

## 基于 Kalman 滤波的通用和统一的白噪声估计方法

邓自立<sup>1</sup>, 许燕<sup>2</sup>

(1. 黑龙江大学 应用数学研究所, 黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 北京印刷学院 基础部, 北京 102600)

**摘要:** 用射影理论, 基于 Kalman 滤波提出了通用和统一的白噪声估计方法, 可统一解决带非零均值相关噪声的线性离散时变随机控制系统的白噪声滤波、平滑和预报问题. 提出了输入白噪声估值器和观测白噪声估值器, 最优和稳态白噪声估值器, 固定点、固定滞后和固定区间白噪声平滑器, 白噪声新息滤波器和 Wiener 滤波器. 它可应用于石油地震勘探信号处理和状态估计, 为解决信号和状态估计问题, 提供了新的途径和工具. 关于 Bernoulli-Gaussian 白噪声估值器的仿真例子说明了其有效性.

**关键词:** 反射地震学; 输入白噪声估值器; 观测白噪声估值器; 最优和稳态白噪声估值器; Kalman 滤波方法  
**中图分类号:** O211 **文献标识码:** A

## General and unified white noise estimation approach based on Kalman filtering

DENG Zi-li<sup>1</sup>, XU Yan<sup>2</sup>

(1. Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang 150080, China;

2. Basic Department, Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing 102600, China)

**Abstract:** By the projection theory, general and unified white noise estimation approach is proposed based on Kalman filtering. It can solve the white noise filtering, smoothing and prediction problems in a unified framework for linear discrete time-varying stochastic control systems with correlated noises having non-zero mean. The input white noise estimators and measurement white noise estimators, optimal and steady-state white noise estimators, fixed point, fixed lag and fixed interval white noise smoothers, and white noise innovation filter and Wiener filter are presented. The approach can be applied to signal processing in oil seismic exploration and state estimation, and provide a new way to solve the signal and state estimation problems. The simulation example for Bernoulli-Gaussian white noise estimators shows its effectiveness.

**Key words:** reflection seismology; input white noise estimator; measurement white noise estimator; optimal and steady-state white noise estimator; Kalman filtering method

### 1 引言 (Introduction)

白噪声估计问题在石油地震勘探、通讯、信号处理、状态估计等领域有重要的应用. Mendel<sup>[1~4]</sup>以石油地震勘探数据处理为应用背景, 用 Kalman 滤波方法提出了随机系统的最优输入白噪声估值器, 其局限性是没有解决观测白噪声估计问题, 且不能处理带非零均值的相关噪声系统白噪声估计问题. 为此, 邓自立等<sup>[5]</sup>用现代时间序列分析方法提出了一种统一的白噪声估计理论, 其中不仅提出了新的输入白噪声估值器, 而且还提出了观测白噪声估值器, 并将其应用于解决状态和信号估计问题<sup>[6~10]</sup>, 使白噪声估计理论成为最优滤波的新工具<sup>[9,10]</sup>. 但该理论的局限性是不能处理时变系统, 不能得到时变系统的

最优白噪声估值器, 仅给出定常系统的稳态白噪声估值器. 本文作者基于 Kalman 滤波提出了一种新的通用的和统一的白噪声估计方法, 克服了上述局限性. 它可统一解决带非零均值相关噪声的时变和定常随机控制系统的输入和观测白噪声的最优和稳态滤波、平滑和预报问题, 且将文献<sup>[12,13]</sup>的结果推广到带非零均值的相关噪声系统, 给出了不同于文献<sup>[13]</sup>的白噪声估计新算法.

### 2 问题描述 (Problem formulation)

考虑线性离散时变随机控制系统

$$\mathbf{x}(t+1) = \Phi(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) + \Gamma(t)\mathbf{w}(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = H(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (2)$$

其中  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  为状态,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$  为观测;  $\Phi(t)$ ,  $B(t)$ ,  $\Gamma(t)$  和  $H(t)$  为已知时变矩阵;  $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^l$  为输入白噪声;  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  为观测白噪声.

**假设 1**  $\mathbf{w}(t)$  和  $\mathbf{v}(t)$  是带非零均值的相关白噪声,

$$\begin{cases} E\mathbf{w}(t) = \mathbf{q}_w(t), E\mathbf{v} = \mathbf{q}_v(t), \\ \text{cov}\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{w}(j) \\ \mathbf{v}(j) \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} Q_w(t) & S(t) \\ S^T(t) & Q_v(s) \end{bmatrix} \delta_{ij}, \\ Q_w(t) > 0, \end{cases} \quad (3)$$

其中  $E$  为均值号,  $\text{cov}$  为协方差号,  $T$  为转置号,  $\delta_{ii} = 1$ ,  $\delta_{ij} = 0 (t \neq j)$ .

