文章编号: 1000-8152(2004)04-0507-05

非线性离散系统的伴随辨识法

刘则毅[1,2], 喻文焕[2]
(1.深圳大学 应用数学系,广东 深圳 518060; 2.天津大学 数学系 南开大学-天津大学刘徽应用数学中心,天津 300072)

摘要: 对非线性离散系统辨识的研究,通常是将其转化成一个非线性优化问题.为此需要计算目标函数对参数向量的梯度,以往的方法需要求解一个矩阵差分方程,计算量颇大.依据系统输出量测值来确定含在系统中的未知参数向量,首先引进伴随状态向量,代替矩阵差分方程求解的是计算一个向量差分方程,从而大大简化计算,然后将这种梯度计算方法结合进拟牛顿信赖域法中.最后给出了应用此方法的一个实际例子,数值仿真的结果说明方法是有效的.

关键词: 离散非线性系统; 差分方程; 伴随向量; 拟牛顿信赖域方法
中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Adjoint identification approach for nonlinear discrete systems

LIU Ze-yi[1,2], YU Wen-huan[1]
(1.Department of Applied Mathematics, Shenzhen University, Shenzhen Guangdong 510806, China;
2.Center for Applied Mathematics, Nankai University & Tianjin University, Department of Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: The usual identification approach to nonlinear discrete systems is to use nonlinear optimization methods to estimate the parameter vector. Thus, the gradient of a cost functional with respect to the parameter vector must be computed and then a first order matrix difference equation should be solved with the commonly used methods. The discrete-time system considered in the paper is described by a first order vector difference equation. One of the identification objects is to estimate unknown parameter vector contained in the system based on the measurement outputs of the system. First, a first order vector difference equation was solved to reduce the computational load after introducing an adjoint vector. Then, an algorithm was presented combining the adjoint identification approach with a Quasi-Newton trust region algorithm, which is a global convergence Quasi-Newton method. Finally, an example was given to illustrate the effectiveness of this method.

Key words: discrete nonlinear system; difference equation; adjoint vector; Quasi-Newton trust region method

1 引言(Introduction)

对非线性离散系统辨识的研究,一直受到人们的特别关切,一直有大量的文章出现在期刊上,总结研究成果的书也不少,其中影响较大的有文献[1~3].

本文考虑一般非线性离散系统,它由一个非线性一阶 n 维向量差分方程描述,系统的输出也是一个含系统状态的 m 维非线性向量,系统中含有未知的 p 维参数向量.系统辨识的任务之一是依据系统的输出来估计模型的未知参数.

对于上述问题,目前有两大类处理方法:一是将有关函数线性化,然后按线性问题处理,显然这种方法的精度较差;另一类方法是将问题转化成非线性优化问题,由此衍生的有最速下降法、共轭梯度法、Guass-Newton 法、Guass-Newton-Levenberg-Marguardt 法、拟牛顿法及牛顿法等.这些方法都要求计算目标泛函对参数向量的梯度,为此必须求解一个维数为 $n \times p$ 的矩阵差分方程,当参数个数 p 很大时,计算量是很大的.

为减少计算量,引进与状态向量同维的伴随向量,它满足一个一阶向量线性差分方程,借助于这个伴随向量便可计算出目标泛函对参数向量的梯度.由于无需解矩阵差分方程,从而大大简化了计算.

2 问题的描述与主要结果(Description of the problem and the main result)

考虑下列非线性系统

收稿日期:2003-03-27; 收修改稿日期:2003-10-23.
基金项目:南开大学天津大学刘徽应用数学中心与国家自然科学基金项目(70171004).

$$x(t+1) = f(x(t),t;q),\ x(0) = x_0,\ t \in \bar{\mathbb{N}}. \tag{1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量，$\bar{\mathbb{N}} \equiv \{0,1,2,\cdots\}$，$q \in \mathbb{R}^p$ 是参数向量，$f:\mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ 是已知函数.

系统的输出是

$$z(t) = g(x(t);q),\ 0 \leqslant t \leqslant M. \tag{2}$$

$g:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ 是已知函数.

本文中用 $\mathbb{R}^k$ 表示 k 维欧氏空间，$\mathbb{R}$ 表示实数域.

