文章编号: 1000-8152(2004)03-0435-04

离散系统方差约束鲁棒 H_2/H_∞ 滤波的新算法

刘立恒, 邓正隆, 王广雄
(哈尔滨工业大学 控制工程系,黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 考虑带有稳态误差方差约束的线性受扰系统的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波问题.引入了广义逆矩阵,提出了一个新的算法.通过直接解两个 Riccati 方程后,获得滤波器,并且同时满足3个性能要求:滤波过程是渐近稳定的;每个状态的稳态估计误差方差不超过规定的上界;从外部噪声输入到误差状态输出的传递函数的 H_∞ 范数满足规定的上界.一个数字例子说明了这种设计方法的有效性.

关键词: 代数 Riccati 方程; H_∞ 滤波; 方差约束
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

New algorithm for robust H-two/H-infinity filtering with variance constraints for discrete-time systems

LIU Li-heng, DENG Zheng-long, WANG Guang-xiong
(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: The robust H-two/H-infinity filtering problem for linear perturbed systems with steady-state error variance constraints is considered. The generalized inverse technique of matrix is introduced, and a new algorithm is developed. After two Riccati equations are solved, the filter can be obtained, and the following three performance requirements are simultaneously satisfied: The filtering process is asymptotically stable; The steady-state variance of the estimation error of each state is not more than the individual prespecified upper bound; The transfer function from exogenous noise inputs to error state outputs meets the prespecified Hnorm upper bound constraint. An numerical example is provided to demonstrate the flexibility of the proposed design approach.

Key words: algebraic Riccati equation; H-infinity filting; variance constraint

1 引言(Introduction)

H_∞滤波的设计目标是最小化系统对最差情况有界能量的增益,并没有考虑其他情况下的滤波性能,往往达不到工程上要求的精度.由于混合 H_2/H_∞ 在设计过程中兼顾系统的 H_2 和 H_∞ 指标,得到高品质的滤波器;因此,近年来对混合 H_2/H_∞ 问题进行了大量的研究并出现了许多研究成果,参见文献[1~3].文献[4~6]利用协方差配置理论研究了时变不确定系统的方差约束鲁棒 H_2/H_∞ 滤波问题,在满足鲁棒 H_∞ 指标的前提下,不追求 H_2 指标最优,而只要求系统的协方差或方差小于指定的上界.文献[5,6]中将估计误差方差约束直接引入到 Riccati 矩阵方程中,并且通过求解两个 Riccati 方程后可以直接综合出满足方差约束鲁棒 H_2/H_∞ 滤波问题设计要求的滤波器.然而,文献[5,6]对估计误差方差约束是通过对一个 Riccati 方程正定解阵的对角元元素作约束来实现的,因而不能直接求解这个 Riccati 方程.

本文通过引入广义逆矩阵获得了一个更简单的方差约束鲁棒 H_2/H_∞ 滤波器设计方法,将估计误差协方差约束矩阵直接引入到 Riccati 矩阵方程中,并且通过直接求解两个 Riccati 方程后可以综合出满足方差约束的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波问题设计要求的滤波器.

2 问题描述(Problem description)

考虑下面的离散时间线性时变不确定系统

$$\begin{cases} x(k+1) = (A+\Delta A(k))x(k) + D_1 w(k), \\ y(k) = (C+\Delta C(k))x(k) + D_2 w(k), \\ z(k) = Lx(k). \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期:2002-07-06; 收修改稿日期:2003-06-23.
基金项目:国防科技预研基金项目(0093.4.0115);航天科技集团创新基金2000年度基金项目.

其中: $w(k)$ 为外部干扰,满足假设2; $z(k) \in \Re^{m\times 1}$ 是被估计状态; $x(k) \in \Re^{n\times 1}$, $y(k) \in \Re^{q\times 1}$; A, C, L, D_1, D_2 为相应维常阵; $\Delta A(k)$ 和 $\Delta C(k)$ 是表示系统的时变参数参数不确定,假定可容许的参数不确定为

$$\begin{bmatrix} \Delta A(k) \\ \Delta C(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} F(k)N. \tag{2}$$

式中: $F(k) \in \Re^{i\times j}$ 是一个未知时变矩阵,满足 $F(k)F^{\mathrm{T}}(k) \leqslant I$; M_1, M_2 和 N 是已知的适当维数的定常矩阵,它规定了在 $F(k)$ 中的不确定参数是如何进入标称矩阵的.

