文章编号：1000-8152(2004)04-0623-04

有限时间快速收敛滑模变结构控制

康　宇，奚宏生，季海波
（中国科技大学 自动化系，安徽 合肥 230027）

摘要：讨论了一类非线性系统的滑模变结构控制有限时间收敛问题.提出了一种新的收敛滑模超曲面及相应控制方案.研究结果表明，系统状态变量能以较快的收敛速度在有限时间内进入各级滑模超曲面最终到达平衡点，并具有良好的动态性能.最后仿真结果验证了该方案的有效性.

关键词：滑模变结构控制；有限时间快速收敛；动态性能
中图分类号：TP273　　　**文献标识码**：A

Fast terminal sliding mode control of nonlinear systems

KANG Yu, XI Hong-sheng, JI Hai-bo
(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230027, China)

Abstract: The design method of terminal sliding mode control is considered and a new terminal sliding hypersurface and control of nonlinear systems is proposed. It is shown that, by this design the system state variables can be driven into each sliding hypersurface in finite time until it arrived at the equilibrium point. At the same time good dynamic stability properties could be obtained. Finally simulation results showed that this new method of terminal sliding mode control is useful.

Key words: sliding mode variable structure control; fast terminal convergence; dynamic properties

1　引言(Introduction)

滑动模态超曲面的选择是滑模变结构控制系统设计的首要问题，它包含了滑动面的存在性问题和可达性问题以及滑动面上滑模运动的稳定性问题.通常选用的线性滑动模态面，可以很容易地实现变结构系统渐近稳定的动态特性，但是实际上状态变量却不可能在有限时间内到达平衡点.针对这一问题，Yu X 和 Man Z 提出了一种利用非线性滑动模态超曲面，实现状态变量有限时间收敛的最终滑动模态(terminal sliding mode)控制方法，并得到了很好的应用[1~4].

文献[4]中的有限时间快速收敛滑动模态的概念可以描述如下：

$$s = \dot{x} + \alpha x + \beta x^{q/p} = 0. \tag{1}$$

其中 x 是单变量，q,p 是正奇数，且 $q < p, \alpha > 0, \beta > 0$.可以证明系统状态变量进入滑模面后，将在有限时间内到达平衡点 $x = 0$，其到达时间是[5]：

$$t_{1s} = \frac{p}{\alpha(p-q)}\ln\frac{\alpha x(0)^{(p-q)/p} + \beta}{\beta}. \tag{2}$$

在文献[5]的基础上，本文提出了一种新的非线性有限时间快速收敛滑模变结构控制方案，使得在保持系统原有动态性能的前提下进一步提高了收敛速度.

2　指数型滑模超曲面(Exponential sliding hyper-surface)

考虑滑动模态超曲面

$$s = \begin{cases} \dot{x} + \dfrac{\alpha}{k}(e^{kx}-1)e^{-kx} + \\ \dfrac{\beta}{k}(e^{kx}-1)^{q/p}e^{-kx} = 0,\ x < 0, \\ \dot{x} + \dfrac{\alpha}{k}(1-e^{-kx})e^{kx} + \\ \dfrac{\beta}{k}(1-e^{-kx})^{q/p}e^{kx} = 0,\ x \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

其中 α,β,x,p,q 的定义与式(1)相同，$0 < k < 1$，并有如下结论.

定理 1　系统的状态变量在式(3)的滑动模态超曲面上是渐近稳定的，并能在比 t_{1s} 更快的有限时间内到达平衡点.

证　1) 渐近稳定性.

当系统状态变量进入滑模超曲面时(即式(3)成

收稿日期：2002-12-02；收修改稿日期：2003-09-23.

立),取 Lyapunov 函数 $V = \frac{1}{2}x^2$, 则有

$$\dot{V} = x\dot{x} = \begin{cases} -x\frac{\alpha}{k}(e^{kx}-1)e^{-kx} - \\ x\frac{\beta}{k}(e^{kx}-1)^{q/p}e^{-kx} < 0, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x\frac{\alpha}{k}(1-e^{-kx})e^{kx} - \\ x\frac{\beta}{k}(1-e^{-kx})^{q/p}e^{kx} < 0, & x > 0, \end{cases}$$

则由 Lyapunov 稳定性原理知,系统是渐近稳定的.

2) 有限时间到达.