作者的目标是依据实际量测输出 $z(t)$ $(t = 0, 1,\cdots,M)$ 来确定未知的参数向量 q.

根据文献[4]，在系统(1)中，给定 $q \in \mathbb{R}^p$，系统(1)就有唯一解 $x(t)$. 为了表示解 $x(t)$ 对 q 的依赖关系，记 $x(t) = x(t;q)$，有时为简洁还记 $x(q)$ 或 x .然后可相应计算出 $g(x(t;q);q)$.

于是可将确定 q 的任务，转化成为下列目标泛函的极小化问题：

$$J(q) \equiv \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{M} \| g(x(t;q);q) - z(t) \|^2 \to \min. \tag{3}$$

为了使用非线性优化方法求解(3)，必须计算 $J(q)$ 对 q 的梯度：

$$j(q) \equiv \operatorname{grad} J(q) \in \mathbb{R}^p. \tag{4}$$

常规方法是必须求出系统(1)的切线方程，它是一个 $n \times p$ 的矩阵差分方程.本文的主要结果就是简化此计算，现将其叙述如下：

定理 1 设 $f:\mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ 与 $g:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ 是连续可微函数，则

$$j(q) = \operatorname{grad} J(q) = \sum_{t=0}^{M}\Big\{\Big[\frac{\partial f(x(t;q),t;q)}{\partial q}\Big]^{\mathrm{T}} p(t+1) + \Big[\frac{\partial g(x(t;q);q)}{\partial q}\Big]^{\mathrm{T}}[g(x(t;q);q) - z(t)]. \tag{5}$$

其中 $x(t;q)$ 是(1)的解，$\dfrac{\partial f}{\partial q}$ 和 $\dfrac{\partial g}{\partial q}$ 分别是 f 与 g 的 Jacobi 矩阵，分别为 $n \times p$ 维和 $m \times p$ 维，$p(t) \in \mathbb{R}^n$ 是引进的伴随状态向量，它由下式确定

$$\begin{cases} p(t) = \Big[\dfrac{\partial f(x(t;q),t;q)}{\partial x}\Big]^{\mathrm{T}} p(t+1) + \\ \qquad \Big[\dfrac{\partial g(x(t;q);q)}{\partial x}\Big]^{\mathrm{T}}[g(x(t;q)) - z(t)], \\ p(M+1) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

其中 $t \in \bar{\mathbb{N}}$，$x(t;q)$ 是系统(1)的解.

定理的证明将在下节给出.

3 主要结果的证明(Proof of the main result)

为证明定理 1，要做一些数学预备工作.首先，从文献[4]引入下列结果：

引理 1 若 $f:\mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ 是连续可微的，则系统(1)的解 $x(t;q)$ 是 q 的连续函数，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \eta(\varepsilon) > 0$，使得当 $\| q - q_0 \| < \eta$ 时，便有

$$\| x(t;q) - x(t;q_0) \| < \varepsilon,\ t \in \bar{\mathbb{N}}.$$

定义 1 称向量值函数 $w:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ 是 Gâteaux 可微的，如果 $\forall h \in \mathbb{R}^k$，$\theta \in \mathbb{R}$，极限

$$\lim_{\theta \to 0}\frac{1}{\theta}[w(x + \theta h) - w(x)] = L \tag{7}$$

存在.记 $L = wf(x,h)$，称其为 w 在 x 点沿 h 方向的 Gâteaux 导数.

注 1 当 $\mathrm{d}w(x,h)$ 关于 x 为连续，关于 h 为线性时，可以证明 $\mathrm{d}w(x,h) = w'(x)h$，此处 $w'(x)$ 是 w 在 x 处的全导数.

定理 2 若 $f:\mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ 是连续可微的，则 $\forall q \in \mathbb{R}^p$，系统(1)的解 $x(t;q)$ 关于 q 是 Gâteaux 可微的；且 $\forall h \in \mathbb{R}^p$，Gâteaux 导数关于 q 连续且关于 h 是线性的，因此 $\mathrm{d}x(q,h) = x'(q)h$. 若记 $\dot{x} = x'(q)h$，$\dot{x}$ 由下式确定：

$$\dot{x}(t+1) = \frac{\partial f(x(t;q),t;q)}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial f(x(t;q),t;q)}{\partial q}h,\ t \in \bar{\mathbb{N}}. \tag{8}$$

$$\dot{x}(0) = 0. \tag{9}$$

其中 $x(t;q)$ 是系统(1)的解.