假设 1 系统矩阵 A 是 Schur 稳定和满秩的矩阵,并且矩阵 D_2 或矩阵 M_2 行满秩.

假设 2 在讨论滤波器方差性能时,设 $w(k)$ 是零均值单位方差白噪声序列;在讨论 H_∞ 指标时,设 $w(k) \in l_2[0,\infty)$,即 $w(k)$ 是能量有界的噪声信号.

设线性滤波器为

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = G\hat{x}(k) + Ky(k), \\ \hat{z}(k) = L\hat{x}(k). \end{cases} \tag{3}$$

式中: $\hat{x}(k)$ 表示状态估计, G 和 K 是要确定的滤波器参数.

稳态估计误差协方差阵为

$$P = \lim_{k\to\infty} \mathrm{E}[e(k)e^{\mathrm{T}}(k)].$$

式中 $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$. 定义

$$\begin{cases} x_f(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix}, \ A_f = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A-G-KC & G \end{bmatrix}, \\ D_f = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_1 - KD_2 \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{4}$$

$$M_f = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_1 - KM_2 \end{bmatrix}, \ N_f = [N \quad 0], \ \Delta A_f = M_f F(k) N_f, \tag{5}$$

并且根据式(1)和式(3),可以获得如下的增广系统

$$\begin{cases} x_f(k+1) = (A_f + \Delta A_f)x_f(k) + D_f w(k), \\ \tilde{z}(k) = C_f x_f(k). \end{cases} \tag{6}$$

式中, $C_f = [0 \quad L]$.

$w(k)$ 到 $\tilde{z}(k)$ 的传递函数为

$$H(z) = C_f[zI - (A_f + \Delta A_f)]^{-1}D_f. \tag{7}$$

当系统(6)是鲁棒渐近稳定的,稳态状态协方差阵

$$X = \lim_{k\to\infty} X(k) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{E}[x_f(k)x_f^{\mathrm{T}}(k)] \tag{8}$$

存在,并满足下面的离散系统 Lyapunov 矩阵方程

$$(A_f + \Delta A_f)X(A_f + \Delta A_f)^{\mathrm{T}} + D_f D_f^{\mathrm{T}} - X = 0. \tag{9}$$

3 主要结果(Main results)

根据文献[7],易得如下引理1.

引理 1 对任意实数 $\varepsilon > 0$,若存在对称正定矩阵 W 满足如下条件:

$$\begin{cases} A_f W A_f^{\mathrm{T}} + A_f W N_f^{\mathrm{T}}(\varepsilon I - N_f W N_f^{\mathrm{T}})^{-1} N_f W A_f^{\mathrm{T}} - \\ W + \varepsilon M_f M_f^{\mathrm{T}} + D_f D_f^{\mathrm{T}} = 0, \\ \varepsilon I > N_f W N_f^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{10}$$

那么,有 $X \leqslant W$, X 的定义见式(8).

为了简化叙述先作如下定义:

$$\Phi = (P_1^{-1} - \varepsilon^{-1}N^{\mathrm{T}}N)^{-1}A^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{A} = A + (\varepsilon M_1 M_1^{\mathrm{T}} + D_1 D_1^{\mathrm{T}})\Phi^{-1},$$

$$Q = C + (\varepsilon M_2 M_1^{\mathrm{T}} + D_2 D_1^{\mathrm{T}})\Phi^{-1},$$

$Q^+ = Q^T(QQ^T)^{-1}$ 是 Q 的 M-P 逆,

$$\tilde{P}_2 = H + HL^{\mathrm{T}}(\gamma^2 I - LHL^{\mathrm{T}})^{-1}LH,$$

$$\Gamma = \Phi^{-1}(P_1^{-1} - \varepsilon^{-1}N^{\mathrm{T}}N)^{-1}(\Phi^{-1})^{\mathrm{T}},$$

$$W_1 = [-(\varepsilon M_1 M_1^{\mathrm{T}} + D_1 D_1^{\mathrm{T}}) \cdot \Gamma \cdot (\varepsilon M_2 M_1^{\mathrm{T}} + D_2 D_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} - \hat{A}\tilde{P}_2 Q^{\mathrm{T}} - \varepsilon M_1 M_2^{\mathrm{T}} - D_1 D_2^{\mathrm{T}}](Q^+)^{\mathrm{T}},$$

