

基于 QR 分解的盲源分离几何算法

何昭水, 谢胜利, 章晋龙

(华南理工大学 无线电与自动控制研究所, 广东 广州 510640)

摘要: 提出了一类新的实时线性混叠信号盲分离算法, 该算法基于混叠矩阵的 QR 分解思想, 结合均匀分布的源信号相互独立时其 Scatter 图具有的特殊形状以及与坐标轴平行的几何性质, 导出了一类盲源分离的几何算法. 本文的方法相对 Taro 和 Hyvarinen 而言, 大大简化了其分离过程, 从而缩短了分离时间. 仿真结果表明, 对同样两幅混叠图像的分, 在效果相当的情况下, 本文算法的分离时间比 Hyvarinen 的分离时间缩短了约 2.5 倍.

关键词: Givens 变换; 白化; Scatter 图; 盲分离

中图分类号: TN912.3 **文献标识码:** A

Geometrical algorithm of blind source separation based on QR decomposition

HE Zhao-shui, XIE Sheng-li, ZHANG Jin-long

(The Research Institute of Radio & Automatic Control, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: Geometric algorithms for blind signal separation(BSS) have recently received some attention due to their pictorial description and their relative ease of implementation. We present a new blind separation algorithm of instantaneous mixing model, which is based on QR decomposition of mixing matrix. And the scatter plot of source signals show special geometrical shape when source signals are statistically independent and uniformly distributed. Comparing with Taro or Hyvarinen algorithms, this algorithm is very simple and fast. Simulation result shows that the separation time of our algorithm is two and half times shorter than that of Taro and Hyvarinen under the same separation performance and the same source signals.

Key words: Givens transform; whiten; Scatter plot; blind separation

1 引言(Introduction)

所谓盲分离问题,就是在未知传输信道的情况下,从一系列传感器接收到的信号中分离出输入信号.在此问题中,除了原始输入信号是相互独立的这一信息之外,我们不知道有关原始输入信号与信道结构的任何先验知识,用数学表达式可以将该模型描述如下:

$$x(t) = As(t). \quad (1)$$

其中, $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t))^T$ 为源信号矢量, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))^T$ 为观测信号矢量, A 为 $m \times n$ 的混叠矩阵;混叠矩阵 A 是未知的,源信号 $s(t)$ 也是未知的.盲分离的目标就是使得分离出来的源信号 $s(t) = \Lambda Ps(t)$, 其中 Λ 为对角矩阵, P 为置换阵.即分离出来的信号与源信号的幅度

和顺序可以不同,但波形一致.由于盲信号分离的广泛应用,使得它已成为信号处理领域近年来的研究热点之一,相应的各种分离技术和分离算法在不断涌现.目前这些算法大体上可以分为两类,如文献[1~6]所采用的代数方法以及文献[7~10]所采用的自适应方法.最近, Taro^[11]和 Hyvarinen^[12]又分别采用几何分析方法对此问题进行了探讨,获得了一类较好的分离算法.以上各类算法虽然都有各自的优势,但也都分别存在着局限,从而寻求新的有效算法仍是人们一直在探讨的问题.

本文提出一类新的实时线性混叠信号的盲分离算法,该算法基于均匀分布的源信号相互独立时其 Scatter 图具有的特殊形状以及与坐标轴平行的几何性质,将混叠信号的 Scatter 图经旋转或白化后旋转

收稿日期:2002-06-12;收修改稿日期:2002-11-21.

基金项目:国家杰出青年科学基金资助项目(60325310);国家自然科学基金资助项目(60274006);广东省自然科学基金重点基金资助项目(020826);教育部跨世纪优秀人才基金资助项目;广东省自然科学基金团队研究项目(04205783).

以恢复独立时的形状,从而实现源信号的逐一重现或同步重现. 本文的方法相对 Taro^[11] 和 Hyvarinen^[12] 而言,大大简化了其分离过程,从而缩短了分离时间. 仿真结果表明,对同样两幅混叠图像的分,在效果相当的情况下,本文算法的分离时间比 Hyvarinen 的分离时间缩短了约 2.5 倍.

为了方便算法的使用,我们假设如下条件:

- a) 各源信号服从均匀分布,彼此统计独立,且具有 0 均值,单位方差;
- b) 传感器数量等于源信号数量,即混叠矩阵为一方阵.