证 在所给的条件下，系统(1)存在唯一解，且由引理 1 知 $x(t;q)$ 连续依赖 q. 进一步，还有 $x(t;q)$ 关于 q Gâteaux 可微，Gâteaux 导数 $\mathrm{d}x(q,h)$ 关于 q 连续且关于 h 线性(证明略). 下面证明 $\dot{x}(t) = x'(t;q)h$ 满足式(8).

将 q 与 $\bar{q} = q + \theta h (\theta \in \mathbb{R})$ 代入到系统(1)中，相应可得到解 $x(t) = x(t;q)$ 及 $\bar{x}(t) = x(t;\bar{q})$，即 $x(t)$ 满足系统(1)，而 $\bar{x}(t)$ 满足

$$\bar{x}(t+1) = f(\bar{x}(t),t;\bar{q}),\ \bar{x}(0) = x_0. \tag{10}$$

式(10)减去式(1)，再除以 $\theta(\theta \neq 0)$，便有

$$\frac{1}{\theta}[\bar{x}(t+1) - x(t+1)] =$$

$$\frac{1}{\theta}[f(\bar{x}(t),t;\bar{q}) - f(x(t),t;q)] =$$

$$\frac{1}{\theta}[f(\bar{x}(t),t;\bar{q}) - f(x(t),t;\bar{q})] -$$

$$\frac{1}{\theta}[f(x(t),t;\bar{q}) - f(x(t),t;q)] =$$

$$\int_0^1 \frac{\partial f(x(t)+\tau(\bar{x}(t)-x(t)),t;\bar{q})}{\partial x}\frac{\bar{x}(t)-x(t)}{\theta}\mathrm{d}\tau +$$
$$\int_0^1 \frac{\partial f(x(t),t;q+\tau(\bar{q}-q))}{\partial q}\frac{\bar{q}-q}{\theta}\mathrm{d}\tau.$$

式中，使用了积分形式的中值定理. 令 $\theta \to 0$, 由于 $x(t;q)$ 关于 q 可微，因而 $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}[\bar{x}(t)-x(t)] = \dot{x}(t)$. 由引理 1 及关于 f 的假定，有

$$\dot{x}(t+1) =$$
$$\int_0^1 \frac{\partial f(x(t),t;q)}{\partial x}\dot{x}(t)\mathrm{d}\tau + \int_0^1 \frac{\partial f(x(t),t;q)}{\partial q}h\mathrm{d}\tau =$$
$$\frac{\partial f(x(t),t;q)}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial f(x(t),t;q)}{\partial q}h,$$

此即为式(8). $\dot{x}(0) = 0$ 是显然的.

定理 1 的证明　若 $\forall h \in \mathbb{R}^p$, 数 $\theta \in \mathbb{R}$, 令 $\bar{q} = q + \theta h$, $x(t) = x(t;q)$, $\bar{x}(t) = x(t;\bar{q})$, 由 $J(q)$ 的定义(3)有

$$\frac{1}{\theta}[J(q+\theta h) - J(q)] =$$
$$\frac{1}{2\theta}\sum_{t=0}^{M}\{\| g(x(t;\bar{q});\bar{q}) - z(t)\|^2 -$$
$$\| g(x(t;q);q) - z(t)\|^2\} =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{M}\{[\langle g(\bar{x}(t);\bar{q})-z(t),\ g(\bar{x}(t);\bar{q})-z(t)\rangle -$$
$$\langle g(x(t);\bar{q}) - z(t), g(\bar{x}(t);\bar{q}) - z(t)\rangle]/\theta +$$
$$[\langle g(x(t);\bar{q}) - z(t), g(\bar{x}(t);\bar{q}) - z(t)\rangle -$$
$$\langle g(x(t);q) - z(t), g(\bar{x}(t);\bar{q}) - z(t)\rangle]/\theta +$$
$$[\langle g(x(t);q) - z(t), g(\bar{x}(t);\bar{q}) - z(t)\rangle -$$
$$\langle g(x(t);q) - z(t), g(x(t);\bar{q}) - z(t)\rangle]/\theta +$$
$$[\langle g(x(t);q) - z(t), g(x(t);\bar{q}) - z(t)\rangle -$$
$$\langle g(x(t);q) - z(t), g(x(t);q) - z(t)\rangle]/\theta\}.$$