注意,带机动加速度输入的雷达跟踪系统可遇到  $\mathbf{q}_w(t) \neq 0$  的情形,传感器带系统偏差时,可遇到  $\mathbf{q}_v(t) \neq 0$  的情形.

**假设 2**  $\mathbf{w}(0)$  不相关于  $\mathbf{w}(t)$  和  $\mathbf{v}(t)$ , 且  $E\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0$ ,  $\text{cov}\mathbf{x}(0) = \Sigma_0$ .

**假设 3**  $\mathbf{u}(t)$  为已知的非随机控制输入或  $\mathbf{u}(t)$  为反馈控制.

在假设 1~3 下,系统(1),(2)有 Kalman 预报器<sup>[11]</sup>

$$\mathbf{x}(t+1|t) = \Phi(t)\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + B(t)\mathbf{u}(t) + \Gamma(t)\mathbf{q}_w(t) + K_p(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t), \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{q}_v(t) - H(t)\hat{\mathbf{x}}(t|t-1), \quad (5)$$

$$K_p(t) = [\Phi(t)\Sigma(t|t-1)H^T(t) + \Gamma(t)S(t)]Q_\varepsilon^{-1}(t), \quad (6)$$

$$Q_\varepsilon(t) = H(t)\Sigma(t|t-1)H^T(t) + Q_v(t), \quad (7)$$

$$\Sigma(t+1|t) = \Phi(t)\Sigma(t|t-1)\Phi^T(t) -$$

$$\begin{aligned} & [\Phi(t)\Sigma(t|t-1)H^T(t) + \Gamma(t)S(t)] \times \\ & [H(t)\Sigma(t|t-1)H^T(t) + Q_v(t)]^{-1} \times \\ & [\Phi(t)\Sigma(t|t-1)H^T(t) + \Gamma(t)S(t)]^T + \\ & \Gamma(t)Q_w(t)\Gamma^T(t), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(0|-1) = \bar{\mathbf{x}}_0, \Sigma(0|-1) = \Sigma_0, \quad (9)$$

其中新息  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  是带零均值、方差阵为  $Q_\varepsilon(t)$  的白噪声.

最优白噪声估计问题是利用上述 Kalman 预报器,基于观测和控制  $(\mathbf{y}(j), \mathbf{y}(j-1), \dots, \mathbf{y}(0), \mathbf{u}(j), \mathbf{u}(j-1), \dots, \mathbf{u}(0))$  求  $\mathbf{w}(t)$  和  $\mathbf{v}(t)$  的在线性最小方差估计准则下的最优估值器  $\hat{\mathbf{w}}(t|j)$  和  $\hat{\mathbf{v}}(t|j)$ , 统一记为  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t|j)$ ,  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{w}, \mathbf{v}$ . 对  $j = t, j > t$  或  $j < t$ , 称  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t|j)$  分别为白噪声滤波器,平滑器或预报器,特别当  $t$  固定且  $N > 0$  时,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t+N)$  叫做固

定点平滑器;当  $N > 0$  固定时,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t+N)$  叫做固定滞后平滑器;当  $N > 0$  固定且  $0 \leq t \leq N$  时,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t|N)$  叫做固定区间平滑器.

### 3 统一的最优白噪声估值器 (Unified optimal white noise estimators)

**定理 1** 系统(1),(2)在假设 1~3 下有统一的最优白噪声估值器

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t+N) = \mathbf{q}_\theta(t), N < 0, \quad (10)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t+N) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t+N-1) + M_\theta(t|t+N)\boldsymbol{\varepsilon}(t+N) \quad (11)$$

其中  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{w}, \mathbf{v}; N = 0, 1, \dots; t = 0, 1, \dots$ ; 且

$$M_w(t|t) = S(t)Q_w^{-1}(t), M_v(t|t) = Q_v(t)Q_\varepsilon^{-1}(t), \quad (12)$$

$$M_\theta(t|t+1) = D_\theta(t,1)H^T(t+1)Q_\varepsilon^{-1}(t+1), \quad (13)$$

$$D_w(t,1) = Q_w(t)\Gamma^T(t) - S(t)K_p^T(t), \quad (14)$$

$$D_v(t,1) = S^T(t)\Gamma^T(t) - Q_v(t)K_p^T(t), \quad (15)$$

$$M_\theta(t|t+N) = D_\theta(t,1) \left\{ \prod_{i=1}^{N-1} \Psi_p^T(t+i) \right\} \times H^T(t+N)Q_\varepsilon^{-1}(t+N), \quad (16)$$

$$\Psi_p(t) = \Phi(t) - K_p(t)H(t), \quad (17)$$

其中  $N \geq 2$ . 误差方差阵  $P_\theta(t|t+N)$  为

$$P_\theta(t|t+N) = Q_\theta(t), N < 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} P_\theta(t|t+N) = & P_\theta(t|t+N-1) - M_\theta(t|t+N)Q_\varepsilon(t+ \\ & N)M_\theta^T(t|t+N), N \geq 0. \end{aligned} \quad (19)$$

