

不稳定零动态系统的鲁棒控制

张 静, 王广雄, 何 朕

(哈尔滨工业大学 控制科学与工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 不稳定零动态系统的特点是存在不稳定模态. 不稳定零动态与不稳定模态有联系但并不等同, 不稳定零动态具有不变性, 而不稳定模态则是可以被镇定的. 采用复合控制, 用快速回路直接对不稳定子系统进行镇定, 而对于取输出进行反馈的慢变回路来说, 将快速回路的动特性作为未建模动态而采用常规的鲁棒控制方法进行设计. 整个设计具有鲁棒性. 以小车-倒摆系统为例对设计过程作了详细的说明.

关键词: 不稳定零动态; 非最小相位非线性系统; 鲁棒控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Robust control of systems with unstable zero-dynamics

ZHANG Jing, WANG Guang-xiong, HE Zhen

(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: An important feature of systems with unstable zero-dynamics is that there exist unstable modes. Unstable zero-dynamics is related to the unstable modes, but are not the same with each other. Unstable zero-dynamics is invariant, but the unstable modes can be stabilized. With composite control, a fast loop is employed to directly stabilize the unstable subsystem. The slow loop formed from the output is then designed by existing robust method, while the dynamics of the fast loop is treated as the unmodeled dynamics. The whole design is robust. An example of an inverted pendulum on a cart is presented to illustrate the design process.

Key words: unstable zero-dynamics; non-minimum-phase nonlinear systems; robust control

1 引言(Introduction)

零动态是非线性理论中的一个概念, 相当于传递函数中零点的概念. 不稳定零动态系统也称为非最小相位系统. 不稳定零动态系统的控制存在着设计上的难点, 主要是鲁棒性问题. 最近文献[1]提出了一种新的复合控制的方法, 这是先将系统变换成 Brunovsky 典型型, 再通过选择时间比例和变量比例, 使不稳定零动态成为一快变的子系统, 整个系统变换成类似一个奇异摄动系统, 然后分别对慢变子系统和快变子系统设计控制律 u_s 和 u_f , 构成复合控制, $u = u_s + u_f$. 这种提法理论上似乎比较完美, 但是实际上时间比例不可能小到 ϵ , 即慢变子系统不可能无限地慢, 故时间比例的选择和两个子系统的相互影响在真正设计时是不够明确的. 本文指出, 可以不通过变换而直接对不稳定子系统设计一个快变系统, 然后再设计慢变系统. 这样的设计物理概念清晰, 参数的确定也比较容易掌握.

2 不稳定零动态系统的特点(Features of the system with unstable zero-dynamics)

一般在研究非线性系统时常采用通过坐标变换得到的正规形式(normal form), 即

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \\ \dot{x}_r = b(x, z) + a(x, z)u, \\ y = x_1, \\ \dot{z} = f_z(x, z). \end{cases} \quad (1)$$

式中 r 为系统的相对阶, $\dot{z} = f_z(0, z)$ 为系统的零动态.

式(1)的正规形式对一般性的理论研究很重要, 不过当讨论具体的不稳定零动态系统的控制时则宜采用如下的结构形式, 即余下的 $n - r$ 个方程也有输入项

$$\begin{cases} \Sigma_1: \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \\ \dot{x}_r = b(x, z) + a(x, z)u, y = x_1; \\ \Sigma_2: \dot{z} = q(x, z) + p(x, z)u. \end{cases} \quad (2)$$

这是因为对实际问题来说,系统中的各状态变量都在一定程度上受到控制输入 u 的影响,所以式(2)比式(1)更接近实际,更容易得到.

根据式(2),当 $x(t) = 0$ 时有

$$0 = b(0, z(t)) + a(0, z(t))u(t),$$

将这个式子中的 $u(t)$ 代入式(2)的第2个方程式,得到一个关于 $z(t)$ 的微分方程

$$\dot{z} = q(0, z) - p(0, z) \frac{b(0, z)}{a(0, z)}, \quad (3)$$

这就是系统的零动态.