$$W_2 = Q^+[(\varepsilon M_2 M_1^{\mathrm{T}} + D_2 D_1^{\mathrm{T}}) \cdot \Gamma \cdot (\varepsilon M_2 M_1^{\mathrm{T}} + D_2 D_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} + Q\tilde{P}_2 Q^{\mathrm{T}} + \varepsilon M_2 M_2^{\mathrm{T}} + D_2 D_2^{\mathrm{T}}](Q^+)^{\mathrm{T}},$$

$$W_3 = (\varepsilon M_1 M_1^{\mathrm{T}} + D_1 D_1^{\mathrm{T}}) \cdot \Gamma \cdot (\varepsilon M_1 M_1^{\mathrm{T}} + D_1 D_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} + \hat{A}\tilde{P}_2\hat{A}^{\mathrm{T}} + \varepsilon M_1 M_1^{\mathrm{T}} - H + D_1 D_1^{\mathrm{T}}.$$

定理 1 设 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ 是任意小常数,给定对称正定矩阵 H(满足 $[H]_{ii} = \sigma_i^2$)和扰动衰减系数 γ;对于时变不确定系统(1),如果存在 $\varepsilon > 0$ 使得下面两个 Riccati 方程

$$AP_1A^{\mathrm{T}} - P_1 + AP_1N^{\mathrm{T}}(\varepsilon I - NP_1N^{\mathrm{T}})^{-1}NP_1A^{\mathrm{T}} + \varepsilon M_1 M_1^{\mathrm{T}} + D_1 D_1^{\mathrm{T}} + \delta_1 I = 0, \tag{11}$$

$$W_1P_2 + P_2W_1^{\mathrm{T}} + P_2W_2P_2 + W_3 + \delta_2 I = 0 \tag{12}$$

分别有对称正定解阵 $P_1 > 0$ 和 $P_2 > 0$,并且满足 $\varepsilon I > NP_1N^{\mathrm{T}}$ 和 $\gamma^2 I > LHL^{\mathrm{T}}$;那么滤波器参数为 $K = P_2Q^+$, $G = \hat{A} - KQ$,且滤波器对于所有可容许的参数不确定满足下面要求:

1) 增广系统(6)是渐近稳定的;

2) 稳态误差协方差矩阵 P 存在,且满足 $P < H$,即 $[P]_{ii} \leqslant \sigma_i^2$;

3) 满足给定的扰动衰减系数 γ,即 $\|H(z)\|_\infty < \gamma$.

证 1) 设

$$P_f = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix},\ Q_f = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & \tilde{P}_2 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

根据文献[4]的引理2,得下式:

$$(A_f + \Delta A_f)Q_f(A_f + \Delta A_f)^{\mathrm T} - P_f + D_fD_f^{\mathrm T} \leqslant$$
$$A_f(Q_f^{-1} - \varepsilon^{-1}N_f^{\mathrm T}N_f)^{-1}A_f^{\mathrm T} + \varepsilon M_fM_f^{\mathrm T} - P_f + D_fD_f^{\mathrm T} =$$
$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\Psi_{11} = A(P_1^{-1} - \varepsilon^{-1}N^{\mathrm T}N)^{-1}A^{\mathrm T} + \varepsilon M_1M_1^{\mathrm T} - P_1 + D_1D_1^{\mathrm T}. \tag{15}$$

由式(11),易知 $\Psi_{11} = -\delta_1 I$.

$$\Psi_{12} = \Psi_{21}^{\mathrm T} =$$
$$A(P_1^{-1} - \varepsilon^{-1}N^{\mathrm T}N)^{-1}(A - G - KC)^{\mathrm T} +$$
$$\varepsilon M_1(M_1 - KM_2)^{\mathrm T} + D_1(D_1 - KD_2)^{\mathrm T}. \tag{16}$$

把 $G = \hat{A} - KQ$ 代入上式,得 $\Psi_{12} = 0$.

$$\Psi_{22} = (A - G - KC)(P_1^{-1} - \varepsilon^{-1}N^{\mathrm T}N)^{-1}(A - G - KG)^{\mathrm T} +$$
$$G\tilde{P}_2G^{\mathrm T} + \varepsilon(M_1 - KM_2)(M_1 - KM_2)^{\mathrm T} +$$
$$H + (D_1 - KD_2)(D_1 - KD_2)^{\mathrm T}. \tag{17}$$

把 $G = \hat{A} - KQ$ 和 $K = P_2Q^+$ 代入上式,经过简单的推导,可得下式

$$\Psi_{22} = W_1P_2 + P_2W_1^{\mathrm T} + P_2W_2P_2 + W_3. \tag{18}$$

由式(12)知, $\Psi_{22} = -\delta_2 I$.

