文章编号：1000-8152(2004)06-0941-04

滞后广义系统的状态反馈 H_∞ 控制

董心壮，张庆灵
（东北大学 系统科学研究所，辽宁 沈阳 110004）

摘要：研究了一类状态方程和输出方程均带有时滞的滞后广义系统的 H_∞ 控制问题.利用线性矩阵不等式，首先给出滞后广义系统零解渐近稳定且具有 H_∞ 范数约束的充分条件，进而分别设计无记忆和有记忆状态反馈控制律，保证闭环系统具有上述性能，同时基于线性矩阵不等式的解得到了相应控制器构造方法.最后给出一个数值算例说明文中结论的有效性.

关键词：滞后广义系统；零解渐近稳定；H_∞ 范数约束；状态反馈；线性矩阵不等式(LMI)

中图分类号：TP13　　**文献标识码**：A

State feedback H-infinity control of linear singular systems with time-delay

DONG Xin-zhuang, ZHANG Qing-ling
(Institute of System Sciences, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: The problem of H-infinity control for a class of singular systems with time-delay is considered. By means of linear matrix inequalities (LMIs), a sufficient condition is obtained for a singular system with time-delay to be zero solution asymptotically stable and satisfied the H-infinity norm constraint. Then the existence conditions of static memory-less and memorial state feedback control laws are presented, and the explicit expressions for such controllers are derived in terms of the solutions of LMIs. Finally, an illustrative example is given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: singular systems with time-delay; zero solution asymptotical stability; H-infinity norm constraint; state feedback; linear matrix inequality (LMI)

1 引言(Introduction)

由于广义系统能更自然更一般地描述客观系统，近年来广义系统的研究受到广泛关注，并取得了丰硕的成果.但由于存在信息收集整理的延迟、物理器件的不灵敏性等因素，实际系统往往会受到滞后的影响，因而研究滞后广义系统是十分必要的.滞后广义系统与通常的滞后系统及无滞后的广义系统有本质差别，其结构更加复杂.关于滞后广义系统的稳定性和镇定，已有不少结果[1~5]，但关于滞后广义系统的 H_∞ 控制，文献很少[6].文献[6]只考虑了状态方程具有时滞的情形，先将状态方程转化为一个微分方程和一个代数方程，利用耗散性理论设计存储函数，使其导数小于给定供给率，由此给出系统具有 H_∞ 范数约束的充分条件.但由于要同时考虑两个方程，所得结论和证明过程都非常繁琐，而且，它所设计的状态反馈控制器仅仅保证闭环系统满足 H_∞ 范数约束条件，并没有考虑系统的稳定性.

本文考虑状态方程和控制输出方程均具有时滞的广义系统的 H_∞ 控制问题，不须对系统进行转化，利用线性矩阵不等式，得到系统零解渐近稳定且具有 H_∞ 范数约束的充分条件，在此基础上，分别设计无记忆和有记忆状态反馈控制律，使得闭环系统具有同样性能.所得条件简洁，易于计算机实现.

2 问题描述(Problem statement)

考虑如下具有状态时滞的线性定常广义系统：

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d) + B\omega(t), \\ z(t) = Cx(t) + C_d x(t-d) + D\omega(t), \\ x(t) = \Phi(t),\ t \in [-d, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

其中：$x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态，$\omega(t) \in \mathbb{R}^m$ 是干扰输入，$z(t) \in \mathbb{R}^p$ 是控制输出；E, A, A_d, B, C, C_d, D 是具有相应维数的实常数矩阵；$d > 0$ 是时滞常数，向量值初始函数 $\Phi(t) \in C[-d, 0]$，$\mathrm{rank}E = r < n$. $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$. 假设系统(1)的解满足相容初始条件.在下文中，$\rho(A)$ 表示矩阵 A 的谱半径，即

收稿日期：2003-03-31；收修改稿日期：2003-10-16.

$\rho(A) = \max\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(I,A)\}$, $\sigma(E,A) = \{\lambda \in C: \det(\lambda E - A) = 0\}$, $\lambda \in C^-$ 表示 λ 具有负实部.