**证** 由射影理论,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t+N)$  是  $\boldsymbol{\theta}(t)$  在由  $(\mathbf{y}(t+N), \mathbf{y}(t+N-1), \dots, \mathbf{y}(0))$  张成的线性流形  $L(\mathbf{y}(t+N), \dots, \mathbf{y}(0))$  上的射影. 当  $N < 0$  时, 由式(1),(2)迭代及假设 1~3 可知  $\boldsymbol{\theta}(t)$  不相关(正交)于  $L$ , 于是由射影公式<sup>[11]</sup>引出式(10)成立. 为推导方便,引入带零均值白噪声

$$\boldsymbol{\theta}_c(t) = \boldsymbol{\theta}(t) - \mathbf{q}_\theta(t), \boldsymbol{\theta} = \mathbf{w}, \mathbf{v}. \quad (20)$$

应用递推射影公式<sup>[11]</sup>有式(11),其中  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{w}, \mathbf{v}$ , 且  $M_\theta(t|t+N) = E[\boldsymbol{\theta}_c(t)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t+N)]Q_\varepsilon^{-1}(t+N)$ , (21)

其中应用了  $E[\boldsymbol{\varepsilon}(t+N)] = \mathbf{0}$ . 由式(2)和(5)引出

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = H(t)\bar{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{v}_c(t), \quad (22)$$

其中  $\bar{\mathbf{x}}(t|t-1) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)$ . 对于  $N = 0$ , 将式(22)代入式(21)并注意  $\boldsymbol{\theta}(t)$  不相关于  $\bar{\mathbf{x}}(t|t-1)$ , 立刻得到式(12). 由式(1),(4)及(22)引出

$$\bar{\mathbf{x}}(t+1|t) =$$

$$\Psi_p(t)\bar{x}(t|t-1) + \Gamma(t)\mathbf{w}_c(t) - K_p(t)\mathbf{v}_c(t), \quad (23)$$

其中  $\Psi_p$  由式(17)定义. 对于  $N = 1$ , 由式(21) ~ (23) 容易得到式(13) ~ (15). 对于  $N > 1$ , 由式(23)迭代可得

$$\begin{aligned} \bar{x}(t+N|t+N-1) = & \Psi(t+N, t)\bar{x}(t|t-1) + \\ & \sum_{i=t+1}^{t+N} \Psi(t-N, i)[\Gamma(i-1)\mathbf{w}_c(i-1) - K_p(i-1)\mathbf{v}_c(i-1)], \end{aligned} \quad (24)$$

其中定义  $\Psi(t+N, t+N) = I_n$ , 对于  $i < t+N$  定义

$$\Psi(t+N, i) = \Psi_p(t+N-1)\cdots\Psi_p(i). \quad (25)$$

在式(22)中置  $t = t+N$  并将其代入式(21), 利用式(24)可得式(16)和(17),  $\theta = w, v$ . 由式(3), 对于  $N < 0$  显然有式(18)成立. 对于  $N \geq 0$ , 由式(11)有

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t|t+N) = & \hat{\theta}(t|t+N-1) - M_\theta(t|t+N)\boldsymbol{\varepsilon}(t+N). \end{aligned} \quad (26)$$

注意到  $\hat{\theta}(t|t+N-1)$  正交(不相关)于  $\boldsymbol{\varepsilon}(t+N)$  和  $E[\theta(t)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t+N)] = E[\theta_c(t)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t+N)]$ , 由式(21)和(26)可得式(19). 证毕.

**推论 1** 最优白噪声滤波器为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{w}}(t|t) = \mathbf{q}_w(t) + S(t)Q_\varepsilon^{-1}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t), \\ \hat{\mathbf{v}}(t|t) = \mathbf{q}_v(t) + Q_v(t)Q_\varepsilon^{-1}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t). \end{cases} \quad (27)$$

**推论 2** 统一的非递推最优白噪声平滑器为

$$\begin{cases} \hat{\theta}(t|t+N) = \mathbf{q}_\theta(t) + \sum_{i=0}^N M_\theta(t|t+N)\boldsymbol{\varepsilon}(t+i), \\ \theta = \mathbf{w}, \mathbf{v}, N > 0. \end{cases} \quad (28)$$

**推论 3**  $M_\theta(t|t+N)$  可递推计算为

$$M_\theta(t|t+N) = D_\theta(t, N)H^T(t+N)Q_\varepsilon^{-1}(t+N), \quad (29)$$

$$D_\theta(t, j) = D_\theta(t, j-1)\Psi_p^T(t+j-1), j = 2, \dots, N. \quad (30)$$