现在得到 $\Psi < 0$, 并且根据式(14)易知下式成立:

$$(A_f + \Delta A_f)Q_f(A_f + \Delta A_f)^{\mathrm T} - Q_f < 0. \tag{19}$$

故增广系统(6)是二次型稳定的.

2) 易证下式成立:

$$A_fP_fA_f^{\mathrm T} + A_fP_fN_f^{\mathrm T}(\varepsilon I - N_fP_fN_f^{\mathrm T})^{-1}N_fP_fA_f^{\mathrm T} +$$
$$\varepsilon M_fM_f^{\mathrm T} - P_f + D_fD_f^{\mathrm T} =$$
$$\begin{bmatrix} -\delta_1 I & 0 \\ 0 & -\delta_2 I - GHL^{\mathrm T}(\gamma^2 I - LHL^{\mathrm T})^{-1})LHG^{\mathrm T} \end{bmatrix} < 0. \tag{20}$$

比较式(20)和式(10),得 $P_f > W$;故有 $P < H$, 满足方差约束要求.

3) 由于 $\Psi < 0$, 根据式(14),有

$$(A_f + \Delta A_f)Q_f(A_f + \Delta A_f)^{\mathrm T} - P_f + D_fD_f^{\mathrm T} < 0. \tag{21}$$

将上式中 Q_f 展开,得

$$(A_f + \Delta A_f)P_f(A_f + \Delta A_f)^{\mathrm T} - P_f + D_fD_f^{\mathrm T} +$$
$$(A_f + \Delta A_f)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & HL^{\mathrm T}(\gamma^2 I - LHL^{\mathrm T})^{-1}LH \end{bmatrix}(A_f + \Delta A_f)^{\mathrm T} < 0. \tag{22}$$

进一步,可得

$$(A_f + \Delta A_f)P_f(A_f + \Delta A_f)^{\mathrm T} - P_f + D_fD_f^{\mathrm T} + (A_f +$$
$$\Delta A_f)P_fC_f^{\mathrm T}(\gamma^2 I - C_fP_fC_f^{\mathrm T})^{-1}C_fP_f(A_f + \Delta A_f)^{\mathrm T} < 0. \tag{23}$$

根据离散时间有界实引理,易知

$$\|H(z)\|_\infty = \|C_f(zI - A_f - \Delta A_f)^{-1}D_f\| < \gamma.$$

证毕.

由推导过程可知,定理1是方差约束鲁棒 H_2/H_∞ 滤波问题有解的充分条件.文献[6]中的引理3表明,如果系统(1)是二次型稳定的,那么必定存在一个标量 $\varepsilon > 0$ 和一个矩阵 P_1,满足 $NP_1N^{\mathrm T} < \varepsilon I$ 和代数Riccati 方程(11); P_1 代表了系统(1)的状态向量协方差矩阵的上界.

4 数值举例(Numerical results)

考虑如下离散时变不确定线性随机系统[6]

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.05 \\ -0.08 & -0.5 \end{bmatrix},\ D_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$C = [1\quad 0],\ D_2 = [0.1\quad 0.08],\ M_1 = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.06 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = 0.1,\ N = [0.5\quad 0.5],\ L = [0.01\quad 0.01].$$

现确定滤波公式(3)中的参数矩阵 G 和 K,使稳态估计误差方差满足 $\mathrm{var}[e_1(k)] \leqslant 0.02 = \sigma_1^2$, $\mathrm{var}[e_2(k)] \leqslant 0.076 = \sigma_2^2$;且滤波器的扰动衰减系数 $\gamma \leqslant 0.012 = -38.4$ dB.