考虑如下的零输入系统:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d). \tag{2}$$

定义 1[1] 系统(2)称为是零解渐近稳定的,如果它的每一个由相容初始条件所确定的解 $x(t)$ 均满足 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

如果矩阵对 (E,A) 正则,则存在可逆矩阵 U,V 使得

$$\begin{cases} UEV = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix},\ UAV = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-s} \end{bmatrix}, \\ UA_dV = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{3}$$

其中 N 是幂零阵.称式(3)为矩阵组 (E,A,A_d) 的受限等价形式.

引理 1[2] 如果矩阵对 (E,A) 正则、无脉冲(即 $N=0, s=r$)且系统(2)满足

a) $\rho(A_{22}) < 1$;

b) $\sigma(E,A) \subset C^-$;

c) $\|(sE-A)^{-1}A_d\|_\infty < 1$.

则系统(2)是零解渐近稳定的.

为了便于求 $\rho(A_{22})$,给出下面的引理.

引理 2 在矩阵组 (E,A,A_d) 的所有受限等价形式(3)中,$\rho(A_{22})$ 保持不变.

证 考虑矩阵组 (E,A,A_d) 的另一受限等价形式.假设存在可逆矩阵 U_1,V_1 使得

$$U_1EV_1 = \begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & \bar{N} \end{bmatrix},\ U_1AV_1 = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ 0 & I_{n-t} \end{bmatrix},$$

$$U_1A_dV_1 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix},$$

则根据文献[7]必有 $s = t$,且存在可逆矩阵 $T_1 \in \mathbb{R}^{s\times s}$, $T_2 \in \mathbb{R}^{(n-s)\times(n-s)}$,使得

$$U = \mathrm{diag}(T_1,T_2)U_1,\ V = V_1\mathrm{diag}(T_1^{-1},T_2^{-1}),$$

$$A_1 = T_1\bar{A}_1T_1^{-1},\ N = T_2\bar{N}T_2^{-1},$$

则有

$$UA_dV = \mathrm{diag}(T_1,T_2)U_1A_dV_1\mathrm{diag}(T_1^{-1},T_2^{-1}) = \begin{bmatrix} T_1\bar{A}_{11}T_1^{-1} & T_1\bar{A}_{12}T_2^{-1} \\ T_2\bar{A}_{21}T_1^{-1} & T_2\bar{A}_{22}T_2^{-1} \end{bmatrix}.$$

因而有 $A_{22} = T_2\bar{A}_{22}T_2^{-1}$,而相似变换不改变矩阵的特征值,所以有 $\rho(A_{22}) = \rho(\bar{A}_{22})$.

由引理2可知,要想求 $\rho(A_{22})$,只须找到矩阵组 (E,A,A_d) 的一个受限等价形式即可,这可以用文献[7]中提供的方法解决.

本文考虑的 H_∞ 问题是,对于给定的常数 $\gamma > 0$,在零初始条件下,如果有

$$\|z(t)\|_2 < \gamma\|\omega(t)\|_2,\ \forall\,\omega(t) \in L_2[0,\infty),$$

则称系统(1)具有 H_∞ 范数约束 γ.

考虑如下无滞后的广义系统:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + B\omega(t), \\ z(t) = Cx(t). \end{cases} \tag{4}$$

引理 3[8] 系统(4)正则、稳定、无脉冲且 $\|C(sE-A)^{-1}B\|_\infty < \gamma$ 的充要条件是,存在可逆矩阵 P 满足不等式

$$E^{\mathrm{T}}P = P^{\mathrm{T}}E \geqslant 0,$$

$$A^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A + C^{\mathrm{T}}C + \gamma^{-2}P^{\mathrm{T}}BB^{\mathrm{T}}P < 0.$$

3 H_∞ 性能分析(H-infinity performance analysis)

定理 1 对于系统(1)和给定常数 $\gamma > 0$,如果存在可逆矩阵 P 满足不等式

$$E^{\mathrm{T}}P = P^{\mathrm{T}}E \geqslant 0, \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P+P^{\mathrm{T}}A+I & P^{\mathrm{T}}A_d & P^{\mathrm{T}}B & C^{\mathrm{T}} \\ A_d^{\mathrm{T}}P & -I & 0 & C_d^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}}P & 0 & -\gamma^2 I & D^{\mathrm{T}} \\ C & C_d & D & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{6}$$

且此时式(3)中有 $\rho(A_{22}) < 1$,则系统(1)零解渐近稳定且具有 H_∞ 范数约束 γ.

