-SD algorithm)

SD 算法的一个重要优点在于它的收敛全局性. 即使当迭代初值 X_0 位于远离稳定固定点(FP's)的线性临域时, 在经过若干次迭代后, 就会被吸引到某个 FP 上. 但 SD 算法也存在着明显的缺点: 1) 相对于 NR 算法, 它的收敛速度很慢, 因此需要很多步迭代才能在一定精度允许的范围内到达 FP's; 2) 虽然 SD 算法具有全局收敛的特性, 但对于某些 UPO's, 其吸引盆以一种复杂的方式交织在一起, 所以要决定究竟那些初始点能够最终收敛到一个特定的 UPO 变的非常困难. 因此, SD 算法很难保证搜索到指定周期的所有 UPO's.

为了克服 SD 算法收敛慢的缺点, 而同时保留其全局收敛性的优点. 本文设计一种新的 UPO's 搜索算法, 可以理解为是 NR 算法和 SD 算法的结合, 不妨称之为 NR-SD 算法. 该算法基于的思想是: 通过构造适当的迭代规则, 将传统的 NR 算法与 SD 算法各自的优点加以综合.

考虑式(6), 将 $f(X_t, a)$ 替代为 $f^{(p)}(X_t, a)$, 由 $\Delta_k = \lambda C_k$ 可得

$$X_{t+1} - X_t = \lambda C_k [f^{(p)}(X_t, a) - X_t]. \quad (9)$$

根据式(2)得到

$$\delta X = \lambda C_k g(X, a). \quad (10)$$

由式(3)及式(10)规定的迭代法则是 SD 算法的一种变形. 根据式(4)及式(10), 构造下式:

$$[I\beta \|g(X, a)\| - C_k J(X)]\delta X = C_k g(X, a). \quad (11)$$

式(11)中: I 为单位矩阵, $\beta > 0$ 为可调参数, $g(X, a)$ 见式(2), $J(X)$ 为 $g(X, a)$ 的雅可比矩阵. 由式(11)所规定的步长规则的优点在于: 1) 当迭代点位于某个目标 UPO 的附近时, $\|g(X, a)\|$ 趋于 0, 式(11)近似变为式(4), 这时的搜索近似为 NR 搜索, 因此保留了 NR 算法的收敛速度快的优点; 2) 另一方面, 当迭代点远离目标 UPO 时, 取一个非常大的值 β , 则式(11)近似变为式(9), 此时的搜索近似为 SD 搜索, 因此几乎保留了 SD 算法全局性收敛的优点. 这样, 新的搜索算法保留了 NR 算法和 SD 算法各自的优点, 而同时克服了它们的缺点, 是一种较为理想的搜索算法.

在 NR-SD 算法中, 对于初始点的选择, 采用一种新的策略: 用其他周期的轨道点作为初始点集来搜索所有的周期为 p 的 UPO's. 这是因为周期轨道点以一种系统的方式周密地覆盖了整个吸引子. 数字模拟表明这种方法效率很高, 对类似于 Henon 映射^[14]和 Ikeda-Hammel-Jones-Moloney 映射^[15]所表示的低维系统的模拟表明: 只要系统存在周期为 $p-1$ 的 UPO's, 就可以用这些周期 $p-1$ 轨道点作为初始点搜索到所有的周期为 p 的 UPO's. 在一些高维映射所表示的复杂系统中, 应用这种简单策略也可以找到绝大部分 UPO's, 其中包括高周期轨道. 这是因为周期 p 轨道的搜索结果取决于周期 $p-1$ 轨道的搜索情况, 因此, 只要低周期轨道能够搜索完全(或近似完全), 就可以保证搜索到绝大部分高周期轨道. 无论在高维还是低维系统中, 都可以这样进行: 首先用不完全的 p 周期 UPO's 集找到 $p+1$ 周期 UPO's; 然后再用这些 $p+1$ 周期 UPO's 搜索尚未找到的 p 周期 UPO's, 这样反复进行, 直至搜索到的 p 周期及 $p+1$ 周期 UPO's 数目不再变化为止. 这种方法的主要优点在于: 1) 一旦能够找到低周期的 UPO's, 就可以以一种简单的方式来搜索高周期 UPO's; 2) 在一般的高维系统中, 这种方法使作者有足够的把握找到所有的长周期 UPO's.

4 实例模拟(Example simulation)

考虑二维的离散映射^[10]

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + 0.9(x_n \cos \phi_n - y_n \sin \phi_n), \\ y_{n+1} = 0.9(x_n \sin \phi_n + y_n \cos \phi_n). \end{cases} \quad (12)$$

式(12)中, $\phi_n = 0.4 - \frac{6}{1 + x_n^2 + y_n^2}$.