**推论 4**<sup>[4]</sup> 在  $\mathbf{q}_w(t) = \mathbf{0}, S(t) = \mathbf{0}$  和  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$  的特殊情况下, 有最优输入白噪声平滑器

$$\hat{\mathbf{w}}(t|t+N) = \hat{\mathbf{w}}(t|t+N-1) + M_w(t|t+N)\boldsymbol{\varepsilon}(t+N), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} M_w(t|t+N) = & Q_w(t)\Gamma^T(t)\left\{\prod_{i=1}^{N-1} [I_n - K(t+i)H(t+i)]\right\}^T \Phi^T(t+i) \times \\ & H^T(t+N)Q_\varepsilon^{-1}(t+N), \end{aligned} \quad (32)$$

$$k(t) = \Sigma(t|t-1)H^T(t)Q_\varepsilon^{-1}(t). \quad (33)$$

**定理 2** 系统(1), (2)在假设 1~3 下有统一的最优固定区间白噪声平滑器为

$$\hat{\theta}(t|N) = \hat{\theta}(t|t) + D_\theta(t, 1)\mathbf{r}(t+1|N), \theta = \mathbf{w}, \mathbf{v}, \quad (34)$$

其中  $t = N, \dots, 0$ , 且有反向递推公式

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t+1|N) = & \Psi_p^T(t+1)\mathbf{r}(t+2|N) + \\ & H^T(t+1)Q_\varepsilon^{-1}(t+1)\boldsymbol{\varepsilon}(t+1). \end{aligned} \quad (35)$$

带初值  $\mathbf{r}(N+1|N) = \mathbf{0}$ . 误差方差阵为

$$P_\theta(t|N) = P_\theta(t|t) - D_\theta(t, 1)S(t+1|N)D_\theta^T(t, 1), \quad (36)$$

其中  $t = N, \dots, 0$ , 且有反向递推公式

$$\begin{aligned} S(t+1|N) = & \Psi_p^T(t+1)S(t+2|N)\Psi_p(t+1) + \\ & H^T(t+1)Q_\varepsilon^{-1}(t+1)H(t+1), \end{aligned} \quad (37)$$

带初值  $S(N+1|N) = 0$ .

**证** 重复应用式(11)有

$$\hat{\theta}(t|N) = \hat{\theta}(t|t) + \sum_{i=1}^{N-t} M_\theta(t|t+i)\boldsymbol{\varepsilon}(t+i). \quad (38)$$

由式(13)和(16)可将式(38)表为式(34)形式, 其中定义

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t+1|N) = & H^T(t+1)Q_\varepsilon^{-1}(t+1)\boldsymbol{\varepsilon}(t+1) + \\ & \sum_{i=2}^{N-t} \left[ \prod_{j=1}^{i-1} \Psi_p^T(t+j) \right] H^T(t+i)Q_\varepsilon^{-1}(t+i)\boldsymbol{\varepsilon}(t+i). \end{aligned} \quad (39)$$

注意

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2}^{N-t} \left[ \prod_{j=1}^{i-1} \Psi_p^T(t+j) \right] H^T(t+i)Q_\varepsilon^{-1}(t+i)\boldsymbol{\varepsilon}(t+i) = \\ & \Psi_p^T(t+1)H^T(t+2)Q_\varepsilon^{-1}(t+2)\boldsymbol{\varepsilon}(t+2) + \\ & \Psi_p^T(t+1) \sum_{i=3}^{N-t} \left[ \prod_{j=2}^{i-1} \Psi_p^T(t+j) \right] \times \\ & H^T(t+i)Q_\varepsilon^{-1}(t+i)\boldsymbol{\varepsilon}(t+i) = \\ & \Psi_p^T(t+1)\{H^T(t+2)Q_\varepsilon^{-1}(t+2)\boldsymbol{\varepsilon}(t+2) + \\ & \sum_{i=2}^{N-t-1} \left[ \prod_{j=1}^{i-1} \Psi_p^T(t+1+j) \right] \times \\ & H^T(t+1+i)Q_\varepsilon^{-1}(t+1+i)\boldsymbol{\varepsilon}(t+1+i)\} = \\ & \Psi_p^T(t+1)\mathbf{r}(t+2|N). \end{aligned} \quad (40)$$

由式(39)和(40)立刻得式(35). 在式(34)中置  $t = N$  引出  $\mathbf{r}(N+1|N) = \mathbf{0}$ . 由式(34)有

$$\tilde{\theta}(t|t) = \tilde{\theta}(t|N) + D_{\theta}(t,1)r(t+1|N), \tag{41}$$