证 先考虑系统(1)的零解渐近稳定性.令 $\omega(t) = 0$,式(6)成立意味着下式成立:

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A + I & P^{\mathrm{T}}A_d \\ A_d^{\mathrm{T}}P & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{7}$$

由 Schur 补性质,则有

$$A^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A + I + P^{\mathrm{T}}A_dA_d^{\mathrm{T}}P < 0. \tag{8}$$

结合式(5),(8)和引理3知,矩阵对 (E,A) 正则、无脉冲,$\sigma(E,A) \subset C^-$ 且 $\|(sE-A)^{-1}A_d\|_\infty < 1$,则式(3)存在且 $N=0, s=r$,根据本定理条件和引理1,得到系统(1)是零解渐近稳定的.

再证系统(1)具有 H_∞ 范数约束 γ.取

$$V(x_t) = x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}Px(t) + \int_{t-d}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)x(s)\mathrm{d}s. \tag{9}$$

易知 $V(x_t) \geqslant 0$,计算得到

$$\dot{V}(x_t) - \gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t) + z^{\mathrm{T}}(t)z(t) =$$

$$[x^{\mathrm{T}}(t)\quad x^{\mathrm{T}}(t-d)\quad \omega^{\mathrm{T}}(t)]L\cdot$$

$[x^{\mathrm T}(t) \quad x^{\mathrm T}(t-d) \quad \omega^{\mathrm T}(t)]^{\mathrm T}$.

其中

$$L=\begin{bmatrix} A^{\mathrm T}P+P^{\mathrm T}A+I & P^{\mathrm T}A_d & P^{\mathrm T}B \\ A_d^{\mathrm T}P & -I & 0 \\ B^{\mathrm T}P & 0 & -\gamma^2 I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C^{\mathrm T} \\ C_d^{\mathrm T} \\ D^{\mathrm T}\end{bmatrix}[C \quad C_d \quad D].$$

当式(6)成立时,由 Schur 补性质得到 $L<0$ 成立,则有

$$\dot V(x_t)<\gamma^2\omega^{\mathrm T}(t)\omega(t)-z^{\mathrm T}(t)z(t).$$

由耗散性理论知系统(1)具有 H_∞ 范数约束 γ.

4 H_∞ 控制律设计(H-infinity control law design)

考虑如下具有控制输入的滞后广义系统:

$$\begin{cases} E\dot x(t)=Ax(t)+A_dx(t-d)+B\omega(t)+B_1u(t), \\ z(t)=Cx(t)+C_dx(t-d)+D\omega(t)+D_1u(t). \end{cases} \tag{10}$$

其中 $u(t)\in\mathbb{R}^q$ 是控制输入,B_1,D_1 是相应维数的常数矩阵.

首先考虑无记忆状态反馈控制律

$$u(t)=Kx(t), \tag{11}$$

使得系统(10)在控制律(11)反馈作用下的闭环系统

$$\begin{cases} E\dot x(t)=(A+B_1K)x(t)+A_dx(t-d)+B\omega(t), \\ z(t)=(C+D_1K)x(t)+C_dx(t-d)+D\omega(t) \end{cases} \tag{12}$$

零解渐近稳定且具有 H_∞ 范数约束 γ.

如果矩阵对 $(E,A+B_1K)$ 正则、无脉冲,则存在可逆矩阵 $\tilde U,\tilde V$ 使得

$$\begin{cases} \tilde UE\tilde V=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}, \\ \tilde U(A+B_1K)\tilde V=\begin{bmatrix} \tilde A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r}\end{bmatrix}, \\ \tilde UA_d\tilde V=\begin{bmatrix} \tilde A_{11} & \tilde A_{12} \\ \tilde A_{21} & \tilde A_{22}\end{bmatrix}. \end{cases} \tag{13}$$

定理 2 对于系统(10),如果存在可逆矩阵 X 和矩阵 Y 满足不等式.