① 当 $x > 0$ 时,在滑模面上有

$$\dot{x} = -\frac{\alpha}{k}(1-e^{-kx})e^{kx} - \frac{\beta}{k}(1-e^{-kx})^{q/p}e^{kx}.$$

状态变量的有限到达时间为

$$t_{2s} = \frac{p}{\alpha(p-q)}\ln\frac{\alpha(1-e^{-kx(0)})^{(p-q)/p}+\beta}{\beta}, \quad x(0) > 0. \tag{4}$$

② 当 $x < 0$ 时,在滑模面上有

$$\dot{x} = -\frac{\alpha}{k}(e^{kx}-1)e^{-kx} - \frac{\beta}{k}(e^{kx}-1)^{q/p}e^{-kx}.$$

状态变量的有限到达时间为

$$t_{3s} = \frac{p}{\alpha(p-q)}\ln\frac{\alpha(e^{kx(0)}-1)^{(p-q)/p}+\beta}{\beta}, \quad x(0) < 0, \tag{5}$$

而

$$0 < 1 - e^{-kx(0)} < x(0),\ x(0) > 0, \tag{6}$$

$$x(0) < e^{kx(0)} - 1 < 0,\ x(0) < 0. \tag{7}$$

因此总有 $t_{2s}, t_{3s} \leqslant t_{1s}$(仅当 $x(0) = 0$ 时取等号)从而定理1得证.

3 最终滑模变结构控制设计(Control design of terminal variable structure sliding mode)

通过递归结构可以很方便的将上述控制设计方法延伸到高阶非线性 SISO 系统

$$\begin{cases} s_1 = \dot{s}_0 + \alpha_0 A_0 + \beta_0 B_0, \\ s_2 = \dot{s}_1 + \alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1, \\ \quad \vdots \\ s_{n-1} = \dot{s}_{n-2} + \alpha_{n-2}A_{n-2} + \beta_{n-2}B_{n-2}. \end{cases} \tag{8}$$

其中

$$s_0 = x_1,\ A_i = \begin{cases} (e^{k_i s_i} - 1)/k_i, & s_i > 0, \\ (1 - e^{-k_i s_i})/k_i, & s_i < 0, \end{cases}$$

$$B_i = \begin{cases} (1 - e^{-k_i s_i})^{\frac{q_i}{p_i}} e^{k_i s_i}/k_i, & s_i > 0, \\ (e^{k_i s_i} - 1)^{\frac{q_i}{p_i}} e^{-k_i s_i}/k_i, & s_i < 0, \end{cases}$$

$$\alpha_i > 0,\ \beta_i > 0,\ 0 < k_i < 1,\ p_i > q_i > 0,$$

且 q_i, p_i 为奇数($i = 0,1,2,\cdots,n-2$).

不失一般性,考虑如下高阶非线性 SISO 系统

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = x_{i+1},\ i = 1,2,\cdots,n-1, \\ &\dot{x}_n = f(x) + g(x)u. \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $\Re^n$ 上光滑的有界标量,且 $g(x) \neq 0,\ \forall x_i, u \in \Re^1 (i = 1,2,\cdots,n-1)$.

定理 2 对于高阶非线性 SISO 系统(9),如果选择控制规律

$$u(t) = -\frac{1}{g(x)}\Big[f(x) + \sum_{j=0}^{n-2}\frac{d^{n-j-1}}{dt^{n-j-1}}(\alpha_j A_j + \beta_j B_j) + \alpha_{n-1}A_{n-1} + \beta_{n-1}B_{n-1}\Big]. \tag{10}$$

其中 $\alpha_i, \beta_i, A_i, B_i$(及隐含的 $k_i, p_i, q_i, i = 0,1,2,\cdots,n-1$)取式(8)中的形式.则系统状态变量将于有限时间内进入 $s_{n-1} = 0, s_{n-2} = 0, \cdots, s_1 = 0$ 直至到达平衡点.且到达时间为

$$T_s = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{p_i}{\alpha_i(p_i - q_i)}\ln\frac{\alpha_i\,|\,e^{-k_i|s_i(0)|} - 1\,|^{(p_i-q_i)/p_i} + \beta_i}{\beta_i}. \tag{11}$$

证 对式(8)中的 s_{n-1} 求一阶导数,得

$$\dot{s}_{n-1} = \ddot{s}_{n-2} + \alpha_{n-2}\frac{d}{dt}A_{n-2} + \beta_{n-2}\frac{d}{dt}B_{n-2} =$$

$$\vdots$$

$$s_0^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2}\frac{d^{n-j-1}}{dt^{n-j-1}}(\alpha_j A_j + \beta_j B_j) =$$

$$f(x) + g(x)u + \sum_{j=0}^{n-2}\frac{d^{n-j-1}}{dt^{n-j-1}}(\alpha_j A_j + \beta_j B_j).$$

将式(10)代入,有

$$\dot{s}_{n-1} = -\alpha_{n-1}A_{n-1} - \beta_{n-1}B_{n-1}.$$

由定理1可知 s_{n-1} 将在有限时间内到达平衡点,由式(8)递归结构和定理1可知系统的状态变量也将在有限时间内到达平衡点.运用式(4)和式(5)可以很容易证明式(11)成立.