其中  $\tilde{\theta}(t|j) = \theta(t) - \hat{\theta}(t|j)$ . 注意到  $r(t+1|N) \in L(\varepsilon(t+1), \dots, \varepsilon(N)) \subset L(y(1), \dots, y(N))$ , 而由射影性质有  $\tilde{\theta}(t|N)$  正交于  $L(y(0), \dots, y(N))$ , 故  $\tilde{\theta}(t|N)$  正交于  $r(t+1|N)$ . 因而由式(41)得式(36), 其中定义

$$S(t+1|N) = E[r(t+1|N)r^T(t+1|N)]. \tag{42}$$

注意,  $\varepsilon(t+1)$  正交于  $r(t+2|N)$ . 将式(35)代入式(42)中立刻得到式(37). 由式(42)和  $r(N+1|N) = \mathbf{0}$  引出  $S(N+1|N) = \mathbf{0}$ . 证毕.

**推论 5**<sup>[4]</sup> 在  $u(t) = \mathbf{0}, q_w(t) = \mathbf{0}$  和  $S(t) = 0$  的特殊情况下, 则最优固定区间输入白噪声平滑器为

$$\hat{w}(t|N) = Q_w(t)\Gamma^T(t)r(t+1|N), \tag{43}$$

带  $t = N, N-1, \dots, 0$ , 且

$$P_w(t|N) = Q_w(t) - Q_w(t)\Gamma^T(t)S(t+1|N)\Gamma(t)Q_w(t). \tag{44}$$

#### 4 统一的稳态白噪声估值器 (Unified steady-state white noise estimators)

**定理 3** 对于满足假设 1~3 的定常系统(1), (2), 即模型参数阵和噪声统计是时不变的  $\Phi(t) = \Phi, B(t) = B, \Gamma(t) = \Gamma, H(t) = H, Q_{\theta}(t) = Q_{\theta}, q_{\theta}(t) = q_{\theta}, \theta = w, v$ , 再假设<sup>[11]</sup>  $(\Phi, H)$  为完全能检测对,  $(\Phi - \Gamma S Q_r^{-1} H, \Gamma \bar{Q}_w)$  为完全能稳对, 其中  $\bar{Q}_w$  满足  $\bar{Q}_w \bar{Q}_w^T = Q_w - S Q_v^{-1} S^T$ , 则有统一的稳态白噪声估值器

$$\hat{\theta}(t|t+N) = q_{\theta}, N < 0, \tag{45}$$

$$\hat{\theta}(t|t+N) = \hat{\theta}(t|t+N-1) + M_{\theta}(N)\varepsilon(t+N), \tag{46}$$

其中  $\theta = w, v; N = 1, 2, \dots$ ; 且增益为

$$M_w(0) = S Q_{\varepsilon}^{-1}, M_v(0) = Q_v Q_{\varepsilon}^{-1}, \tag{47}$$

$$M_{\theta}(N) = D_{\theta}(1)(\Psi_p^T)^{N-1} H^T Q_{\varepsilon}^{-1}, N \geq 1, \tag{48}$$

$$D_w(1) = Q_w \Gamma^T - S K_p^T, \tag{49}$$

$$D_v(1) = S^T \Gamma^T - Q_v K_p^T, \tag{50}$$

$$\Psi_p = \Phi - K_p H. \tag{51}$$

稳态误差方差阵为

$$P_{\theta}(t|t+N) = Q_{\theta}, N < 0, \tag{52}$$

$$P_{\theta}(t|t+N) = P_{\theta}(t|t+N-1) - M_{\theta}(N) Q_{\varepsilon} M_{\theta}^T(N). \tag{53}$$

而稳态 Kalman 预报器增益  $K_p$  和稳态新息方差阵  $Q_{\varepsilon}$  为

$$K_p = (\Phi \Sigma H^T + \Gamma S) Q_{\varepsilon}^{-1}, \tag{54}$$

$$Q_{\varepsilon} = H \Sigma H^T + Q_v, \tag{55}$$

其中  $\Sigma$  满足稳态 Riccati 方程

$$\Sigma = \Phi \Sigma \Phi^T - (\Phi \Sigma H^T + \Gamma S)(H \Sigma H^T + Q_v)^{-1} \times (\Phi \Sigma H^T + \Gamma S)^T + \Gamma Q_w \Gamma^T. \tag{56}$$

它可由式(8)带初值  $\Sigma(0|-1) = \alpha I_n, \alpha > 0$ , 用迭代算法求解, 当  $t$  充分大有  $\Sigma \approx \Sigma(t+1|t)$ .

