第21卷第4期
2004年8月
控制理论与应用
Control Theory & Applications
Vol.21 No.4
Aug. 2004

文章编号: 1000-8152(2004)04-0607-04

类 Lyapunov 非线性系统降维观测器设计

朱芳来
(桂林电子工业学院 计算机系,广西 桂林 541004)

摘要: 对一般形式的非线性系统,引入了 Lyapunov 稳定意义下观测器存在性的概念,讨论了降维观测器的存在性.指出若相对于一特别形式的 Lyapunov 函数在 Lyapunov 稳定意义下存在全维观测器,则还存在降维观测器,并给出了降维观测器之设计方法.为说明该方法的指导意义,用该方法相对于 Lipschitz 非线性系统给出了降维观测器设计,并对该设计相对于一具体模型进行了仿真分析,仿真结果表明了该设计方法的正确性及实用性.

关键词: 非线性系统; 降维观测器; 全维观测器; Lyapunov 函数

中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Design of reduced-order observers for nonlinear systems via Lyapunov-like method

ZHU Fang-lai
(Computer Department, Guilin University of Electronic and Technology, Guilin Guangxi 541004, China)

Abstract: The existence and design methods for reduced-order observers for nonlinear systems are presented. After the concept of the existence of observer under the meaning of Lyapunov stability was introduced, the existence of reduced-order observer was studied based on the introduced concept. The conclusion was reached that if there is a full-order observer under the meaning of Lyapunov stability with respect to the special Lyapunov function, there also exists a reduced-order one with the same assumptions. A reduced-order observer design for Lipschitz nonlinear systems was then developed and the results of the simulation to an actual model showed that the design method has good performances.

Key words: nonlinear systems; reduced-order observer; full-order observer; Lyapunov function

1 引言(Introduction)

非线性系统观测器设计在最近几十年已成为非常活跃的研究领域.与线性系统不同,对非线性系统不存在常规的方法来设计观测器,因而对于不同的情形,提出了不同的设计方法.通常,对非线性观测器的研究可归为两类.一类是坐标变换法,亦称标准型方法.该方法通过坐标变换把原系统变换成一标准型,然后在新的坐标系下用线性系统观测器的设计方法来完成非线性系统观测器的设计[1~4].如 Kemer 等[1]及 Xiao Hua 和 Gao[2]试图寻找一坐标变换以使状态估计误差动态方程在新的坐标系下为线性的,他们分别给出了该坐标变换存在的充分必要条件.另一类方法称为类 Lyapunov 方法(Lyapunov-like method),该方法通常不需要对系统进行坐标变换,其基本思想是基于 Lyapunov 稳定性理论[5~7],该类方法几乎在各种情形下的观测器设计中被直接或间接地应用到.对具有输出延时的非线性系统进行观测器设计,是近期被讨论的一种设计方法[8].近几年,智能控制一些方法和手段被引用到非线性系统观测器设计之中,如对模糊控制系统与模糊观测器的研究[9],基于神经网络的非线性系统观测器设计方法[10]等.

2 降维观测器研究(Study of reduced-order observer)

2.1 非线性系统观测器的一般形式(General form of nonlinear observer)

设非线性系统描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \\ y = h(x). \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$ 分别为系统的状态,输

收稿日期:2002-08-19; 收修改稿日期:2003-10-20.
基金项目:广西区自然科学基金项目(0310003,0339069);桂教科研项目([2003]22).

入和输出，$f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 和 $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$.

文献[11]指出非线性系统(1)观测器所具有的一般形式如下：

$$\dot{\hat{x}}=f(\hat{x},u)+k(\tilde{y},u,t).\tag{2}$$

其中 $\tilde{y}=y-h(\hat{x})$，而 $k:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 为连续可微分，且满足 $k(0,u,t)=0$. 观测器设计的关键就是如何寻找这样的 k，使 $\hat{x}$ 渐近收敛到 x.

定义 1 考虑系统(1)与系统(2)的误差方程

$$\dot{\tilde{x}}=f(x,u)-f(\hat{x},u)-k(\tilde{y},u,t).$$

其中 $\tilde{x}=x-\hat{x}$. 如果存在 Lyapunov 函数 $V(\tilde{x},t)$ 保证以上的误差方程具有渐近稳定的平衡点 0，则称系统(2)是系统(1)的相对于 Lyapunov 函数 $V(\tilde{x},t)$ 在 Lyapunov 稳定意义下的观测器. 这类观测器的讨论方法，通常称为类 Lyapunov 方法.