其中 $\langle a,b\rangle$ 表示 a 与 b 在欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 中的内积，令 $\theta \to 0$, 便得到

$$J'(q)h =$$
$$\sum_{t=0}^{M}\left\{\langle\frac{\partial g(x(t;q);q)}{\partial x}\dot{x}(t;q), g(x(t);q) - z(t)\rangle +\right.$$
$$\left.\langle\frac{\partial g(x(t);q)}{\partial q}h, g(x(t);q) - z(t)\rangle\right\} =$$
$$\sum_{t=0}^{M}\langle\left[\frac{\partial g(x(t;q);q)}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}}[g(x(t);q) - z(t)], \dot{x}(t)\rangle +$$
$$\sum_{t=0}^{M}\langle\left[\frac{\partial g(x(t;q);q)}{\partial q}\right]^{\mathrm{T}}[g(x(t);q) - z(t)], h\rangle. \tag{11}$$

在上式中，利用了条件 $\dot{x}(0) = 0$, 再利用方程(6), 则式(11)的第一项

$$\sum_{t=1}^{M}\langle\left[\frac{\partial g(x(t;q);q)}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}}[g(x(t;q);q)-z(t)], \dot{x}(t)\rangle =$$
$$\sum_{t=0}^{M}\langle p(t)-\left[\frac{\partial f(x(t;q),t;q)}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}}p(t+1), \dot{x}(t)\rangle =$$
$$\sum_{t=0}^{M}\langle p(t), \dot{x}(t)\rangle - \sum_{t=0}^{M}\langle p(t),$$
$$\frac{\partial f(x(t-1),t-1;q)}{\partial x}\dot{x}(t-1)\rangle =$$
$$\sum_{t=0}^{M}\langle \dot{x}(t) - \frac{\partial f(x(t-1),t-1;q)}{\partial x}\dot{x}(t-1), p(t)\rangle =$$
$$\sum_{t=0}^{M}\langle\frac{\partial f(x(t-1),t-1;q)}{\partial q}h, p(t)\rangle =$$
$$\sum_{t=0}^{M}\langle\left[\frac{\partial f(x(t-1),t-1;q)}{\partial q}\right]^{\mathrm{T}}p(t), h\rangle =$$
$$\sum_{t=0}^{M}\langle\left[\frac{\partial f(x(t),t;q)}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}}p(t+1), h\rangle. \tag{12}$$

在上式推导中，用了 $\dot{x}(0) = p(M+1) = 0$ 及式(8), 再将式(12)代入到式(8)中，有

$$J'(q)h =$$
$$\sum_{t=0}^{M}\langle\left[\frac{\partial f(x(t),t;q)}{\partial q}\right]^{\mathrm{T}}p(t+1) +$$
$$\left[\frac{\partial g(x(t);q)}{\partial q}\right]^{\mathrm{T}}[g(x(t);q) - z(t)], h\rangle, \tag{13}$$

由此便可得到

$$j(q) = \sum_{t=0}^{M}\left[\frac{\partial f(x(t),t;q)}{\partial q}\right]^{\mathrm{T}}p(t+1) +$$
$$\left[\frac{\partial g(x(t);q)}{\partial q}\right]^{\mathrm{T}}[g(x(t);q) - z(t)], \tag{14}$$

此即为式(5).

