文章编号: 1000 - 8152(2004)03 - 0467 - 03

基于遗传算法的方程求根算法的设计和实现

刘 锋[1,2], 陈国良[1], 吴 昊[2]

(1. 中国科学技术大学 计算机科学技术系, 安徽 合肥 230027; 2. 安徽大学 计算机科学技术系,安徽 合肥 230039)

摘要: 探讨用 GA 解优化问题的方法来求解复函数方程全部根的问题.提出了一种基于遗传算法的复函数方程求根算法,算法简单实用,并给出该算法的设计和实现,最后通过实例验证了该方法的有效性.

关键词: 遗传算法; 方程根; 复函数方程

中图分类号: TP301　　**文献标识码**: A

Design and implementation of genetic algorithm for finding roots of complex functional equation

LIU Feng[1,2], CHEN Guo-liang[1], WU Hao[2]

(1. Department of Computer Science and Engineering University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230027, China;
(2. Department of Computer Science and Engineering University of Anhui, Hefei Anhui 230039, China)

Abstract: A genetic algorithm (GA) for finding all roots of complex functional equation is presented. The researches were made in some technical problems for realizing. It described the design and implementation of genetic algorithm for finding roots of complex functional equation. The experiment result shows that our strategies are feasible and effective.

Key words: genetic algorithm; root; complex functional equation

1 前言(Introduction)

遗传算法 GA(genetic algorithm)[1,2]是借用生物进化中"适者生存"的规律而提出的解优化问题的有效方法,求复函数方程根是科学工程计算中经常遇到的问题,也是数值分析方面的一个比较困难的问题.在大量的科学和工程计算中都要涉及复函数方程求根问题.研究复函数方程求根的算法有着重要的理论意义和应用价值.本文提出一种基于根的分布理论和 GA 的求复函数方程根的算法.在算法中首先利用复函数方程根的分布理论,确定根的个数和范围;在确定的范围内利用模拟退火遗传算法进行求根,算法简单实用.本文研究和探讨了该算法的设计和实现.

2 问题描述(Problem formulation)

令 $z = x + \mathrm{i}y$ 为复数.

定理 幅角原理[3].

如果 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 在简单闭曲线 C 上和在 C 内解析,且在 C 上不等于零,那么 $f(z)$ 在 C 内零点的个数等于 $1/(2\pi)$ 乘以当 z 沿 C 的正向绕行一周 $f(z)$ 的幅角的改变量,M 重零点算 m 个零点.

推论[4] 设 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 在简单闭曲线 C 上和在 C 内解析,且在 C 上不等于零,点 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 沿 C 的正向绕行一周,设向量 (u, v) 作正方向的旋转次数为 N_p,作负方向的旋转次数为 N_n,那么在封闭曲线 C 内 $f(z) = 0$ 的根的个数 $N = N_\mathrm{p} - N_\mathrm{n}$.

对于所有的方程求根问题,包括复函数方程求根问题都可以转换为求函数最小值问题.

显然,求 $F(y)$ 的根的问题和解优化问题

$$\min \mid f(z) \mid \tag{1}$$

等价.因此下面仅讨论用 GA 解 min 问题即可.

3 算法设计(Algorithm design)

设在圆形区域 S 内求复函数方程 $f(z) = 0$ 的根,算法首先根据推论 1 求出在区域 S 内的根的个数 N_s,如果 $N_s > 2$,将区域 S 划分为多个子区域 $S_1, S_2, \cdots, S_i, \cdots, S_r$. S_i 是与区域 S 同圆心的环,S_r 可看成为内圆半径为 0 的环.在图 1 中表示 S 分为 4 个子区域.对于子区域 $S_m(1 \leqslant m \leqslant 4)$ 分 3 种情况讨论:

1) 若在子区域 S_m 中,复函数方程 $f(z) = 0$ 根

收稿日期:2002 - 09 - 24; 收修改稿日期:2003 - 12 - 15.
基金项目:国家重点基础研究发展规划 973 项目(G1998030403).

的个数为0.则说明该区域无根,不用再划分该区域求根.

2) 若在子区域 S_m 中,复函数方程 $f(z)=0$ 根的个数为1.

① 若子区域 S_m 内外圆半径的差值小于给定的允许误差,认为方程根在以区域 S 圆心为圆心,以 S_m 内外圆半径差值的一半与 S_m 内圆半径之和作为半径的圆弧上.最后利用基于模拟退火的 GA 在该圆弧上求 $|f(z)|$ 的最小值.