利用本文的设计方法,可以很容易得到许多满足设计要求的结果.这里给出其中一个,当 $\gamma = 0.012, \varepsilon = 1.89, \delta_1 = 0.31$,时,并且将稳态估计误差协方差距阵的上界 H 配置为

$$H = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.076 \end{bmatrix}.$$

根据定理1,得到滤波器参数为

$$G = \begin{bmatrix} -0.17795 & 0.09257 \\ -0.01529 & -0.58288 \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} 0.9764 \\ -0.0882 \end{bmatrix}.$$

当干扰 $w(k)$ 是零均值单位方差白噪声序列时, H 仅仅是估计误差协方差矩阵的上界,实际的估计误差协方差矩阵可以通过离散系统 Lyapunov 矩阵方程(8)得到;当时变不确定矩阵 $F(k) = 1, 0, -1$ 时,根据方程(8),求得稳态估计误差协方差阵 P 如下:

$$\begin{bmatrix} 0.006496 & -0.009493 \\ -0.009493 & 0.015080 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0.006542 & -0.009664 \\ -0.009664 & 0.015734 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0.006596 & -0.009872 \\ -0.009872 & 0.016543 \end{bmatrix}.$$

显然满足 $[P]_{ii} \leqslant \sigma_i^2$ 的要求.图1是 $F(k) = 1, 0.5, 0, -0.5$ 和 -1 时,$w(k)$ 到 $\tilde{z}(k)$ 的离散系统奇异值曲线,显然满足扰动衰减系数 γ 不大于0.012的要求;设计结果要好于文献[6]的结果.图中 σ 为奇异值,Ω 为角度.

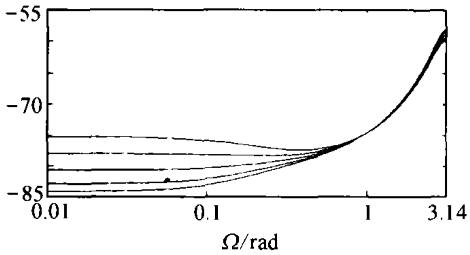

图1 离散系统的奇异值曲线

Fig. 1 Curve of singular value for discrete-time system

总之,利用本文的设计方法,在给定估计误差协方差矩阵的上界 H 和噪声抑制系数 γ 后,适当地选取 $\delta_1, \delta_2, \varepsilon$,根据定理1就可以得到滤波器参数矩阵.

5 结论(Conclusion)

本文提出了一种方差约束鲁棒 H_2/H_∞ 滤波方法,通过直接求解两个Riccati方程后,综合出满足方差约束鲁棒 H_2/H_∞ 滤波问题设计要求的滤波器;克服了文献[5,6]中有一个Riccati方程不能直接求解的问题.同文献[5,6]相比本文的设计方法计算简单、易于应用.

参考文献(References):

[1] DOYLE J C, GLOVER K, KHARGONEKAR P P, et al. Statespace solutions to standard H_2 & H_∞ and control problems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(8): 831 - 847.

[2] BERSTEIN D S, HADDAD W M. Steady-state filtering with an H_∞ error bound [J]. *Systems & Control Letters*, 1989, 12(1): 9 - 16.

[3] HADDAD W M, BERSTAIN D S, MUSTAFA D. Mixed-norm H_2/H_∞ regulation and estimation: the discrete-time case [J]. *Systems & Control Letters*, 1991, 16(4): 235 - 247.

[4] YANG Fuwen, HUNG Y S. Robust H_∞ Filtering with error variance constraints for uncertain discrete-time systems [C] // *Proc of 2000 IEEE Int Conf on Control Application*. [s.l.]: [s.n.], 2000: 635 - 640.

[5] 朱继洪,郭治.连续时变不确定系统约束方差/H_∞鲁棒状态滤波[J].控制理论与应用,1997,14(3):389 - 392.
(ZHU Jihong, GUO Zhi. Mixed variance/H_∞ state filtering for continuous time-varying uncertain system [J]. *Control Theory & Applications*, 1997, 14(3): 389 - 392.)

[6] WANG Zidong, HUANG Biao. Robust H_2/H_∞ filtering for linear with error variance constraints [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2000, 48(8): 2463 - 2467.

[7] 张勇,史忠科,戴冠中.离散系统的鲁棒最小方差滤波新算法及分析[J].自动化学报.2000,26(6):782 - 787.
(ZHANG Yong, SHI Zhongke, DAI Guanzhong. A new robust minimum variance filter for uncertain discrete-time systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(6): 782 - 787.)

作者简介:

刘立恒 (1972 —),男,哈尔滨工业大学控制科学与工程系博士研究生,主要研究方向为鲁棒 H_∞ 滤波,组合导航系统,E-mail: llhpxq@0451.com;

邓正隆 (1939—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为惯性导航,系统辨识,现代控制理论应用;

王广雄 (1933—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为 H_∞ 控制理论及应用,高精度伺服系统设计等.