4 拟牛顿信赖域法(Quasi-Newton trust-region method)

拟牛顿法是一种高效的非线性优化方法，它无需计算 Hesse 矩阵，但却有牛顿法的二阶收敛速度，然而它如同牛顿法一样，是局部收敛法. 信赖域法是克服局部收敛的一种方法，即不论初始点给在何处，它都能保证迭代序列收敛到某个极限点上，依据文献[5]，结合优化问题(3)，给出以下的算法：

步 1　给出 $q_0 \in \mathbb{R}^p$, $B_0 \in \mathbb{R}^{p\times p}$ 且正定，$\Delta_0 > 0, \epsilon \geqslant 0, \beta_1 > 1 > \beta_2 > 0, 0 < \beta_3 < \beta_4 < 1$. 令 $k = 0$, 再按公式(5)计算

$$j_0 = \mathrm{grad}J(q_0);$$

步 2 如果 $\| j_k \| \leqslant \varepsilon$, 则停止, 否则解优化子问题

$$\min_{d \in \mathbb{R}^p, \| d \| \leqslant \Delta_k} \varphi_k(d) = j_k^{\mathrm{T}} d + \frac{1}{2} d^{\mathrm{T}} B_k d, \quad (15)$$

记 d_k 是问题(15)的解;

步 3 根据公式(19)计算 r_k, 令

$$q_{k+1} = \begin{cases} q_k + d_k, & 若\ r_k > 0, \\ q_k, & 若\ r_k \leqslant 0. \end{cases} \quad (16)$$

再选取 Δ_{k+1} 使其满足

$$\Delta_{k+1} \in \begin{cases} [1,\beta_1] \| d_k \|, & 若\ r_k \geqslant \beta_2, \\ [\beta_3,\beta_4] \| d_k \|, & 若\ r_k < \beta_2. \end{cases} \quad (17)$$

其中 $[1,\beta_1] \equiv \{\beta \mid 1 \leqslant \beta \leqslant \beta_1\}$ 及 $[\beta_3,\beta_4] \equiv \{\beta \mid \beta_3 \leqslant \beta_4\}$;

步 4 按公式(5)计算 $j_{k+1} = \operatorname{grad} J(q_{k+1})$, 再按下式计算 $B_{k+1}, k := k+1$ 转步 2.

$$B_{k+1} = \begin{cases} B_k + \dfrac{y_k y_k^{\mathrm{T}}}{y_k^{\mathrm{T}} s_k} - \dfrac{B_k s_k s_k^{\mathrm{T}} B_k}{s_k^{\mathrm{T}} B_k s_k}, & 若\ q_{k+1} \neq q_k, \\ B_k + 2[J(q_k + d_k) - J(q_k) - & \\ d_k^{\mathrm{T}} j_k - \dfrac{1}{2} d_k^{\mathrm{T}} B_k d_k] \dfrac{d_k d_k^{\mathrm{T}}}{\| d_k \|^4}, & 若\ q_{k+1} = q_k, \end{cases} \quad (18)$$

其中

$$\begin{cases} y_k = j_{k+1} - j_k, \ s_k = B_k^{-1} y_k, \\ r_k = \mathrm{Are} d_k / \mathrm{Pre}\ d_k, \\ \mathrm{Are} d_k = J(q_k) - J(q_k + d_k), \\ \mathrm{Pre} d_k = \varphi_k(0) - \varphi_k(d_k), \end{cases} \quad (19)$$

为求解优化子问题(15), 从文献[5]引入

引理 2 d_k^* 是子问题(15)

$$\varphi_k(d_k^*) = \min_{d \in \mathbb{R}^p, \| d \| \leqslant \Delta_k} \varphi_k(d) = j_k^{\mathrm{T}} d + \frac{1}{2} d^{\mathrm{T}} B_k d$$

的解: 当且仅当存在 $\lambda_k^* \geqslant 0$, 使得

$$(B_k + \lambda_k^* I) d_k^* = - j_k, \quad (20)$$

$$\lambda_k^* (\Delta_k - \| d_k^* \|) = 0, \quad (21)$$

而且 $B_k + \lambda_k^* I$ 是正定矩阵.