不稳定零动态系统的特点是一定存在有不稳定模态,当用式(2)来表示时,子系统 Σ_2 一定是不稳定的.当然零动态(式(3))不稳定时,前面的一项 $\dot{z} = q(0, z)$,即 Σ_2 也可能是稳定的,至少理论上是不可能的.但是如果不稳定零动态系统中的模态都是稳定的,那么对设计来说就不存在问题(参见式(4)下面的讨论),因此本文在讨论不稳定零动态系统时,总假设存在一个不稳定的子系统 Σ_2 .对于这样的系统,如果取 $y = x_1$ 进行输出反馈设计,那么一般来说这种设计没有鲁棒性^[2].

3 鲁棒控制律设计(Design of the robust control law)

对于不稳定零动态系统,宜采取复合控制律,由一个快变分量 u_f 和一个慢变分量 u_s 组成,即 $u = u_f + u_s$.用 u_f 直接对式(2)中的不稳定子系统 Σ_2 进行镇定,而 u_s 则是取系统的输出 $y = x_1$ 进行反馈.应该说明的是与文献[1]不同,这里的 u_f 不是镇定不稳定的零动态,而是镇定一个实际上的不稳定子系统 Σ_2 .事实上,系统的零动态具有不变性.

将 $u = u_f + u_s$ 代入式(2),得

$$\begin{cases} \Sigma_1: \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \\ \dot{x}_r = b(x, z) + a(x, z)(u_f + u_s), y = x_1; \\ \Sigma_2: \dot{z} = q(x, z) + p(x, z)(u_f + u_s). \end{cases} \quad (4)$$

注意到式(4)的两个式子中都有同样的 $u_f + u_s$,用对式(2)的同样处理,可得这时系统的零动态依然是

$$\dot{z} = q(0, z) - p(0, z) \frac{b(0, z)}{a(0, z)}, \quad (5)$$

可见零动态具有不变性.

由于 u_f 的镇定作用,加 u_f 的控制律后式(4)中子系统 Σ_2 已经是一个具有快速响应特性的稳定的子系统了.加快变控制律 u_f 后的式(4)与式(2)不同之处是,虽然都具有同样的不稳定零动态,但式(4)已没有不稳定模态,对鲁棒设计已经不构成威胁.这

是因为只要将 u_s 设计成一个较慢响应的控制律,非最小相位零点对稳定性就不会有什么影响了.

设计时, u_f 按单独镇定子系统 Σ_2 的要求

$$\dot{z} = q(0, z) - p(0, z)u_f$$

设计一个快速系统.这时,由于相应的阶次较低,所以比较容易设计.

设计慢变的 u_s 时则可认为快速回路的响应是瞬时完成的,即子系统的动态(相当于传递函数的分母部分)可用静态系数代替,而将实际的动态特性与静态特性之间的差别作为系统的未建模动态考虑,进行鲁棒设计.事实上,如果从带宽的角度来考虑,只要快速回路和慢变回路的带宽差5倍,就可以略去快变子系统的动态特性而只保留子系统相互作用而形成的不稳定零动态(见式(5)),具体的设计过程见算例.

如果用线性系统的传递函数和频率特性的概念来解释,这时系统的回路传递函数是

$$K(s)G(s) = [K_f(s) \quad K_s(s)] \begin{bmatrix} G_f(s) \\ G_s(s) \end{bmatrix} = K_f(s)G_f(s) + K_s(s)G_s(s). \quad (6)$$

式中 K, G 为相应回路的控制器和对象.

系统的带宽错开5倍以上,就是指在快变回路 $K_f(j\omega)G_f(j\omega)$ 起作用的频段上慢变回路的 $K_s(j\omega)G_s(j\omega)$ 已经有很大的衰减,所以只要在对稳定性有影响的-1点附近,让 $K_f G_f$ 起作用,并按常规的阻尼比要求来设计快速回路,就可以使回路频率特性 $K(j\omega)G(j\omega)$ 远离-1点,这样对不稳定零动态系统的控制来说就有了鲁棒性.