2 逐一分离 (Separation step by step)

首先讨论对源信号实现逐一分离的方法,对源信号的同步分离将在第 3 节讨论.

2.1 代数原理 (Algebra theory)

将混叠矩阵 A 作 QR 分解,则该模型可转化为如下形式:

$$x(t) = QRs(t). \quad (2)$$

其中 Q 为正交矩阵, R 为上三角阵. 式(2)变形可得如下形式:

$$Q^T = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

而由矩阵的 QR 分解思想知道,上式矩阵 Q^T 可由一系列初等旋转变换来实现^[13],即

$$Q^T = T_{n-1}, \dots, T_2, T_1. \quad (4)$$

其中

$$\begin{cases} T_1 = T_{1n}T_{1,n-1}, \dots, T_{12}, \\ T_2 = T_{2n}T_{2,n-1}, \dots, T_{23}, \\ \vdots \\ T_{n-1} = T_{n-1,n}, \end{cases} \quad (5)$$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & \cos\theta & & & & & -\sin\theta \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & \sin\theta & & & & \cos\theta & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

从式(3)~(6)可以看出,将混叠信号经过一系列初等旋转变换可以提取出其中的一个源信号 $s_n(t)$, 基于 R 的上三角结构,则其它源信号可以采用类似于 Gram-Schmidt 正交化的方法逐一提取.

2.2 几何性质 (Geometrical properties)

为清楚地表达几何算法的原理与实现,结合两个信号的混叠情况进行说明,关于多个信号混叠的情况,我们将另行讨论. 对于两个独立的均匀分布源信号,其 Scatter 图将表现为平行坐标轴的一个矩形(如图 1(a)),线性混叠后将是一个平行四边形(如图 1(b)),因为混叠信号是相关信号,这从其左下与右上两个顶点可以看出,该点的横坐标对应的纵坐标是唯一的,即混叠信号 $x_1(t)$ 含有 $x_2(t)$ 的信息,所以相关.

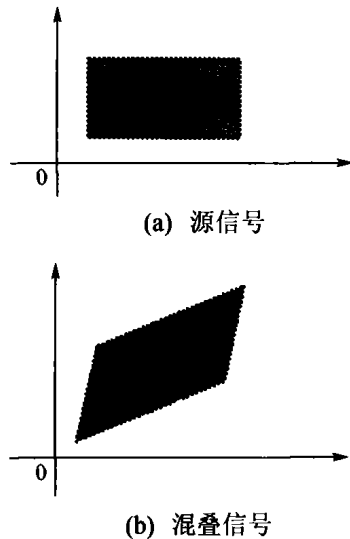


图 1 信号的 Scatter 图
Fig. 1 Scatter plot of signals

2.3 算法原理与实现 (Theory and realization of this algorithm)

鉴于上面的几何性质,我们的分离目标就是将图 1(b)恢复成(a)的形状. 为此,可以依据代数原理先将(b)旋转,使得其一边平行于坐标轴,即先分离出其中的一个源信号,另一个源信号则可以采用继续旋转与另一坐标轴平行而求得;或者将 x_1, x_2 对换重复上述过程来恢复;或者采用 Gram-Schmidt 正交化的方法来提取. 由于直接从几何上计算旋转角度有些复杂,我们不妨分以下步骤去实现,即:

1) 将左下顶点平移到原点,即将 Scatter 图由图 1(b)变为图 2(a),其实现过程为

$$\begin{aligned} (x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t)) = \\ (x_1(t) - \min[x_1(t)], x_2(t) - \min[x_2(t)]). \end{aligned} \quad (7)$$

2) 旋转使得其一对角线与一坐标轴重合,即将 Scatter 图变为图 2(b),其实现过程为

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中 $\theta = \arctan\left(\frac{\max(x_2^{(1)}(t))}{\max(x_1^{(1)}(t))}\right)$.