$$EX=X^{\mathrm T}E^{\mathrm T}\geqslant 0, \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} AX+X^{\mathrm T}A^{\mathrm T}+B_1Y+Y^{\mathrm T}B_1^{\mathrm T}+I & A_d & B & X^{\mathrm T}C^{\mathrm T}+Y^{\mathrm T}D_1^{\mathrm T} \\ A_d^{\mathrm T} & -I & 0 & C_d^{\mathrm T} \\ B^{\mathrm T} & 0 & -\gamma^2I & D^{\mathrm T} \\ CX+D_1Y & C_d & D & -I\end{bmatrix}<0, \tag{15}$$

且当 $K=YX^{-1}$ 时式(13)中有 $\rho(\tilde A_{22})<1$,则存在无记忆状态反馈控制律

$$u(t)=YX^{-1}x(t), \tag{16}$$

使得闭环系统(12)零解渐近稳定且具有 H_∞ 范数约束 γ.

证 将式(15)分别右乘 $Q=\mathrm{diag}(X^{-1},I,I,I)$ 左乘 $Q^{\mathrm T}$,并记 $K=YX^{-1}$,$P=X^{-1}$ 得到

$$\begin{bmatrix} (A+B_1K)^{\mathrm T}P+P^{\mathrm T}(A+B_1K)+I & P^{\mathrm T}A_d & P^{\mathrm T}B & (C+D_1K)^{\mathrm T} \\ A_d^{\mathrm T}P & -I & 0 & C_d^{\mathrm T} \\ B^{\mathrm T}P & 0 & -\gamma^2I & D^{\mathrm T} \\ C+D_1K & C_d & D & -I\end{bmatrix}<0. \tag{17}$$

将式(14)分别左乘 $X^{-\mathrm T}$ 右乘 X^{-1},并记 $P=X^{-1}$ 得到

$$E^{\mathrm T}P=P^{\mathrm T}E\geqslant 0. \tag{18}$$

结合式(18)、(17)、本定理条件及定理 1 知,当控制器为式(16)时,闭环系统(12)零解渐近稳定且具有 H_∞ 范数约束 γ.

再考虑系统(10)的有记忆状态反馈控制器

$$u(t)=K_1x(t)+K_2x(t-d). \tag{19}$$

其中 $K_2\neq 0$,则闭环系统为

$$\begin{cases} E\dot x(t)=(A+B_1K_1)x(t)+(A_d+B_1K_2)x(t-d)+B\omega(t), \\ z(t)=(C+D_1K_1)x(t)+(C_d+D_1K_2)x(t-d)+D\omega(t). \end{cases} \tag{20}$$

如果矩阵对 $(E,A+B_1K_1)$ 正则、无脉冲,则存在可逆矩阵 $\hat U,\hat V$ 使得

$$\begin{cases} \hat UE\hat V=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}, \\ \hat U(A+B_1K_1)\hat V=\begin{bmatrix} \hat A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r}\end{bmatrix}, \\ \hat U(A_d+B_1K_2)\hat V=\begin{bmatrix} \hat A_{11} & \hat A_{12} \\ \hat A_{21} & \hat A_{22}\end{bmatrix}. \end{cases} \tag{21}$$

利用与定理 2 类似的证明方法得到下面的结论.

定理 3 对于系统(10),如果存在可逆矩阵 X,矩阵 Y 及非零矩阵 W 满足下面的不等式:

$$EX = X^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} \geqslant 0, \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} AX + X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} + B_1Y + Y^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}} + I & A_d + B_1W & B & X^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}}D_1^{\mathrm{T}} \\ A_d^{\mathrm{T}} + W^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}} & -I & 0 & C_d^{\mathrm{T}} + W^{\mathrm{T}}D_1^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} & 0 & -\gamma^2 I & D^{\mathrm{T}} \\ CX + D_1Y & C_d + D_1W & D & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{23}$$

且当 $K_1 = YX^{-1}, K_2 = W$ 时,式(21)中有 $\rho(\hat{A}_{22}) < 1$,则存在有记忆状态反馈控制器

$$u(t) = YX^{-1}x(t) + Wx(t-d), \tag{24}$$

使得闭环系统(20)零解渐近稳定且具有 H_∞ 范数约束 γ.