2.2 降维观测器之存在性(Existence of reduced-order observer)

考虑具有线性输出的非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,u),\\ y=Cx.\end{cases}\tag{3}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n,u\in\mathbb{R}^m,y\in\mathbb{R}^p$ 分别为系统的状态，输入和输出，$f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$，$C\in\mathbb{R}^p$，为讨论方便，不妨设 $C=(I_p\quad 0)$. 观测器(2)与系统(3)的误差方程为

$$\dot{\tilde{x}}=f(x,u)-f(\hat{x},u)-k(\tilde{y},u,t).\tag{4}$$

其中 $\tilde{x}=x-\hat{x}$.

定理 1 对非线性系统(3)，如果存在向量函数 $k:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ 及正定矩阵

$$P=\begin{bmatrix}P_1 & P_2\\ P_2^{\mathrm{T}} & P_3\end{bmatrix}.$$

其中 $P_1\in\mathbb{R}^{p\times p},P_2\in\mathbb{R}^{p\times(n-p)}$ 及 $P_3\in\mathbb{R}^{(n-p)\times(n-p)}$，使系统(2)是系统(3)相对于函数

$$V(x,t)=\tilde{x}^{\mathrm{T}}P\tilde{x}\tag{5}$$

在 Lyapunov 稳定意义下的全维观测器，则系统(3)还具有 $n-p$ 维 Lyapunov 稳定意义下的降维观测器，其观测器形式如下

$$\begin{cases}\hat{x}_1=y,\\ \dot{\hat{z}}_2=(L\quad I_{n-p})f(\begin{pmatrix}y\\ \hat{z}_2-Ly\end{pmatrix},u),\\ \hat{x}_2=\hat{z}_2-Ly.\end{cases}\tag{6}$$

其中 $L=P_3^{-1}P_2^{\mathrm{T}}$.

证 作变换 $z=Tx$，其中 $T=\begin{pmatrix}I_p & 0\\ L & I_{n-p}\end{pmatrix}$，则系统(3)等价为

$$\begin{cases}\dot{z}_1=\dot{x}_1=(I_p\quad 0)f(\begin{pmatrix}y\\ z_2-Ly\end{pmatrix},u),\\ \dot{z}_2=(L\quad I_{n-p})f(\begin{pmatrix}y\\ z_2-Ly\end{pmatrix},u).\end{cases}\tag{7}$$

系统(7)的第二项与系统(6)的误差方程为

$$\dot{\tilde{z}}_2=(L\quad I_{n-p})[f(\begin{pmatrix}y\\ z_2-Ly\end{pmatrix},u)-f(\begin{pmatrix}y\\ \hat{z}_2-Ly\end{pmatrix})].\tag{8}$$

其中 $\tilde{z}_2=z_2-\hat{z}_2$. 考虑 Lyapunov 函数

$$V(\tilde{z}_2,t)=\tilde{z}_2^{\mathrm{T}}P_3\tilde{z}_2.\tag{9}$$

考虑到 $\tilde{z}_2=\tilde{x}_2$，故有

$$V(\tilde{z}_2,t)=\tilde{x}_2^{\mathrm{T}}P_3\tilde{x}_2=(0\quad\tilde{x}_2^{\mathrm{T}})P\begin{pmatrix}0\\ \tilde{x}_2\end{pmatrix}=V(\begin{pmatrix}0\\ \tilde{x}_2\end{pmatrix},t).$$

Lyapunov 函数(9)沿着误差方程(8)的微分是

$$\dot{V}=2\tilde{z}_2^{\mathrm{T}}P_3(L\quad I_{n-p})[f(\begin{pmatrix}y\\ z_2-Ly\end{pmatrix},u)-f(\begin{pmatrix}y\\ \hat{z}_2-Ly\end{pmatrix})].\tag{10}$$

考虑由式(5)所决定的 $V(\tilde{x},t)$ 沿着全维观测器的误差方程(4)的微分，并由定义1知，$\dot{V}$ 为负定，即存在一个连续的非减标量函数 $\gamma(\|\tilde{x}\|)$，其中 $\gamma(0)=0$，使得对任意的 $t\geqslant t_0$ 和 $\tilde{x}\neq 0$，

$$\dot{V}=2\tilde{x}^{\mathrm{T}}P[f(x,u)-f(\hat{x},u)-k(\tilde{y},u,t)]\leqslant-\gamma(\|\tilde{x}\|)<0$$

成立.