3) 旋转使得其一边平行于坐标轴,从而分离出一个源信号 $s_2(t)$,即将 Scatter 图变为图 2(c),其实现过程为

$$\begin{pmatrix} x_1^{(3)}(t) \\ x_2^{(3)}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

其中 $\theta = \arctan\left(\frac{\max(x_2^{(2)}(t))}{\max(x_1^{(2)}(t))}\right)$, $s_2(t) = x_2^{(3)}(t) = \lambda s_2(t)$, 恢复出来的源信号将与原始源信号在幅度上存在一个倍数;

4) 采用类似于 Gram-Schmidt 正交化的方法,从任意一个混叠信号中剔除该源信号含量,即可得到另一个源信号.由累积量的性质有

$$\text{cum}(x_1(t), s_2(t)) = \lambda a_{12} \text{cum}(s_2(t), s_2(t)), \quad (10)$$

则另一个源信号为

$$s_1(t) = x_1(t) - \frac{\text{cum}(x_1(t), s_2(t))}{\text{cum}(s_2(t), s_2(t))} s_2(t). \quad (11)$$

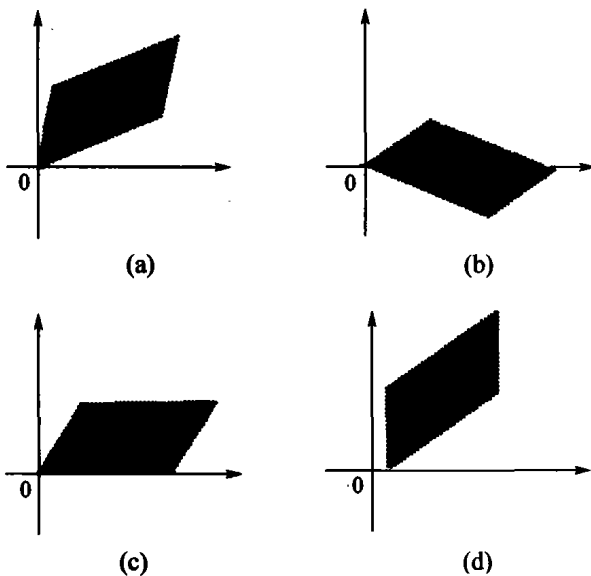


图 2 恢复过程的 Scatter 图

Fig. 2 Scatter plot during the course of restoring

3 同步分离(Synchronous separation)

第 2 节通过几何分析,在两个源信号的情况下,通过 4 步将它们进行了一个一个的分离,本节将讨论采用白化的方法将源信号同步分离.

3.1 代数原理(Algebraic theory)

对于上述逐一分离的方法,可以作进一步改进.先将混叠信号白化,即构造白化矩阵 w ,使得 $R_y(0) = I$,其中 $y(t) = wx(t)$,因为

$$R_y(0) = wR_x(0)w^T = wAR_s(0)A^T w^T = I. \quad (12)$$

由假设条件知, $R_x(0) = I$,所以 $wA = Q$ 为一正交阵,从而混叠模型将转化为

$$y(t) = Qs(t). \quad (13)$$

上述模型表明,将白化后的混叠信号经过一系列的初等旋转变换可以同步提取出所有的源信号.

3.2 几何性质(Geometrical properties)

图 3(b)为混叠信号白化后的 Scatter 示意图,混叠信号经过白化后为一矩形,显然白化后只需经过旋转变换即可恢复成源信号的 Scatter 形状,这与代数原理是完全吻合的.

3.3 算法原理与实现(Theory and realization of this algorithm)

鉴于上面的几何性质,这里的分离步骤就是将图 3(a)经图 3(b)转换成图 3(c)的形状,即:

1) 将混叠信号白化,即设白化矩阵为 w ,作如下奇异值分解:

$$R_x(0) = uDu^H. \quad (14)$$

其中 u 为正交矩阵, D 为一对角阵,则可求得白化矩阵

$$w = D^{-\frac{1}{2}} u^H, \quad (15)$$

从而求得白化信号 $y(t) = wx(t)$.

2) 旋转,即设 z_1, z_2 为分离信号,则

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

其中 $\theta = \arctan\left(\frac{\min(y_2(t)) - y_2'(t)}{y_1'(t) - \min(y_1(t))}\right)$, y_2' 为 y_1 取最小值时所对应的 y_2 , y_1' 为 y_2 取最小值时所对应的 y_1 .