注 1 由于控制律式(10)中含有 $\sum_{j=0}^{n-2}\frac{d^{n-j-1}}{dt^{n-j-1}}(\alpha_j A_j + \beta_j B_j)$ 项,因此本文提出的有限时间收敛策略同样存在类似于文献[2]定理3中讨论的奇异问题,利用相同的分析方法可以得到式(10)中 p_i, q_i 的选择也必须满足 $\frac{q_i}{p_i} >$

$\frac{n-i-1}{n-i}(i = n-2, n-3, \cdots, 0)$,以避免奇异问题的出现.

下面考虑系统(9)在有界但不确定情况下(不妨假设 $0 < f(x) < f_0(x), 0 < g_0(x) < g(x)$)鲁棒控制器的设计问题.

定理 3　对于上述动态系统,当 $g_0(x), f_0(x)$ 不确定时,采用控制策略

$$u = -\operatorname{sgn}(s_{n-1})[(\bar{f}(x) + |\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\mathrm{d}^{n-j-1}}{\mathrm{d}t^{n-j-1}}(\alpha_j A_j + \beta_j B_j)|)/\bar{g}(x) + \bar{g}(x)]. \tag{12}$$

其中 $\bar{f}(x), \bar{g}(x)$ 分别是 $f(x), g(x)$ 不确定界的估值,且

$$\dot{\bar{f}}(x) = |s_{n-1}|, \tag{13}$$

$$\dot{\bar{g}}(x) = -[\bar{g}(x) - \varepsilon]|s_{n-1}|, \tag{14}$$

(ε 是一个任意小的正数以保证 $\bar{g}(x)$ 不衰减到零)则可以实现系统的有限时间渐近稳定.

证　① 由于 $g(x)$ 有下界,$f(x)$ 有上界,且考虑实际情况,可知必存在一个较小的正常数 $\hat{g}$ 和一个较大的正常数 $\hat{f}$ 使得 $\hat{g} < g_0(x), \hat{f} > f_0(x)$;

② 由式(13)和式(14)可知必有 $\bar{g}(x) < g_0(x) < g(x), \bar{f}(x) > f_0(x) > f(x)$;

③ 取 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}s_{n-1}^2 + \frac{1}{2}[\hat{g} - \bar{g}(x)]^2 + \frac{1}{2}[\hat{f} - \bar{f}(x)]^2,$$

则有

$$\begin{aligned}
\dot{V} = {} & s_{n-1}\dot{s}_{n-1} - [\hat{g} - \bar{g}(x)]\dot{\bar{g}}(x) - \\
& [\hat{f} - \bar{f}(x)]\dot{\bar{f}}(x) \leqslant \\
& [|f(x)| + |\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\mathrm{d}^{n-j-1}}{\mathrm{d}t^{n-j-1}}(\alpha_j A_j + \beta_j B_j)|]|s_{n-1}| - \\
& [\hat{g} - \bar{g}(x)]\dot{\bar{g}}(x) - [\hat{f} - \bar{f}(x)]\dot{\bar{f}}(x) + g(x)us_{n-1} = \\
& [|f(x)| + |\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\mathrm{d}^{n-j-1}}{\mathrm{d}t^{n-j-1}}(\alpha_j A_j + \beta_j B_j)|]|s_{n-1}| + \\
& [\hat{g} - \bar{g}(x)][\bar{g}(x) - \varepsilon]|s_{n-1}| - [\hat{f} - \bar{f}(x)]|s_{n-1}| - \\
& g(x)s_{n-1}\operatorname{sgn}(s_{n-1})[(\bar{f}(x) + |\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\mathrm{d}^{n-j-1}}{\mathrm{d}t^{n-j-1}}(\alpha_j A_j + \\
& \beta_j B_j)|)/\bar{g}(x) + \bar{g}(x)] = \\
& \{[\left|\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\mathrm{d}^{n-j-1}}{\mathrm{d}t^{n-j-1}}(\alpha_j A_j + \beta_j B_j)\right| + \bar{f}(x)] \times \\
& \left[1 - \frac{g(x)}{\bar{g}(x)}\right] + [|f(x)| - \hat{f}] + [\hat{g} - g(x)]\bar{g}(x) - \\
& \hat{g}\varepsilon + [\varepsilon - \bar{g}(x)]\bar{g}(x)\}|s_{n-1}|.
\end{aligned}$$