**证** 由关于系统完全能检测和完全能稳的假设引出, 当  $t \rightarrow \infty$  时存在<sup>[11]</sup> 稳态 Kalman 预报器和稳态白噪声估值器. 令  $\Sigma(t+1|t) \rightarrow \Sigma, Q_{\varepsilon}(t) \rightarrow Q_{\varepsilon}, K_p(t) \rightarrow K_p, M_{\theta}(t|t+N) \rightarrow M_{\theta}(N)$ . 由定理 1 和式(6)~(8)引出定理 3. 证毕.

将式(5)代入式(4)有相应的稳态 Kalman 预报器

$$\hat{x}(t+1|t) = \Psi_p \hat{x}(t|t-1) + B u(t) + \Gamma q_w - K_p q_v + K_p y(t). \tag{57}$$

引入单位滞后算子  $q^{-1}, q^{-1}\alpha(t) = \alpha(t-1)$ , 可将式(57)表为 Wiener 滤波器形式

$$\hat{x}(t+1|t) = (I_n - q^{-1}\Psi_p)^{-1}(B u(t) + \Gamma q_w - K_p q_v + K_p y(t)), \tag{58}$$

其中  $I_n$  为  $n \times n$  单位阵. 将式(58)代入式(5)并应用矩阵求逆 Leverrier - Fadeeva 公式<sup>[9]</sup>

$$\begin{cases} (I_n - q^{-1}\Psi_p)^{-1} = F(q^{-1})/\Psi(q^{-1}), \\ \Psi(q^{-1}) = 1 + \Psi_1 q^{-1} + \dots + \Psi_n q^{-n}, \\ F(q^{-1}) = I_n + F_1 q^{-1} + \dots + F_{n-1} q^{-(n-1)}, \\ \Psi_i = -(1/i)\text{tr}(\Psi_p F_{i-1}), i = 1, \dots, n, \\ F_i = \Psi_p F_{i-1} + \Psi_i I_n; F_0 = I_n, i = 1, \dots, n-1, \end{cases} \tag{59}$$

其中

$$\Psi(q^{-1}) = \det(I_n - q^{-1}\Psi_p), F(q^{-1}) = \text{adj}(I_n - q^{-1}\Psi_p),$$

容易得到如下定理:

**定理 4** 在定理 3 条件下, 系统(1), (2)有 AR-MA 新息模型

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + \Psi(q^{-1})\varepsilon(t) + \rho, \tag{60}$$

其中多项式矩阵  $A(q^{-1}), B(q^{-1})$  和向量  $\rho$  定义为

$$\begin{cases} A(q^{-1}) = \Psi(q^{-1})I_m - H F(q^{-1})K_p q^{-1}, \\ B(q^{-1}) = H F(q^{-1})B q^{-1}, \\ \rho = \Psi(1)q_v + H F(1)(\Gamma q_w - K_p q_v), (N \geq 0). \end{cases} \tag{61}$$

**定理 5** 在定理 3 条件下,有统一的稳态白噪声新息滤波器

$$\hat{\theta}(t | t+N) = \mathbf{q}_\theta + M_N^\theta(q^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}(t+N), \boldsymbol{\theta} = \mathbf{w}, \mathbf{v}, \quad (62)$$

$$M_N^\theta(q^{-1}) = \sum_{i=0}^N M_\theta(i)q^{i-N}, N \geq 0, \quad (63)$$

且有统一的渐近稳定的带固定滞后  $N$  的白噪声 Wiener 平滑器

$$\Psi(q^{-1})\hat{\theta}(t | t+N) = K_N^y(q^{-1})\mathbf{y}(t+N) + K_N^u(q^{-1})\mathbf{u}(t+N) + \boldsymbol{\rho}_N^\theta, \quad (64)$$

其中  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{w}, \mathbf{v}$ , 且定义多项式矩阵  $K_N^y(q^{-1})$ ,  $K_N^u(q^{-1})$  和向量  $\boldsymbol{\rho}_N^\theta$  为

$$\begin{cases} K_N^y(q^{-1}) = M_N^\theta(q^{-1})A(q^{-1}), \\ K_N^u(q^{-1}) = -M_N^\theta(q^{-1})B(q^{-1}), \\ \boldsymbol{\rho}_N^\theta = \Psi(1)\mathbf{q}_\theta - M_N^\theta(1)\boldsymbol{\rho}. \end{cases} \quad (65)$$

**证** 由式(45)和(46)有非递推稳态白噪声估值器 ( $N \geq 0$ )

$$\hat{\theta}(t | t+N) = \mathbf{q}_\theta + \sum_{i=0}^N M_\theta(i)\boldsymbol{\varepsilon}(t+i). \quad (66)$$