式(12)所表示系统的运动为混沌的, 因此, 其中包含有无数的 UPO's: 为了搜索这些 UPO's, 可以采取以下方法: 选择少数几个初始点就可以很快地找到 1 周期和 2 周期 UPO's. 从 $p=3$ 开始, 只选用 $p-1$ 周期轨道点作为搜索 p 周期 UPO's 的初始点集. 式(11)中的 $C_k \in \{C_k | k=1, \dots, 5\}$ (参看 2.2 部分). 初始点集和 C_k 选定以后, 按照式(11)所定义的规则进行迭代, 其迭代序列可能有 3 种趋势: 1) 收敛于目标轨道点; 2) 逃匿到混沌吸引子之外; 3) 虽然迭代次数巨大, 但迭代序列既不渐近收敛于目标轨道点, 又不逃匿到混沌吸引子之外. 当情况 1)、2) 出现时, 立即停止迭代. 而且可以发现, 平均迭代次数的增长与参数 β 值的增大呈现线性关系. 这是因为当 β 值很大并且迭代点远离目标轨道点时, $\|\delta X\| \approx 1/\beta$, 迭代步长与 β 值呈现线性反向变化.

当情况3)出现时,为了限制这种无结果迭代的次数,设定迭代的最大次数为 β 值的4~6倍,这样数目的迭代次数足以使我们能够对迭代结果作出合理的判断.一旦迭代序列收敛到一个轨道点,接下来的工作就是判断该点是否属于一个尚未搜索到的UPO,如果是,可以该点为初始点通过映射式(11)的迭代找到该UPO上剩余的轨道点.最后通过一系列NR迭代对这些解进行优化(取式(11)中的 $\beta = 0$ 即可).

对搜索到的UPO's数目与 β 值之间变化关系的研究表明,对每一个特定周期 p ,都存在固定值 $\beta_{\min}(p)$,当 $\beta \geq \beta_{\min}(p)$ 时,搜索到UPO's始终保持不变.也就是说,找到了该周期UPO's数目的最大值.这个特点能够保证找到某个周期全部的UPO's.由于 $\beta_{\min}(p)$ 与 e^{ap} (其中 a 为正常数)成正比,因此能够大致估计需要多大的 β 值就可以搜索到某一周期所有的UPO's.基于以上方法,取周期 $p =$

1~22,借助于计算机对系统(12)的UPO's进行搜索,得到表1所示的结果.

观察表1可以发现, $p \times n(p) \leq N(p)$,而在正常情况下应该有 $p \times n(p) = N(p)$.产生这种现象的原因在于 $N(p)$ 包括所有轨道周期为 p 的因子的轨道周期点,即

$$N(p) = \sum_{i=1}^k p_i \cdot n(p_i). \quad (13)$$

式(13)中, $p_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 为 p 的因子.例如,当 $p = 8$ 时, $N(8) = n(1) + 2 \cdot n(2) + 4 \cdot n(4) + 8 \cdot n(8)$.

基于表1中的计算结果,可以得到周期 p 与UPO's数目 $n(p)$ 之间的关系如图1所示.由图1可以看出,随着周期 p 的增大,周期为 p 的UPO's呈现指数增长的趋势.而混沌系统的运动周期趋于无限大,因此,在混沌系统中必然存在着无穷多条UPO's.

表1 基于NR-SD算法的UPO's搜索结果表

Table 1 UPO's searching results based on NR-SD algorithm

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n(p)$	1	1	2	3	4	7	10	14	26	45	76
$N(p)$	1	3	7	15	21	51	71	127	241	473	837
p	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$n(p)$	110	194	317	566	950	1646	2799	4884	8404	14700	25550
$N(p)$	1383	2523	4511	8517	15327	27983	50667	92797	168575	308777	562939

注: $n(p)$ 表示周期为 p 时不同的UPO's数目; $N(p)$ 表示 p 周期轨道点总数(其中包括所有轨道周期为 p 的因子的轨道周期点).

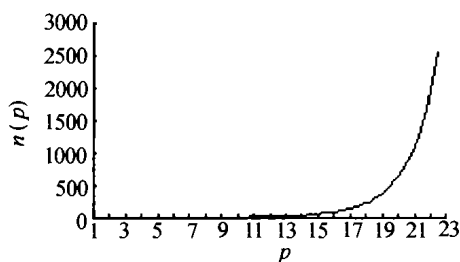


图1 $n(p)$ 随周期 p 的变化趋势

Fig. 1 Changing trend of $n(p)$ with period p

5 结束语(Conclusion)

为了能够将混沌系统控制到某个UPO上,就必须首先搜索到符合系统控制目标的UPO,因此,搜索算法显得尤为重要.基于此,本文对混沌系统UPO's搜索算法进行了较为系统、深入的研究,提出了一种称之为NR-SD的新算法,该算法在保留SD算法收敛全局性优点的前提下极大地提高了搜索效率,是一种较为理想的UPO's搜索算法.有关混沌系统UPO's搜索算法研究的深入展开,必将对混沌

系统的控制及基于UPO's的混沌系统特征变量的表达产生深远影响.