② 若子区域 S_m 内外圆半径的差值大于给定的允许误差,则再细分该区域为多个子区域环,直至子区域内外圆半径的差值小于给定的允许误差.

3) 若在子区域 S_m 中,复函数方程 $f(z)=0$ 根的个数大于1,则再细分该区域为多个子区域环,直至子区域 S_m' 内外圆半径的差值小于给定的允许误差,这时将区域 S_m' 划分为多个同圆心扇环.对于子区域分3种情况讨论:

① 若在子区域中,复函数方程 $f(z)=0$ 根的个数为0.则说明该区域无根,不用再划分该区域求根.

② 若在子区域中,复函数方程 $f(z)=0$ 根的个数为1.利用基于模拟退火的 GA 在该圆弧上求 $|f(z)|$ 的最小值.

③ 若在子区域中,复函数方程 $f(z)=0$ 根的个数大于1,则再细分该区域为多个子区域扇环 S_c,直至子区域 S_c 始末弧度之差小于给定的允许误差,这时若该区域中根的个数大于1,则认为子区域 S_c 中心点为复方程 $f(z)=0$ 重根,否则认为子区域 S_c 中心点为复方程 $f(z)=0$ 单根.

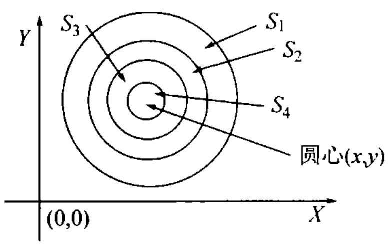

图1 区域划分

Fig. 1 Domain dividing

4 算法的实现(Algorithm realization)

用GA解 min 问题(1),关键是算法的实现技术.其中主要是:

1) 种群初始化.

定义宏 RAND_NUM(M, N)和 RANDOM,宏 RAND_NUM(M,N)表示在 $[M,N]$ 范围内产生随机数,宏 RANDOM 表示在[0,1]区间内产生随机数,来初始化种群中一个染色体.

2) 计算适值.

采用线性排名方法[1],该方法不论是对求最大值、还是对求最小值问题,都简单易行.首先假设群体成员按适值大小从好到坏依次排列,然后根据一个线性函数分配选择概率 P_{s_i}.设种群规模为 N.

$$P_{s_i}=\frac{2*i}{N*(N+1)}. \tag{2}$$

有了选择概率,即可以按类似于赌轮法进行选择算子.

3) 选择.

选择策略为"轮盘赌"式的正比选择法.令 $p(k)$ 是个体 k 的选择概率,则

$$p(k)=\text{fitness}(k)/\text{fitsum}(k=1,\cdots,m). \tag{3}$$

这里 $\text{fitsum}=\sum_{i=1}^{m}\text{fitness}(1)$, m 为群体和种群的规模(我们取群体的规模和种群的规模一样大).

令 $S(0)=0$,

$$S(k)=p(1)+p(2)+\cdots+p(k),k=1,\cdots,m. \tag{4}$$

产生(0,1)区间上的均匀分布的随机数 $\xi_S(S=1,\cdots,m)$.若 $S(k-1)<\xi_S<S(k)$,则选个体 k 为下一代的亲代,即个体 k 选入种群.

在每一代进行选择操作时保留取优的个体.最优个体为对应的适应函数值为 fitmin 的个体.这里

$$\text{fitmin}=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\text{fitness}(1).$$

4) 交叉算子.

交叉算子是指把两个父代个体的部分结构加以替换重组而生成新个体的操作.在自然界生物进化过程中起核心作用的是生物遗传基因的重组.同样,GA 中起核心作用的是遗传操作的交叉算子.

在本文中,交叉算子采用实向量编码中算术部分交叉的特例,一点算术交叉.

5) 变异.

在本文中变异算子,采用在解空间随机产生一新个体.实现如下:

individual - > arg = RAND_NUM(fromarg, endarg).

下一代新群体的形成一般情况下,种群经交叉、变异后即形成下一代新群体.然后,在这新群体中随机地挑选出一个染色体将其删去,而用保留的上一代的最优个体的染色体代替之.