由①,②可推得

$$\dot{V} < 0, \text{当} |s_{n-1}| \neq 0 \text{时},$$

且

$$\begin{aligned}
& s_{n-1}\dot{s}_{n-1} \leqslant \\
& \left[|f(x)| + \left|\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\mathrm{d}^{n-j-1}}{\mathrm{d}t^{n-j-1}}(\alpha_j A_j + \beta_j B_j)\right| + g(x)u\right] = \\
& \left[1 - \frac{g(x)}{\bar{g}(x)}\right][|\bar{f}(x)| + |\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\mathrm{d}^{n-j-1}}{\mathrm{d}t^{n-j-1}}(\alpha_j A_j + \\
& \beta_j B_j)|]|s_{n-1}| - g(x)\bar{g}(x)|s_{n-1}| \leqslant \\
& -\varepsilon^2|s_{n-1}|.
\end{aligned}$$

由 Lyapunov 稳定性定理可知 $\bar{f}(x) \to \hat{f}, \bar{g}(x) \to \hat{g}$,切换变量 s_{n-1} 将在有限时间到达平衡点,再由定理 2 可知状态变量将在有限时间最终达到平衡点,从而整个动态系统是有限时间渐近稳定的.

4　仿真算例(Simulation example)

考虑二阶非线性 SISO 系统

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \cos(x_1) + (x_1^2 + 1)u.$$

其中

$$\alpha_0 = 2,\ \beta_0 = 1,\ p_0 = 9,\ q_0 = 5,$$

$$\alpha_1 = 10,\ \beta_1 = 1,\ p_1 = 3,\ q_1 = 2,$$

$$x_1(0) = 5,\ \dot{x}_1(0) = x_2(0) = 10,$$

并取 $k_0 = 0.08,\ k_1 = 0.05$.

取滑模变量

$$s_1 = \dot{x}_1 + \alpha_0(1 - \mathrm{e}^{-k_0x_1})\mathrm{e}^{k_0x_1}/k_0 + (\beta_0(1 - \mathrm{e}^{-k_0x_1})^{\frac{q_0}{p_0}}\mathrm{e}^{k_0x_1}/k_0,$$

可以计算出 s_1 的初始值是 $s_1(0) = 32.3626 > 0$. 取

$$s = \dot{s}_1 + \alpha_1(1 - \mathrm{e}^{-k_1s_1})\mathrm{e}^{k_1s_1}/k_1 + \beta_1(1 - \mathrm{e}^{-k_1s_1})^{\frac{q_1}{p_1}}\mathrm{e}^{k_1s_1}/k_1,$$

运用定理 2 可得控制规律

$$\begin{aligned}
u = -\frac{1}{x_1^2 + 1}[&\cos x_1 + \alpha_0x_2\mathrm{e}^{k_0x_1} + \beta_0\frac{q_0}{p_0}x_2(1 - \\
&\mathrm{e}^{-k_0x_1})^{\frac{q_0-p_0}{p_0}} + \beta_0x_2(1 - \mathrm{e}^{-k_0x_1})^{\frac{q_0}{p_0}}\mathrm{e}^{k_0x_1} + \\
&\alpha_1(1 - \mathrm{e}^{-k_1s_1})\mathrm{e}^{k_1s_1}/k_1 + \beta_1(1 - \mathrm{e}^{-k_1s_1})^{\frac{q_1}{p_1}}\mathrm{e}^{k_1s_1}/k_1].
\end{aligned} \tag{15}$$

仿真结果图 1~4 所示.