当然这里只是一种定性的解释,系统的稳定性还是要通过上述的先设计快速回路,然后再设计慢变回路等设计过程来保证,参见算例.

4 算例(Design example)

本文的设计思想是:设计一快速系统镇定不稳定子系统,然后将快速系统的模态视为未建模动态,对慢变系统进行鲁棒设计.这种设计思想也可以通过线性系统的算例来说明,这里也采用小车-倒摆这一典型的非最小相位系统^[3]作为算例.

设小车的质量为 M ,摆的质量为 m ,摆的长度为 l ,倒摆的偏转角为 θ ,小车的位移为 y ,加到小车上的力为 u ,则小车-倒摆系统的线性化方程式为^[2]

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{y} + ml\ddot{\theta} = u, \\ \frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{y} = mgl\theta. \end{cases} \quad (7)$$

设 $x_1 = y, z_1 = \theta$, 将式(7)整理成式(2)的形式, 并设 $M = 0.145 \text{ kg}, m = 0.03 \text{ kg}, l = 0.125 \text{ m}$, 得

$$\begin{cases} \Sigma_1: \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -1.4474z_1 + 6.5574u, y = x_1; \\ \Sigma_2: \dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = 67.5436z_1 - 39.3443u. \end{cases} \quad (8)$$

式(8)中的 Σ_2 是不稳定子系统, 不稳定极点为 8.218.

根据式(3)得系统的零动态为

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 58.8592 & 0 \end{bmatrix} z. \quad (9)$$

式(9)零动态中的不稳定极点为 7.672, 略小于 Σ_2 的不稳定极点.

先设计一快速系统来镇定系统 Σ_2 . Σ_2 的阶次较低, 一般可以采用常规技术进行设计, 事实上这个对象的传递函数为

$$G_f(s) = \frac{-39.3443}{s^2 - 67.5436}. \quad (10)$$

按文献[4]的思路, 取阻尼比 $\xi = 0.5$, 并取较大的带宽为 15 rad/s, 得快速系统的控制器为

$$K_f(s) = \frac{18.88(s + 13.18)}{(s + 45.04)}. \quad (11)$$

这个快速系统的控制输入 $u_f = K_f(s)z_1$. 设 $u = u_f + u_s$, 将 u 和 u_f 代入式(8)得到从 u_s 到 $y = x_1$ 的等效传递函数是

$$P(s) = \frac{6.5574(s + 45.04)(s + 7.672)(s - 7.672)}{s^2(s + 30.04)(s^2 + 15s + 224.7)}. \quad (12)$$

从式(12)可见, 这个对象与式(9)具有同样的不稳定零动态, 但式(12)已没有不稳定模态.

现在要设计的是针对 $P(s)$ 的控制器 $K_s(s)$. 由于这是一个慢变系统, 所以可以将 $P(s)$ 中的高频模态略去, 成为 $P_0(s)$

$$P_0(s) = \frac{0.0437(s + 7.672)(s - 7.672)}{s^2}. \quad (13)$$

具体做法是将式(12)得到的 $P(s)$ 与其低频模型 $P_0(s)$ 之间的差视为设计中的不确定性, 即

$$P(j\omega) = [1 + L(j\omega)]P_0(j\omega). \quad (14)$$

式中 $L(j\omega)$ 为乘性不确定性^[5].

图1中虚线所示就是根据式(14)所得到的 $|L(j\omega)|$. 根据图1可得不确定性的权函数(对应于图中实线)为

$$W_2(s) = \frac{100s + 1}{s + 1000}, \quad |W_2(j\omega)| > |L(j\omega)|. \quad (15)$$

有了不确定性的 $W_2(s)$ 就可以采用一般的鲁棒设计

计方法来进行设计了. 本例采用 PS/T 混合灵敏度问题的 H_∞ 设计^[6].