5 算法实例(Example)

以下实例都是在联想 PⅢ-450 微机,每代个体

数 $N = 50$，最大繁殖代数 $G = 100$，交叉概率 $p_c = 0.92$，变异概率 $p_m = 0.02$，初始温度 $T_0 = 0.9$；衰减函数 $d = 0.5$，Markov 链长 $L = 10$. 这里的参数是根据经验值选取[6].

表 1　实验结果

Table 1　Experiment results

精确解	结　果	误　差
1.000000 +1.000000i	1.000000 +1.000000i	0.000000
-1.00000 +1.000000i	-1.000000 +1.000000i	0.000000
0.000000 +1.000000i	0.0000000 +1.000000i	0.000000
-0.587785 +0.809017i	-0.587783 +0.809023i	0.000002
0.866025 -0.500000i	0.866023 -0.499999i	0.000002
-0.951056 -0.309017i	-0.951053 -0.309015i	0.000003
1.322876 -1.500000i	1.322876 -1.500000i	0.000000
-1.322876 -1.50000i	-1.322876 -1.500001i	0.000001
0.587785 +0.809017i	0.587782 +0.809017i	0.000002
-1.00000 +0.000000i	-1.00001 +0.000001i	0.000001
0.951010 -0.309165i	0.951013 -0.309162i	0.000002
-0.866025 -0.50000i	-0.866024 -0.499999i	0.000001
0.0000000 -1.00000i	-0.000003 -0.999998i	0.000003

例

$$
\begin{aligned}
f(z) = {} & z^{13} + (1+\mathrm{i})z^{12} + \mathrm{i}^{-11} + 3\mathrm{i}z^{10} + (7+3\mathrm{i})z^9 + \\
& (7+\mathrm{i})z^8 + (-3+\mathrm{i})z^7 + (-3+8\mathrm{i})z^6 + \\
& (-3+8\mathrm{i})z^5 + (-3+7\mathrm{i})z^4 + 7\mathrm{i}z^3 + \\
& (-2\mathrm{i})z^2 + (-8-2\mathrm{i})z - 8.
\end{aligned}
$$

设 $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，$\rho \in [0,20]$，$\theta \in [0, 2\pi)$.

精度：$e_1 = 0.00001$，$e_2 = 0.00001$.

在该实例中设最大遗传代数 $g_{\max} = 100$，在求解区间中，求得全部解，无一遗漏. 误差 = |精确解 - 结果|.

6　结束语(Conclusion)

本文用基于模拟退火思想的 GA 实现了求复函数方程根的问题，并详细介绍了算法的思想，算法的设计与实现. 通过实例的结果可以看出用该算法求复函数方程的根所得结果是令人满意的.

参考文献(References)：

[1] HOLLAND J H. *Adaptation in Natural and Artificial System* [M]. Michigan: The University of Michigan Press, 1975.

[2] 陈国良，王煦法，庄镇泉，等. 遗传算法及其应用[M]. 北京：人民邮电出版社，1996.
(CHEN Guoliang, WANG Xifa, ZHUANG Zhenquan, et al. *Genetic Algorithm and Its Application* [M]. Beijing: People' Posts & Telecommunications Press, 1996.)

[3] 西安交通大学高等数学教研室. 复变函数[M]. 北京：高等教育出版社，1995.
(Xi'an Jiaotong University. *Complex Function* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1995.)

[4] JOHN F. *Lectures on Advanced Numerical Analysis* [M]. London: Thomas Nelson and Sons, 1996.

[5] 康立山. 非数值计算(第一卷)——模拟退火算法[M]. 北京：科学出版社，1994.
(KANG Lishan. *Non-numerical Computing* (*Vol*. 1) – *Simulated Annealing Algorithm* [M]. Beijing: Science Press, 1994.)

[6] 程锦松. 求多项式全部根的遗传算法[J]. 微机发展，2001，11(6)：1－2.
(CHENG Jinsong. Algorithm for finding roots of a polynomial based on GA [J]. *Microcomputer Development*, 2001, 11(6): 1－2.)

作者简介：

刘　锋　(1962 —)，男，博士研究生，副教授，主要研究领域为并行分布计算，计算机网络，E-mail: fengliu@mail.ustc.edu.cn;

陈国良　(1938 —)，男，中国科学院院士，教授，博士生导师，主要研究领域为并行分布计算，计算机网络，并行体系结构；

吴　昊　(1973 —)，男，研究生，主要研究领域为并行分布计算.