由式(20)可以确定 $\| d_k^* \| = \| (B_k + \lambda_k^* I)^{-1} j_k \| \leqslant \Delta_k$. 当 $\| d_k^* \| < \Delta_k$ 时, 由式(21)知 $\lambda_k^* = 0$; 否则 $\| (B_k + \lambda_k^* I)^{-1} j_k \| = \Delta_k$. 为了确定 λ_k^*, 必须求解非线性代数方程

$$(B_k + \lambda I)^{-1} j_k \| = \Delta_k, \quad (22)$$

但方程(22)的性质不太好, 可将其转化成等价方程

$$\Psi(\lambda) \equiv \frac{1}{\| (B_k + \lambda I)^{-1} j_k \|} - \frac{1}{\Delta_k} = 0, \quad (23)$$

再用牛顿法求解上述方程, 即给定 $\lambda_0 > 0$, 置 $l = 0$, 迭代计算

$$\lambda_{l+1} = \lambda_l - \frac{\Psi(\lambda_l)}{\Psi'(\lambda_l)}, \quad (24)$$

容易算出

$$\Psi'(\lambda) = \frac{j_k^{\mathrm{T}} H(\lambda)^{-3} j_k}{\| H(\lambda)^{-1} j_k \|^3}, \quad (25)$$

其中 $H(\lambda) = B_k + \lambda I$.

应用上列算法给出一个算例:

例 给定离散系统

$$\begin{cases} x(t+1) = \\ a_1 x(t) \sin x(t) + \left[2 + a_2 \dfrac{x(t)}{1 + x^2(t)}\right] \cos x(t), \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (26)$$

系统的输出量测为

$$z(t) = x(t)[1 + a_3 \sin x(t)], \quad (27)$$

待定参数为 $q = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$.

计算中, 设实际值 $a_1 = 1$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = 0.4$, 参数 $\beta_1 = 1.1$, $\beta_2 = 0.8$, $\beta_3 = 0.3$, $\beta_4 = 0.7$, $M = 30$, $B_0 = 3 * E$, E 为 3 阶单位矩阵.

初值为 $a_1 = 1.2$, $a_2 = 0.3$, $a_3 = 0.6$ 时, 循环次数为 68, 辨识的结果 $a_1 = 1.0002$, $a_2 = 0.5003$, $a_3 = 0.3999$.

初值为 $a_1 = 1.3$, $a_2 = 0.7$, $a_3 = 0.1$ 时, 循环次数为 53, 辨识的结果 $a_1 = 1.0003$, $a_2 = 0.5004$, $a_3 = 0.3999$.

初值为 $a_1 = 0.8$, $a_2 = 0.3$, $a_3 = 0.6$ 时, 循环次数为 34, 辨识的结果 $a_1 = 0.9999$, $a_2 = 0.4999$, $a_3 = 0.4001$.

初值为 $a_1 = 1.6$, $a_2 = 0.1$, $a_3 = 0.8$ 时, 循环次数为 73, 辨识的结果 $a_1 = 1.0003$, $a_2 = 0.5004$, $a_3 = 0.3999$.

4 结论(Conclusion)

作者研究了依据系统输出量测值来确定含在系统中的未知参数向量的辨识问题, 引进伴随状态向量, 用求解一个向量差分方程代替求解矩阵差分方程的计算, 从而大大简化了计算. 将这种梯度计算方法结合进拟牛顿信赖域法中, 算法是全局收敛的, 数值仿真的结果说明方法是有效的.

参考文献(References):

[1] GOODWIN G C, PAYNE R L. *Dynamic System Indentification, Ex-*

periment Design and Data Analysis [M]. New York: Academic Press, 1977.

[2] LJUNG L. *System Indentification: Theory for the User* [M]. Englewwod Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1987.

[3] WALTER E, PRONZATO L. *Indentification of Parametric Models from Experimental Data* [M]. Paris, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1997.

[4] AGARWAL R P. *Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications* [M]. 2nd ed. New York: MarcelDekker Inc, 2000.

[5] 袁亚湘,孙文瑜.最优化理论方法[M].北京:科学出版社,1997.
(YUAN Yaxiang, SUN Wenyu. *Optimization, Theory and Methods* [M]. Beijing: Science Press, 1997.)

作者简介:

刘则毅　(1958 —),男,博士,教授,现在天津大学理学院数学系任教,主要从事智能算法、计算机图形算法等方面的教学和研究工作,E-mail: zeyiliu@public.tpt.tj.cn;

喻文焕　(1940 —),教授,1989年毕业于美国康涅狄克大学,获得博士学位,主要从事系统辨识、最优控制、偏微分方程反问题的理论与应用研究.

下　期　要　目