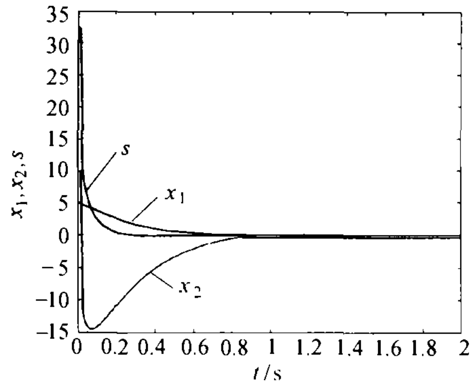

图1 控制规律(15)下的系统状态变量和滑模变量
Fig. 1 Responses of sliding mode variable and system state variable under control rules (15)

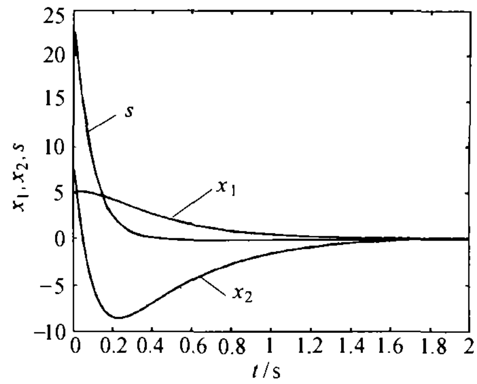

图2 文献[5]仿真算例中的系统状态变量和滑模变量
Fig. 2 Responses of sliding mode variable and system state variable in reference [5]

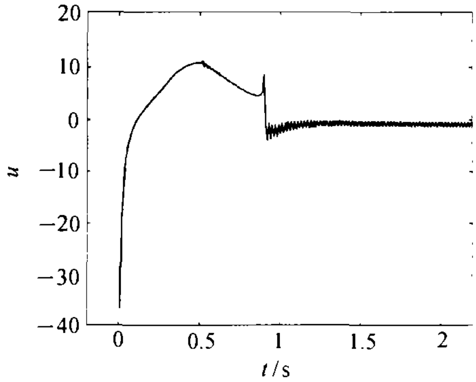

图3 控制规律(15)下的输入控制量
Fig. 3 Control input under control rules (15)

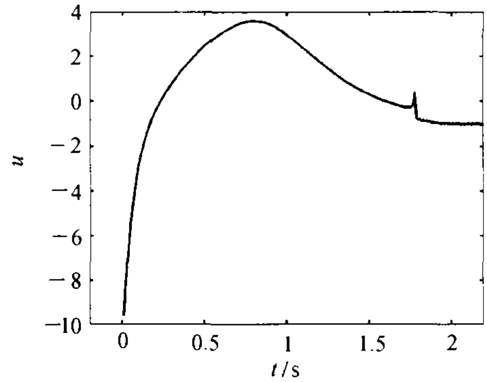

图4 文献[5]仿真算例中的输入控制量
Fig. 4 control input in reference [5]

由上图可以看出新的滑动模态超曲面能够获得更快的收敛速度.

5 结论(Conclusion)

通过上述理论分析和仿真算例表明本文所提方案在保持了文献[5]原有的动态性能的前提下实现了更快速的有限时间收敛,并对不确定动态系统有较强的鲁棒性.注意到这种快速有限时间收敛的实现在本质上是以增大控制信号幅值(指数型控制信号)为代价的,因此如何选择合适的 $\alpha_i, \beta_i, k_i, p_i, q_i$ 将控制信号幅值约束在系统期望的范围内是下一步的研究工作之一,另外在本文的基础上还可以进一步把指数型滑动超曲面推广到 MIMO 非线性系统中.

参考文献(References):

[1] ZAK M. Terminal attractors in neural networks [J]. *Neural Networks*, 1989,2(2):259 - 274.

[2] YU X, MAN Z. Fast terminal sliding mode control design for nonlinear dynamical systems [J]. *IEEE Trans on Circuits Systems I*, 2002, 49(2):261 - 264.

[3] MAN Z, YU X. Terminal sliding mode control of MIMO systems [J]. *IEEE Trans on Circuits Systems I*, 1997,44(11):1065 - 1070.

[4] YU X, WU Y, MAN Z. On global stabilization of nonlinear dynamical systems [M]// YOUNG D, OZGUNER U. *Variable Structure Systems, Sliding Mode and Nonlinear Control, Lecture Notes in Control and Information Science*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.

[5] YU S, YU X, MAN Z. Robust global terminal sliding mode control of SISO nonlinear uncertain systems [C]// *Proc of the 39th IEEE Conf on Decision and Control*. Sydney, Australia: [s. n.], 2000: 2198 - 2203.

作者简介:

康 宇 (1977 —),男,博士研究生,主要从事滑模变结构控制理论、混合系统控制理论等方面的研究工作,E-mail: kangyumatthew@shou.com;

奚宏生 (1950 —),男,教授,博士生导师,长期从事鲁棒控制、离散事件动态系统及其应用等方面的研究;

季海波 (1964 —),男,教授,从事非线性问题的数值方法和非线性控制等方面的研究.