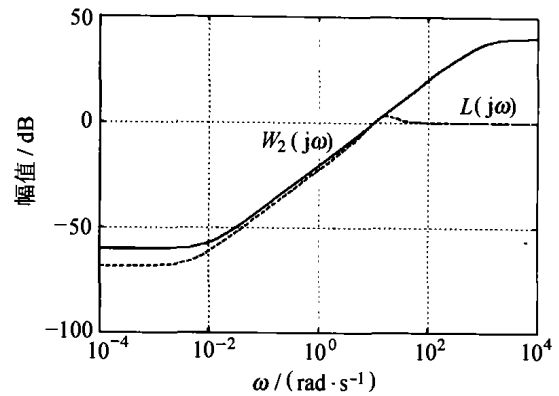


图1 权函数 W_2 的伯德图

Fig. 1 Bode plot of the weighting function W_2

PS/T 问题是指求解下列的优化设计问题:

$$\min_{K_{sub}} \left\| \begin{matrix} W_1 PS \\ W_2 T \end{matrix} \right\|_\infty \leq \gamma. \quad (16)$$

式中 S 是灵敏度函数, T 是补灵敏度函数, 即闭环传递函数. W_1 和 W_2 为权函数. W_1 反映系统对扰动的抑制性能^[6], 本例中取 W_1 为权系数 ρ . W_2 就是上面所得到的不确定性权函数 $W_2(s)$.

求解 H_∞ 优化问题, 当 $\gamma_{opt} = 1.0001$ 时, 得 $\rho = 1.899$. 所得的 H_∞ 控制器为

$$K_\infty(s) = \frac{-1.5773 \times 10^{-5}(s - 1.48 \times 10^8)(s + 1000)(s + 1.511)}{(s + 1.034 \times 10^4)(s + 23.43)(s + 7.672)}. \quad (17)$$

由于这是一个慢变系统的控制器, 故可以将式(17)中 H_∞ 控制器的高频模态略去, 得最终的控制器 K_s .

$$K_s(s) = 225.72 \frac{s + 1.511}{(s + 7.672)(s + 23.43)}. \quad (18)$$

由式(11), (18)的控制器 $K(s) = [K_f(s) \ K_s(s)]$ 得对应于式(6) $K(s)G(s)$ 的 Nyquist 图线(图2). 这条 Nyquist 图线在 -1 点附近基本上由快速系统的 $K_f G_f$ 决定, 在 $\omega \leq 6 \text{ rad/s}$ 的频段上由于仍受到慢变系统的 $K_s G_s$ 影响, 距 -1 点较近, 所以灵敏度函数 $S(j\omega)$ 的峰值 M_s 会大一些, 这是因为本例中对象是不稳定的, 这种不稳定对象控制的特点是灵敏度 $S(j\omega)$ 有较大的峰值 M_s , 而系统依然有足够的阻尼比^[4].

复合控制中闭环系统的特征方程为(见式(6)的符号) $1 + K_f G_f + K_s G_s = 0$, 根据设计所得的 $K_f(s)$, $K_s(s)$ 可得对应的极点为

$$-32.83, -15.52 \pm j12.25, -0.91 \pm j4.56, -2.78. \quad (19)$$

式(19)的两对复数极点反映了控制中的快变分量和慢变分量.图3是系统在单位脉冲扰动下的响应曲线,可见有足够的阻尼.如果降低慢变回路的带宽还能提高系统的稳定性.本例中采用 H_∞ 设计的思想是在快速回路动特性(即 $W_2(j\omega)$) 约束下,尽量加大 ρ (对应慢变回路的带宽),以使得控制规律中有足够的伺服刚度来克服实际上存在的摩擦力.换言之,系统的稳定性通过指定的带宽比值是可以设计的.