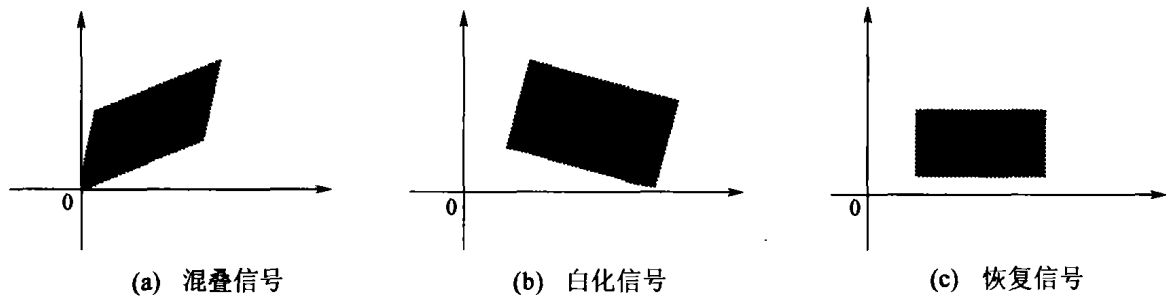


图3 源信号恢复过程

Fig. 3 Restoring course of source signals

4 仿真结果与分析 (Simulation results and analysis)

为了说明本文方法的有效性和优越性,我们分别就语音信号和图像信号进行了仿真.仿真结果表明,对于语音信号的分离,本文方法与 Hyvarinen^[12]方法效果相当,但对图像信号的分离,在效果相当的情况下,本文算法的分离时间比 Hyvarinen^[12]的相应分离时间缩短了约 2.5 倍.

4.1 仿真标准化 (Simulation standardization)

为了满足源信号是零均值单位方差的条件,在仿真时可以先将源信号标准化,即采用下式转化:

$$s(t) = \frac{s(t) - E(s(t))}{\sqrt{\text{var}(s(t))}}. \quad (17)$$

其中 $E(s(t))$, $\text{var}(s(t))$ 分别为源信号 $s(t)$ 的均值与方差.

4.2 仿真效果评判 (Simulation effect judgement)

为了定量地评价分离效果,我们采用分离信号与源信号的相似系数 ζ_{ij} 作为其检验指标之一,其中

$$\zeta_{ij} = \zeta(z_i, s_j) = \frac{\left| \sum_{t=1}^n z_i(t) s_j(t) \right|}{\sqrt{\sum_{t=1}^n z_i^2(t) \sum_{t=1}^n s_j^2(t)}}. \quad (18)$$

当 $z_i = cs_j$ 时, $\zeta_{ij} = 1$, 即允许盲分离结果在幅度上存在差异, z_i 与 s_j 相互独立时, $\zeta_{ij} = 0$. 另一个评判指标为分离时间 t .

4.3 仿真结果 (Simulation results)

仿真 1 源信号为 Office2000 中的两背景声音信号,其混叠矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & 1.5 \\ 1.4 & 3 \end{bmatrix}$,分离过程的 Scatter 图如图 4 所示,分离结果如图 5 所示.