定义多项式矩阵式(63),则可将式(66)表为式(62),它具有以新息  $\boldsymbol{\varepsilon}(t+N)$  作为输入的传递矩阵形式,故叫新息滤波器.经典 Kalman 滤波理论证明了<sup>[11]</sup>在式(57)中  $\Psi_p$  是一个稳定矩阵,即  $\Psi_p$  的所有特征值位于单位圆内.因而  $\Psi(q^{-1}) = \det(I_n - q^{-1}\Psi_p)$  是一个稳定的多项式,即以  $q$  为自变元的多项式  $\Psi(q)$  的零点全位于单位圆外.于是由式(60)有

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t+N) = \Psi^{-1}(q^{-1})[A(q^{-1})\mathbf{y}(t+N) - B(q^{-1})\mathbf{u}(t+N) - \boldsymbol{\rho}]. \quad (67)$$

将式(67)代入式(62)后,再用  $\Psi(q^{-1})$  乘式(62)两边便可得式(64)和(65).因  $\Psi(q^{-1})$  是一个稳定多项式,故估值器式(64)是渐近稳定的.注意到式(64)具有以和作为输入的传递矩阵形式,故称其为 Wiener 平滑器. 证毕.

### 5 仿真例子——Bernoulli - Gaussian 白噪声估值器 (Simulation example—Bernoulli - Gaussian white noise estimators)

Bernoulli - Gaussian 白噪声在石油地震勘探领域有重要的应用背景和实用价值<sup>[1~4]</sup>,它可用于描写地震波反射系数序列.而估计反射系数序列,对寻找、发现油田和确定油田的几何形状有重要作用. Bernoulli - Gaussian 白噪声可直观上看成取非零值

稀疏化的 Gaussian 白噪声,定义为

$$\theta(t) = b(t)g(t), \quad (68)$$

其中  $b(t)$  是取值为 1 或 0 的 Bernoulli 白噪声,取值概率为

$$P(b(t) = 1) = \lambda, P(b(t) = 0) = 1 - \lambda. \quad (69)$$

$g(t)$  是带零均值,方差为  $\sigma_g^2$  的独立于  $b(t)$  的 Gaussian 白噪声.容易求得  $\theta(t)$  有零均值和方差  $\sigma_\theta^2 = \lambda\sigma_g^2$ .带时变系数的 Bernoulli - Gaussian 白噪声定义为

$$\theta(t) = c(t)b(t)g(t). \quad (70)$$

**例** 考虑带相关噪声的时变系统

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) = & \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0.5 + \cos \frac{2\pi t}{300} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2\sin \frac{2\pi t}{300} \\ 1 \end{bmatrix} w(t), \end{aligned} \quad (71)$$

$$y(t) = [0, 1 + 0.2\sin \frac{2\pi t}{300}] \mathbf{x}(t) + v(t), \quad (72)$$

$$w(t) = (1 + 0.1\cos \frac{2\pi t}{60})b(t)g(t), \quad (73)$$

$$v(t) = 0.3w(t) + \xi(t), \quad (74)$$

其中  $\xi(t)$  是零均值,方差为  $\sigma_\xi^2 = 0.001$  独立于  $w(t)$  的 Gaussian 白噪声,  $w(t)$  是带时变系数的 Bernoulli - Gaussian 白噪声,且  $\lambda = 0.3, \sigma_g^2 = 1$ .取初值  $\hat{\mathbf{x}}(0 | -1) = \mathbf{x}(0) = 0, \Sigma(0 | -1) = 0.1I_2$ ,应用定理 1,取  $N = 1$  和  $N = 3$ .  $\hat{w}(t | t+1)$  和  $\hat{w}(t | t+3)$  的仿真结果如图 1,2 所示,其中实线端点纵标代表真实值  $w(t)$ ,圆点纵标代表平滑估值  $\hat{w}(t | t+1)$  或  $\hat{w}(t | t+3)$ .可以看到  $\hat{w}(t | t+3)$  的精度比  $\hat{w}(t | t+1)$  的高,这与理论分析结果式(19)是一致的.

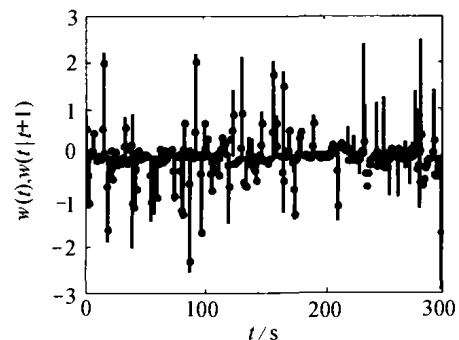


图 1 Bernoulli - Gaussian 输入白噪声  $w(t)$  和最优平滑器  $\hat{w}(t | t+1)$

Fig. 1 Bernoulli - Gaussian input white noise  $w(t)$  and optimal smoother  $\hat{w}(t | t+1)$