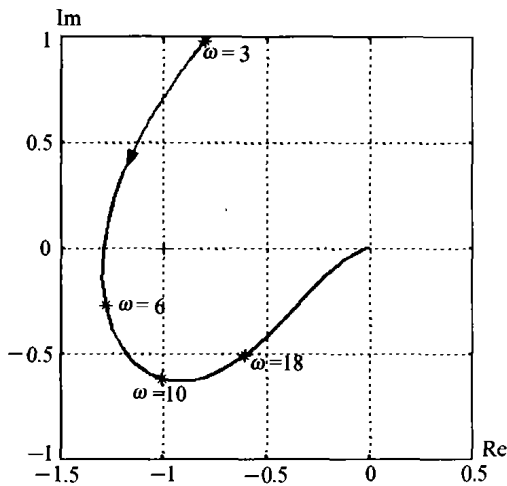


图2 复合控制的奈氏图线

Fig. 2 Nyquist plot of the composite control

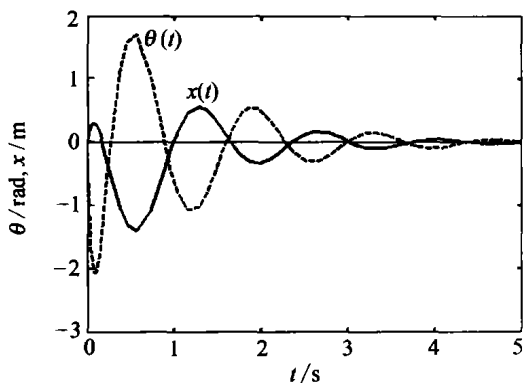


图3 系统的单位脉冲响应

Fig. 3 Impulse responses of the system

关于设计的鲁棒性,当考虑乘性不确定性时,鲁棒稳定性的条件是^[5]

$$l_m(\omega) < \underline{\sigma}[I + GK(j\omega)^{-1}], \quad \forall \omega \geq 0. \quad (20)$$

式中 $l_m(\omega)$ 为乘性不确定性的界函数.图4所示就是本例中 $I + (GK)^{-1}$ 的最小奇异值伯德图,图中当 $\omega = 5 \text{ rad/s}$ 时 $\underline{\sigma}$ 有最小值 -13 dB (0.22),并随之超过 0 dB 线.所以根据式(20)可知,只要低频段对象的不确定性的相对变化不大于22%,系统总是稳定

的,即这种复合控制可以保证鲁棒性.

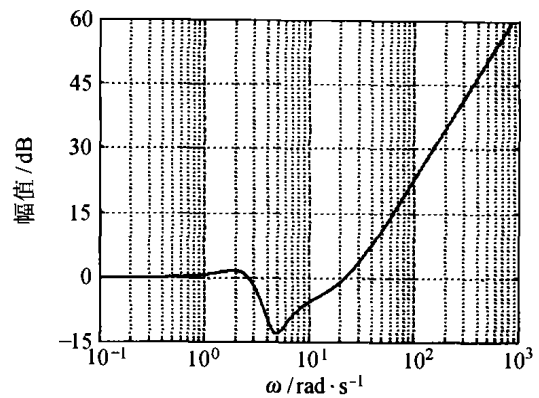


图4 $\underline{\sigma}[1 + GK(j\omega)^{-1}]$ 的伯德图

Fig. 4 Bode plot of the $\underline{\sigma}[1 + GK(j\omega)^{-1}]$

应该说明的是,本节的这个不稳定非最小相位系统的算例如果采用输出反馈,若只取 $y = x_1$ 是没有鲁棒性的,即使是采用 Isidori 提出的零动态解设计^[3],也不能得到一个鲁棒性的设计^[2],所以采用复合控制是唯一可行的输出反馈控制方案.

5 结论(Conclusions)

1) 不稳定零动态系统的特点是存在不稳定极点.或者说这个系统既有非最小相位零点,又有不稳定极点.采用复合控制,用快速回路直接对不稳定子系统进行镇定,再用慢变回路镇定整个系统,可以保证设计的鲁棒性.这种设计思路物理概念清晰,而且也容易操作.