对上式令 $\tilde{x}=(0\quad\tilde{x}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(0\quad\tilde{z}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，并考虑到此时有

$$k(\tilde{y},u,t)=k(0,u,t)=0,$$

得

$$\begin{aligned}&\dot{V}(\tilde{z}_2,t)=V(\begin{pmatrix}0\\ \tilde{x}_2\end{pmatrix},t)=\\ &2\tilde{x}_2^{\mathrm{T}}P_3(L\quad I_{n-p})[f(\begin{pmatrix}y\\ x_2\end{pmatrix},u)-f(\begin{pmatrix}y\\ \hat{x}_2\end{pmatrix},u)]=\\ &2\tilde{z}_2^{\mathrm{T}}P_3(L\quad I_{n-p})[f(\begin{pmatrix}y\\ z_2-Ly\end{pmatrix},u)-\\ &f(\begin{pmatrix}y\\ \hat{z}_2-Ly\end{pmatrix},u)]\leqslant-\gamma(\|\tilde{z}_2\|)<0.\end{aligned}$$

结合上式和(10)知，Lyapunov 函数(9)沿着降维误差方程(8)的微分为负定有界，于是由定义1得到系统(6)是系统(3)Lyapunov 稳定意义下的观测器之结论. 证毕.

3　应用及其仿真(Application and simulation)

上一节,在一定的意义下,对一般形式的非线性系统降维观测器的存在性及其设计方法进行了讨论.指出如果在 Lyapunov 稳定意义下相对于 $V(x,t)=x^{\mathrm T}Px$ 这一特别形式的 Lyapunov 函数存在全维观测器,则在同样意义下还存在降维观测器,其中 P 为一正定矩阵.本节基于上节的结论,对 Lipschitz 非线性系统进行降维观测器设计讨论,然后,对一具体模型进行降维观测器设计仿真分析.

3.1　对 Lipschitz 非线性系统的应用(Application for Lipschitz nonlinear systems)

考虑如下形式的 Lipschitz 非线性系统:

$$\begin{cases}\dot x = Ax+\Phi(x,u),\\ y=Cx.\end{cases}\qquad(11)$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$ 为状态,$u\in\mathbb{R}^m$ 为系统输入,$y\in\mathbb{R}^p$ 为系统输出.而 $\Phi(x,u)$ 是具有 Lipschitz 常数 γ 的 Lipschitz 函数,即满足

$$\|\Phi(x,u)-\Phi(\hat x,u)\|\leqslant\gamma\|x-\hat x\|,$$

$$\forall x,\hat x\in\mathbb{R}^n,u\in\in\mathbb{R}^m.$$

假设 (A,C) 可观测.

在文献[6]中,给出了系统(11)如下形式的全维观测器设计方法

$$\dot{\hat x}=A\hat x+\Phi(\hat x,u)+K(y-C\hat x).\qquad(12)$$

定理 2[6]　如下形式的代数 Riccati 方程

$$(A-KC)^{\mathrm T}P+P(A-KC)+\gamma^2PP+I+\varepsilon I=0,\qquad(13)$$

对某个正数 ε 具有正定矩阵解 P,则系统(12)为系统(11)的一个全维观测器.

对 A 及 Riccati 方程(13)的正定解 P 进行如下形式的矩阵分块

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}P_1&P_2\\P_2^{\mathrm T}&P_3\end{pmatrix}.$$

其中 $A_{11},P_1\in\mathbb{R}^{p\times p},A_{12},P_2\in\mathbb{R}^{p\times(n-p)},A_{21}\in\mathbb{R}^{(n-p)\times p}$ 和 $A_{22},P_3\in\mathbb{R}^{(n-p)\times(n-p)}$.记

$$L=P_3^{-1}P_2^{\mathrm T}.\qquad(14)$$

从定理 2 的证明[6]可以看出,系统(12)是 Lyapunov 稳定意义下相对于 Lyapunov 函数 $V(x,t)=x^{\mathrm T}Px$ 的观测器.由上一节讨论,易得如下结论.

定理 3　设 $C=(I_p\quad 0)$,则在定理 2 同样的前提条件下,系统(11)还具有 $n-p$ 维降维观测器,该降维观测器具有如下形式

$$\begin{cases}\hat x_1=\hat z_1=y,\\ \dot{\hat z}=(A_{22}+LA_{12})\hat z_2+[L(A_{11}-A_{12}L)+A_{21}-\\ \qquad A_{22}L]y+(L\quad I_{n-p})\Phi(\begin{pmatrix}y\\ \hat z_2-Ly\end{pmatrix},u),\\ \hat x_2=\hat z_2-Ly.\end{cases}$$

其中 L 由式(14)确定.