参考文献(References):

- [1] AUERBACH D, CVITANOVIC P, ECKMANN J P, et al. Exploring chaotic motion through periodic orbits [J]. *Physical Review Letters*, 1987, 58(6): 2387 - 2389.
- [2] CVITANOVIC P. Invariant measurement of strange sets in terms of cycles [J]. *Physical Review Letters*, 1988, 61(12): 2729 - 2732.
- [3] GREBOGI C, OTT E, YORKE J A. Unstable periodic orbits and the dimensions of multifractal chaotic attractors [J]. *Physical Review A*, 1988, 37(3): 1711 - 1724.
- [4] OTT E, SAUER T, YORKE J A. Lyapunov partition functions for the dimensions of chaotic sets [J]. *Physical Review A*, 1989, 39(4): 4212 - 4222.
- [5] LATHROP D P, KOSTELICH E J. Characterization of an experimental strange attractor by periodic orbits [J]. *Physical Review A*, 1989, 40(10): 4028 - 4031.

- [6] OTT E. *Chaos in Dynamical Systems* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1992:326 – 380.
- [7] BIHAM O, WENZEL W. Unstable periodic orbits and the symbolic dynamics of the complex Henon map [J]. *Physical Review A*, 1990, 42(10):4639 – 4646.
- [8] HANSEN K. Alternative method to find orbits in chaotic systems [J]. *Physical Review E*, 1995, 52(9):2388 – 2391.
- [9] CVITANOVIC P, GUNARATNE G H, PROCACCIA H. Topological and metric properties of Henon-type strange attractors [J]. *Physical Review A*, 1988, 38(8):1503 – 1520.
- [10] SCHMELCHER P, DIAKONOS F K. General approach to the localization of unstable periodic orbits in chaotic dynamical systems [J]. *Physical Review E*, 1998, 57(3):2739 – 2746.
- [11] SCHMELCHER P, DIAKONOS F K. Detecting unstable periodic orbits of chaotic dynamical systems [J]. *Physical Review Letters*, 1997, 78(6):4733 – 4736.
- [12] GUTZWILLER M C. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [13] TORCINI A, POLITI A, PUCCIONI G P, et al. Fractal dimension of spatially extended systems [J]. *Physica-D*, 1991, 53(10):85 – 101.
- [14] JACKSON E, KODOGEOGION A. Entrainment and migration controls of two-dimensional maps [J]. *Physica-D*, 1992, 54(1):253 – 265.
- [15] DAVIDCHACK R, LAI Ying-cheng. Characterization of transition to chaos with multiple positive Lyapunov exponents by unstable periodic orbits [J]. *Physics Letters A*, 2000, 270(6):308 – 313.

作者简介:

岳毅宏 (1975 —), 男, 在天津大学管理学院作博士后研究工作, 主要研究方向: 非线性系统理论, 混沌系统理论及其控制, E-mail: Kevin Yue@eyou.com; yh_yue@sina.com;

韩文秀 (1938 —), 女, 天津大学管理学院博士生导师, 主要研究方向: 复杂系统, 混沌系统理论及其控制, E-mail: hanwx@tju.edu.cn.

(上接第 426 页)

(ZHOU Ming, SUN Shudong. *The Application and Principle of Genetic Algorithm* [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2000: 56 – 58.)

作者简介:

刘威 (1975 —), 男, 东北大学博士研究生, 主要研究方向为冶金企业动态成本控制的理论、模型、方法研究及软件应用, E-mail: liu0wei@tom.com 或 liu0wei@21cn.com;

李小平 (1957 —), 男, 东北大学研究员, 研究方向为综合自动化系统设计与实施, E-mail: lxt_513@163.com;

毛慧欧 (1971 —), 男, 副教授, 在东北大学从事博士后研究工作, 研究方向为智能建模与智能控制及其在动态生产成本、污水处理中的应用, E-mail: maohuiou@yahoo.com;

柴天佑 (1947 —), 男, 中国工程院院士教授, 博士生导师, 主要从事自适应控制, 多变量智能解耦控制, 流程工业工程综合自动化理论、方法、技术及应用等方面的教学及科研工作, E-mail: tycai@mail.neu.edu.cn.