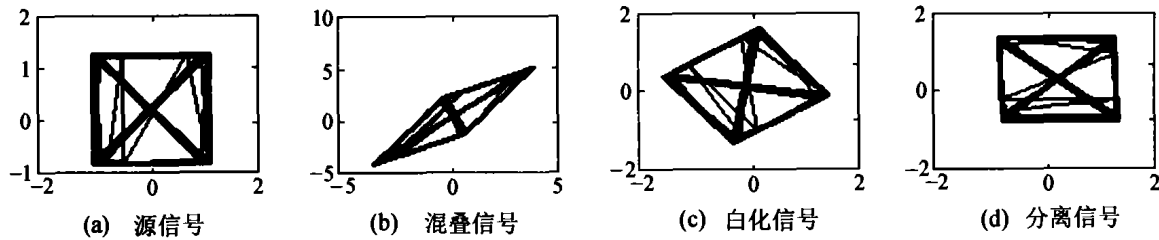


图4 分离过程的 Scatter 图

Fig. 4 Scatter plots during the course of separation

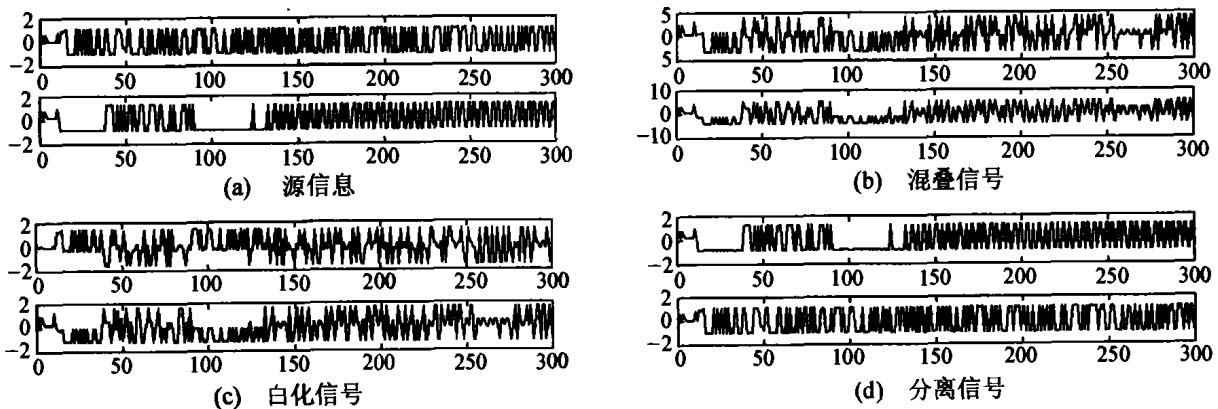


图5 背景声音信号分离图

Fig. 5 Scatter plot of ground music signals

仿真 2 源信号为两幅 256×256 图像信号,其混叠矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$,算法性能比较如下表 1 所示,分离结果如图 6 所示.

表 1 算法性能比较

Table 1 Comparison of algorithm performance

算法	分离时间/s		分离效果评判	
	声音	图像	声音	图像
Hyvarinen 算法	6	63	$\zeta = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0314 \\ 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$	$\zeta = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0086 \\ 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$
本文算法	6	25	$\zeta = \begin{bmatrix} 0.0314 & 0.9728 \\ 0.9800 & 0.0156 \end{bmatrix}$	$\zeta = \begin{bmatrix} 0.9762 & 0.0344 \\ 0.0061 & 0.9834 \end{bmatrix}$

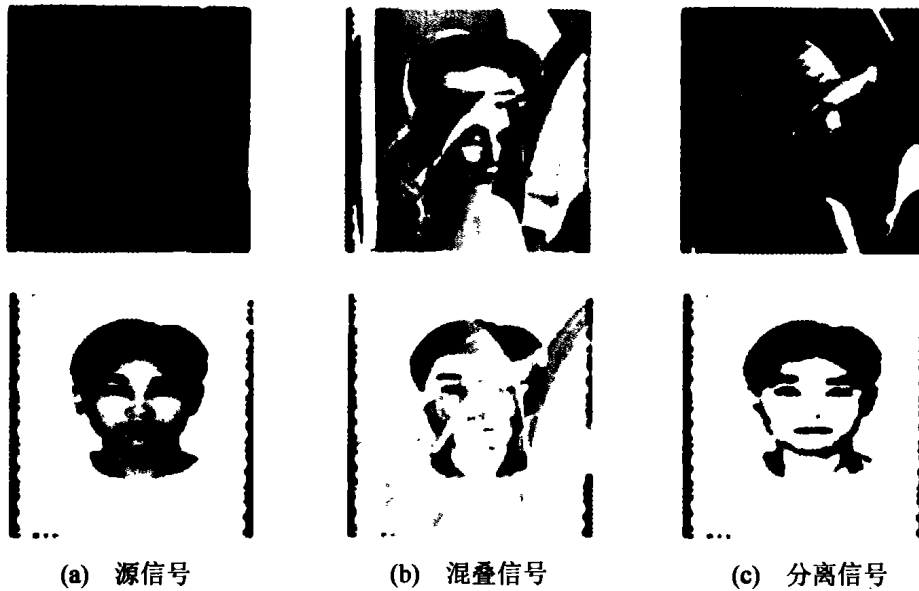


图 6 图象分离效果

Fig. 6 Separation effect of images

从上面两个仿真的相似矩阵可以看出,其每行每列都有且仅有一个元素接近于 1,其它元素都接近于 0,这说明分离效果是比较理想的.另外与 Hyvarinen 提出的快速算法比较而言,本文算法大大地减少了分离时间,约缩短了 2.5 倍.

4.4 逐一分离与同步分离的比较 (Comparison

between separation step by step and separation synchronous)

从表 2 可以看出,两种分离算法在分离效果上差不多,逐一分离约强于同步分离,但分离时间上同步分离要快于逐一分离.