2) 文中提出的 H_∞ 设计也可以用于一般的多回路设计.对于慢变回路来说,因为带宽较窄,已经不存在一般概念下的高频未建模动态.文中在慢变回路的设计中将快速回路用低频数学模型来代替,而将其与实际特性的差别作为未建模动态来考虑,这种设计所得的 H_∞ 控制器阶次较低,便于实际中应用.

参考文献(References):

- [1] LEE J, HA I. A novel approach to control of nonminimum-phase nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(9): 1480 - 1486.
- [2] 王广雄,张静.不稳定零动态解设计的鲁棒性[J]. *自动化学报*, 2004, 30(1): 108 - 113.
(WANG Guangxiong, ZHANG Jing. Robustness of the design by unlocking the unstable zero-dynamics [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(1): 108 - 113.)
- [3] ISIDORI A. A tool for semiglobal stabilization of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems via output feedback [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(10): 1817 - 1827.

- [4] 王广雄,袁欣,何朕.不稳定对象的PID控制[J].控制与决策,2002,17(5):611-613.
(WANG Guangxiong, YUAN Xin, HE Zhen. PID control of unstable plants [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(5): 611-613.)
- [5] DOYLE J, STEIN G. Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1981, 26(1): 4-16.
- [6] WANG Guangxiong, WANG Xinsheng. H_∞ two-block design of servo systems [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology (English*

edition), 2002, 9(2): 142-144.

作者简介:

张静 (1968—),女,副教授,博士生,研究方向为鲁棒控制系统设计, E-mail: zh.liangyue@sina.com;

王广雄 (1933—),男,教授,博士生导师,研究方向为 H_∞ 控制理论及应用、控制系统的鲁棒设计, E-mail: gxwang@hope.hit.edu.cn;

何朕 (1972—),女,副教授.研究方向为广义系统 H_∞ 控制、控制系统计算机辅助设计.

(上接第66页)

6 结束语(Conclusion)

将混沌优化算法和模糊控制应用到混沌系统的延迟反馈控制中,利用混沌优化算法可以一次确定出混沌系统的多个不稳定周期轨道的周期,从而解决了延迟反馈控制中延迟时间难以确定的问题.利用模糊控制技术确定延迟反馈控制中的控制刚度 K ,解决了控制刚度难以选取的问题.仿真结果表明,本文方法不但可以有效解决延迟反馈控制中参数选取的问题,同时提高了控制系统的鲁棒性和快速性.

参考文献(References):

- [1] OTT E, GREBOGI C, YORKE J C. Controlling chaos [J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(11): 1196-1199.
- [2] PYRAGAS K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback [J]. *Physics Letters A*, 1992, 170(6): 421-428.
- [3] 王光瑞,于熙龄,陈式刚.混沌的控制、同步与利用[M].北京:国防工业出版社,2001,87-128.

(WANG Guangrui, YU Xiling, CHEN Shigang. *Control, Synchronization and Application of Chaos* [M]. Beijing: National Defence Industry Press. 2001, 87-128.)

- [4] 李兵,蒋慰孙.混沌优化方法及其应用[J].控制理论及应用,1997,14(4):613-615.

(LI Bing, JIANG Weisun. Chaos optimization method and its application [J]. *Control Theory & Applications*, 1997, 14(4): 613-615.)

- [5] 李函雄,陈关荣.传统模糊控制的双重特性[J].自动化学报,2001,27(4):447-459.

(LI Hanxiong, CHEN Guanrong. Dual features of conventional fuzzy logic control [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(4): 447-459.)

- [6] MATSUMOTO G T. A chaotic attractor from Chua's circuit [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 1984, 31(12): 1055-1058.

作者简介:

修碧波 (1978—),男,北京理工大学博士研究生,研究方向为混沌神经网络的应用, E-mail: xiuchunbo@sohu.com;

刘向东 (1971—),男,北京理工大学副教授,研究方向为非线性动力学、非线性控制、分叉混沌理论, E-mail: xdliu@bit.edu.cn;

张宇河 (1940—),男,北京理工大学教授,博士生导师,研究方向为机器人和运动控制, E-mail: zhangyuhe@bit.edu.cn.