证　由定理 2 和定理 1 知,系统(11)的降维观测器存在,且降维观测器微分方程表达式部分为

$$\begin{aligned}\dot{\hat z}_2&=(L\quad I_{n-p})(A\begin{pmatrix}y\\ \hat z_2-Ly\end{pmatrix}+\Phi(\begin{pmatrix}y\\ \hat z_2-Ly\end{pmatrix},u))=\\ &(A_{22}+LA_{12})\hat z_2+[L(A_{11}-A_{12}L)+A_{21}-\\ &A_{22}L]y+(L\quad I_{n-p})\Phi(\begin{pmatrix}y\\ \hat z_2-Ly\end{pmatrix},u).\end{aligned}$$

证毕.

3.2　仿真分析(Simulation analysis)

该例取自一实际控制对象——具有外卷连接点的单连接操纵杆,外卷连接点由 DC 发动机驱动.该系统建模后为如下 Lipschitz 非线性系统:

$$\begin{cases}\dot x=Ax+f(x)+g(y)u,\\ y=Cx.\end{cases}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-48.6&-1.26&48.6&0\\0&0&0&10\\1.95&0&-1.95&0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}^{\mathrm T},$$

$$f(x)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-0.333\sin x_1\end{bmatrix},\ g=\begin{bmatrix}0\\21.6\\0\\0\end{bmatrix}.$$

于是对本例,$\Phi(x,u)=gu(t)+f(x)$ 且 $\gamma=0.333$.图 1 为仿真结果,限于篇幅,只给出了状态 x_4 的仿真图.从仿真图分析,状态观测效果较为满意.

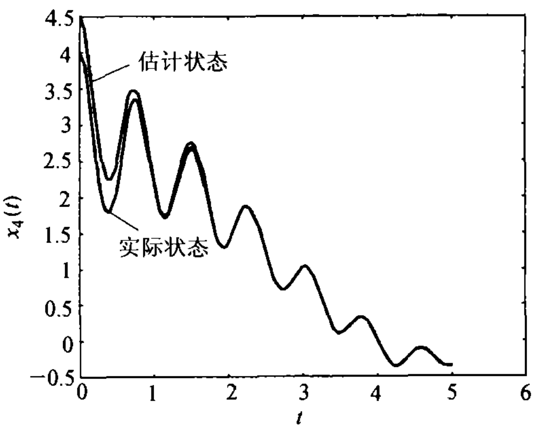

图 1　状态 x_4 的仿真图

Fig. 1　Simulation for state x_4

4 结论(Conclusion)

本文基于类 Lyapunov 方法对非线性系统降维观测器的存在性及其设计方法进了讨论.主要结论是,如果在类 Lyapunov 方法对全维观测器的讨论中,保证全维观测器存在的 Lyapunov 函数具有形式 $x^{T}Px$,其中 P 是一正定矩阵,则还存在降维观测器,且降维观测器的增益矩阵由 P 的分块矩阵确定,即由(14)给出.该结论的意义在于,如果提出了全维观测器的设计,并且保证全维观测器设计成立的 Lyapunov 函数是,那么就可以设计降维观测器.

参考文献(References):

[1] KERNER A J, ISIDORI A. Linearization by output injection and nonlinear observers [J]. *Systems & Control Letters*, 1983, 3:47 - 52.

[2] X Xiaohua, GAO W. Nonlinear observer design by observer error linearization [J]. *SIAM J of Control and Optimization*, 1989, 27:199 - 216.

[3] M. Hou, PUGH A C. Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems [J]. *Systems & Control Letters*, 1999, 37:1 - 9.

[4] KRENER A J, XIAO M. Observers for linearly unobservable nonlinear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2002, 46:281 - 288.

[5] RAJAMANI R, CHO Y M. Existence and design of observers for nonlinear systems: relation to distance to unobservability [J]. *Int J Control*, 1998, 69(5):717 - 731.

[6] RAJAMANI R. Observer for Lipschitz nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(3):397 - 401.

[7] BESANCON G. Remarks on nonlinear adaptive observer design [J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 41:271 - 280.

[8] GERMANI A, MANES C, PEPE P. A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(1):96 - 101.

[9] MA X J, SUN Z Q. Analysis and design of fuzzy reduced-dimensional observer and fuzzy functional observer [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 120(1):35 - 63.

[10] YOUNG H K, FRANK L L, CHAOUKI T. A dynamic recurrent neural-network-based adaptive observer for a class of nonlinear systems [J]. *Automatica*, 1997, 33(8):1539 - 1543.

[11] XIAO X H, GAO W B. On exponential observers for nonlinear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 1988, 11:319 - 325.

作者简介:

朱芳来 (1965 —),男,2001 年于上海交通大学电信学院获得控制理论与控制工程专业博士学位,现为桂林电子工业学院计算机系副教授,主要研究方向为非线性系统状态观测与状态反馈设计、智能控制等,E-mail: flzhu816@263.net.