表 2 逐步分离与同步分离比较

Table 2 Comparison between separation step by step and separation synchronous

算法	分离时间/s		分离效果评判	
	声音	图像	声音	图像
逐一分离	8	45	$\zeta = \begin{bmatrix} 0.0294 & 0.9766 \\ 0.9790 & 0.0248 \end{bmatrix}$	$\zeta = \begin{bmatrix} 0.9808 & 0.0301 \\ 0.0019 & 0.9896 \end{bmatrix}$
同步分离	6	25	$\zeta = \begin{bmatrix} 0.0314 & 0.9728 \\ 0.9800 & 0.0156 \end{bmatrix}$	$\zeta = \begin{bmatrix} 0.9762 & 0.0344 \\ 0.0061 & 0.9834 \end{bmatrix}$

5 结论(Conclusion)

提出了一类实时线性混叠信号盲分离几何算法,该算法根据均匀分布的源信号相互独立时其 Scatter 图具有的特殊形状以及与坐标轴平行的几何性质,将混叠信号的 Scatter 图经旋转或白化后旋转以恢复独立时的形状,从而实现源信号的重现.仿真结果表明该算法大大地减少了分离时间,并具有很好的分离效果.

参考文献(References)

- [1] BELOUCHRANI A, KARIM Abed-Meraim, CARDOSO Jean-Francois, et al. A blind source separation technique using second-order statistics [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1997, 45(2): 434 - 443.
- [2] LAI Wai-kuen, CHING P-C. A novel blind estimation algorithm [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1997, 45(7): 1763 - 1769.
- [3] BELOUCHRANI A, MOENESS G A. Blind source separation based on time-frequency signal representations [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1998, 46(11): 2888 - 2897.
- [4] CARDOSO J F, SOULIOMICA A. Blind beamforming for non-gaussian signals [J]. *IEE Proc-F*, 1993, 140(6): 362 - 370.
- [5] YAMAGUCHI T, ITOH K. An algebraic solution to independent component analysis [J]. *Optics Communications*, 2000, 178(1): 59 - 64.
- [6] ZHU Jie, CAO Xiren, DING Zhi. An algebraic principle for blind separation of white non-Gaussian sources [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1999, 76(2): 105 - 115.
- [7] DAI Xianhua. A new blind separation method of convolutive mixture of regular signal based on hidden representation and system deconvolution [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2001, 81(1): 173 -

182.

- [8] DING Zhi, NGUYEN T. Stationary points of a Kurtosis maximization algorithm for blind signal separation and antenna beamforming [J]. *IEEE Trans on Signal Process*, 2000, 48(6): 1587 - 1596.
- [9] IHM Bin-Chul, PARK Dong-Jo. Blind separation of sources using higher-order cumulants [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1999, 73(3): 267 - 276.
- [10] 谭丽丽, 韦岗. 多输入多输出盲解卷问题的最大熵解法[J]. 电子学报, 2000, 28(1): 114 - 116.
(TAN Lili, WEI Gang. Multi-input multi-output blind deconvolution via maximum entropy [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2000, 28(1): 114 - 116.)
- [11] YAMAGUCHI T, HIROKAWA K, ITOH K. Independent component analysis by transforming a scatter diagram of mixtures of signals [J]. *Optics Communications*, 2000, 173(1-6): 107 - 114.
- [12] HYVARINEN A, OJA E. Independent component analysis: algorithms and applications [J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2000, 13(4-5): 411 - 430.
- [13] 程云鹏. 矩阵论[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2000.
(CHENG Yunpeng. *Matrix Theory* [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnic University Press, 2000.)

作者简介:

何昭水 (1978—), 男, 华南理工大学电信学院博士生, 主要研究方向为盲信号处理, 自适应滤波, E-mail: he_shui@163.com;

谢胜利 (1958—), 男, 华南理工大学无线电与自动控制研究所副所长, 教授、博士生导师、IEEE 高级会员. 于非线性系统控制理论与应用、自适应信号处理等领域在国内外学术刊物上发表论文 60 多篇, 目前感兴趣的领域为非线性系统学习控制理论、自适应信号处理、盲信号分离和图像处理等, E-mail: adshlxie@scut.edu.cn;

章晋龙 (1974—) 男, 华南理工大学电信学院博士生, 主要研究方向为盲信号处理、无线网络优化.