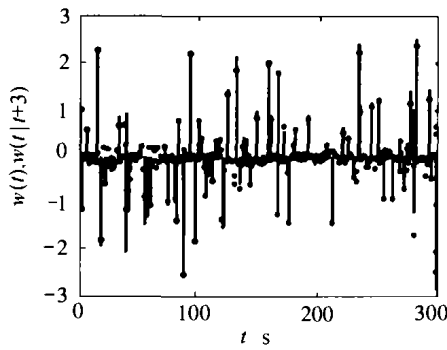


图2 Bernoulli-Gaussian 输入白噪声  $w(t)$  和最优平滑器  $\hat{w}(t|t+3)$

Fig. 2 Bernoulli-Gaussian input white noise  $w(t)$  and optimal smoother  $\hat{w}(t|t+3)$

## 6 结论(Conclusion)

基于 Kalman 滤波器和射影理论提出了通用的和统一的白噪声估计方法. 通用性在于它可处理带非零均值相关噪声的时变随机控制系统的白噪声估计问题. 统一性在于它可统一处理输入和观测白噪声估值器, 可统一处理白噪声滤波、平滑和预报问题, 且可统一处理最优和稳态白噪声估值器. 它克服了 Mendel<sup>[1-4]</sup> 的基于 Kalman 滤波的白噪声估计方法没有解决观测白噪声估计问题的局限性, 也克服了邓自立<sup>[5]</sup> 基于现代时间序列分析方法提出的稳态白噪声估计理论的局限性, 提出了通用的和统一的时变系统的最优白噪声估值器, 且推广了文献[12, 13]的结果到带非零均值的相关噪声系统, 提出了不同于文献[13]的白噪声估计新算法. 不仅在石油地震勘探信号处理<sup>[1-4]</sup> 中有重要的应用价值, 而且也作为状态和信号估计提供了一种新的途径和工具<sup>[6-10]</sup>, 具有重要的理论意义.

## 参考文献(References):

- [1] MENDEL J M. White-noise estimators for seismic data processing in oil exploration [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1977, 22(5): 694 - 706.
- [2] MENDEL J M, Kormylo J. New fast optimal white-noise estimators for deconvolution [J]. *IEEE Trans on Geoscience Electronics*, 1977, 15(1): 32 - 41.

- [3] MENDEL J M. Minimum variance deconvolution [J]. *IEEE Trans on Geoscience and Remote Sensing*, 1981, 19(3): 161 - 171.
- [4] MENDEL J M. *Optimal Seismic Deconvolution: An Estimation-based Approach* [M]. New York: Academic Press, 1983.
- [5] DENG Z L, ZHANG H S, LIU S J, et al. Optimal and self-tuning white noise estimators with applications to deconvolution and filtering problems [J]. *Automatica*, 1996, 32(2): 199 - 216.
- [6] DENG Z L, LIU Y M. Descriptor Kalman estimators [J]. *Int J of Systems Science*, 1999, 30(11): 1205 - 1212.
- [7] DENG Z L, XU Y. Descriptor Wiener state estimators [J]. *Automatica*, 2000, 36(9): 1761 - 1766.
- [8] DENG Z L. Time-domain approaches to multichannel optimal deconvolution [J]. *Int J of Systems Science*, 2000, 31(6): 787 - 796.
- [9] 邓自立. 最优滤波理论及其应用——现代时间序列分析方法 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2000. (DENG Zili. *Optimal Filtering Theory and Applications—Modern Time Series Analysis method* [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2000.)
- [10] 邓自立. 卡尔曼滤波与维纳滤波——现代时间序列分析方法 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001. (DENG Zili. *Kalman Filtering and Wiener Filtering—Modern Time Series Analysis method* [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2001.)
- [11] ANDERSON B D O, MOORE J B. *Optimal Filtering* [M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1979.
- [12] 邓自立, 许燕. 基于 Kalman 滤波的白噪声估计理论 [J]. 自动化学报, 2003, 29(1): 23 - 31. (DENG Zili, XU Yan. White noise estimation theory based on Kalman filtering [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2003, 29(1): 23 - 31.)
- [13] 邓自立. 时变系统的统一和通用的最优白噪声估值器 [J]. 控制理论与应用, 2003, 20(1): 143 - 146. (DENG Zili. Unifying and universal optimal white noise estimators for time-varying systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(1): 143 - 146.)

## 作者简介:

邓自立 (1938—), 男, 1962年毕业于黑龙江大学数学系, 现为黑龙江大学应用数学研究所和自动化系教授, 研究领域为状态估计、最优滤波、信号处理、时间序列分析等, E-mail: dzl@hlju.edu.cn;

许燕 (1965—), 女, 1998年毕业于黑龙江大学获硕士学位, 现为北京印刷学院副教授, 研究领域为卡尔曼滤波、信号处理、时间序列分析等, E-mail: yx0451@hotmail.com.