5 例子(Example)

考虑滞后广义系统(10),其中

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1.2 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix},\ A_d = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.8 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.5 \end{bmatrix},$$

$$C = [1.3\quad 0.4],\ C_d = [0.8\quad 0.3],$$

$$D = [0.4],\ D_1 = [0.8].$$

易知系统(10)正则但有脉冲.取 $\gamma = 1$,利用Matlab的LMI工具箱求解式(14)、(15),得到一组可行解为

$$X = \begin{bmatrix} 5.8282 & 0 \\ 1.4363 & 12.5849 \end{bmatrix},$$

$$Y = [-11.1183\quad -7.0247],$$

$$K = [-1.7701\quad -0.5582],$$

且此时有 $\rho(\tilde{A}_{22}) = 0.9555 < 1$ 成立,由定理2,取无记忆状态反馈控制律为

$$u(t) = [-1.7701\quad -0.5582]x(t),$$

就能使闭环系统零解渐近稳定且其 H_∞ 范数小于1.

6 结论(Conclusion)

讨论了状态方程和输出方程均具有时滞的滞后广义系统的 H_∞ 控制问题.利用线性矩阵不等式,得到了系统零解渐近稳定且具有 H_∞ 范数约束的条件,在此基础上,分别设计无记忆和有记忆状态反馈控制律,保证了闭环系统具有相同的性能.与已有结果相比,所得条件简洁,易于进行判别.

参考文献(References):

[1] 谢湘生,刘永清.具时滞的线性奇异系统稳定性的代数判剧[J].控制理论与应用,1997,14(2):349-357.
(XIE Xianshang, LIU Yongqing. Algebraic criteria for stability of linear singular systems with time delay [J]. *Control Theory & Applications*, 1997, 14(2):349-357.)

[2] 谢湘生,刘洪伟.滞后广义系统反馈镇定控制器设计的LMI方法[J].系统工程与电子技术,2000,22(11):35-38.
(XIE Xiangsheng, LIU Hongwei. A LMI approach of stabilizing controller design for linear time-delay singular systems [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2000, 22(11):35-38.)

[3] LI Y Q, LIU Y Q. Stability of solutions of singular systems with delay [J]. *Control Theory & Applications*, 1998, 15(4):542-550.

[4] 谢湘生,刘永清.具有时滞的线性奇异系统镇定的Riccati方程方法[J].控制理论与应用,1998,15(6):887-891.
(XIE Xiangsheng, LIU Yongqing. A Riccati equation approach to the stabilization of linear singular systems with time delay [J]. *Control Theory & Applications*, 1998, 15(6): 887-891.)

[5] 梁家荣,樊晓平.滞后不确定广义系统的稳定性与变结构控制[J].系统工程,2001,19(3):1-5.
(LIANG Jiarong, FAN Xiaoping. Stability and variable structure control for singular uncertain systems with time-delay [J]. *Systems Engineering*, 2001, 19(3):1-5.)

[6] 周绍生,李洪亮,冯纯伯.一类带有时滞的广义系统的 H_∞ 控制:一种LMI方法[J].控制理论与应用,2002,19(3):324-328
(ZHOU Shaosheng, LI hongliang, FENG Chunbo. H_∞ suboptimal control for a class of singular systems with time-delay: a LMI approach [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(3):324-328.)

[7] DAI L Y. *Singular Control Systems* [M]. Berlin: Springer Verlag, 1989:10-16.

[8] IZUMI M, YOSHIYUKI K, ATSUMI O, et al. H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach [J]. *Automatica*, 1997, 33(4):669-673.

作者简介:

董心壮 (1973—),女,沈阳炮兵学院讲师,现于中国科学院系统科学研究所从事博士后研究工作,1994年毕业于解放军信息工程学院,1998年于解放军电子技术学院获硕士学位,2004年于东北大学获得博士学位,目前主要研究领域是广义系统的 H_∞ 控制、无源控制等,E-mail: xzdong@hotmail.com;

张庆灵 (1956—),男,东北大学理学院院长,教授,博士生导师,1995年于东北大学获得博士学位,1997年完成西北工业大学博士后工作,主要研究领域为广义系统、鲁棒控制、分散控制、$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$ 控制等,E-mail: qlzhang@mail.neu.edu.cn.