文章编号: 1000-8152(2005)01-0092-04

奇异线性系统最优估计的多项式方法

郇正良, 崔进平
(泰山学院 计算机系,山东 泰安 271021)

摘要: 基于多项式ARMA新息模型方法提出了随机奇异线性离散时间系统的稳态最优估计.估值器的增益矩阵是通过新息分析和射影方法推得;其计算归结为求解一个多项式方程和谱分解.这一结果是最优估计多项式方法在奇异系统中的应用.

关键词: 随机奇异线性系统;状态估计; 多项式方程; 谱分解; 稳态最优
中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Polynomial approach to optimal state estimation of singular linear system

HUAN Zheng-liang, CUI Jin-ping
(Department of Computer, Taishan College, Taian Shandong 271021, China)

Abstract: The steady-state optimal estimation of singular systems is studied by applying ARMA innovation model. The key problem is the calculation of estimation gain matrix, which is obtained from the uniqueness of the ARMA innovation model. The estimator is computed in terms of the solution to one polynomial equation and spectral factorization.

Key words: stochastic singular linear system; state estimation; polynomial equation; spectral factorization; steady-state optimal

1 引言(Introduction)

奇异系统可以描述非因果情形,这些问题发生在机器人、经济和化学系统[1~9].这一类系统的状态估计在最近几年得到了广泛的关注.通常采用的方法包括加权最小二乘法[4,10],KALMAN滤波[8]以及极大似然[10].值得注意的是,这些结果中采用的性能指标有所不同,但人们普遍关心的仍是线性最小均方差估计.文献[8,9]采用的是线性最小均方差指标,并利用传统的KALMAN滤波理论得到了系统的递推估计.然而由于多次进行矩阵分解求逆,计算非常复杂,其结果也存在一定的局限.

最近,文献[5,6]基于时域新息分析方法提出了奇异系统预报、滤波和平滑估计的统一方法.主要思想是将奇异系统通过一个输出反馈转化成一个正常系统,其估计增益阵直接通过射影公式计算,但是文献[5,6]中给出的增益矩阵计算较复杂.本文目的在于简化增益矩阵的计算.基于多项式估计理论,通过求解一个多项式方程给出了一种简便的增益阵计算方法.多项式方程是利用谱分解的唯一性(ARMA新息模型唯一)推得.

2 问题描述(Problem statement)

考虑一奇异随机线性时不变系统,它是由下面的离散时间模型来描述的:

$$Mx(k+1) = \Phi x(k) + w(k),\ \det M = 0, \quad (1)$$

$$y(k) = Hx(k) + v(k), \quad (2)$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^{n\times 1}, w(k) \in \mathbb{R}^{n\times 1}, y(k) \in \mathbb{R}^{m\times 1}, v(k) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ 它们分别代表状态、系统随机噪声、观测输出和观测噪声,假定 $w(k), v(k)$ 是零均值的互不相关的白噪声,并且 $\mathrm{E}[w(k)w^{\mathrm{T}}(j)] = Q_w\delta_{kj}$, $\mathrm{E}[v(k)v^{\mathrm{T}}(j)] = Q_v\delta_{kj}$,其中E表示数学期望,$Q_w$ 和 Q_v 均为常数对称正半定矩阵,δ_{kj} 是克罗内克尔符号,T代表矩阵的转置.在本文中,作如下假定:

假定 2.1 系统(1)和(2)是 $\mathbb{R}$-可观测的[3].即

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} zM-\Phi \\ H \end{bmatrix} = n,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

z 有限,并且

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} M \\ H \end{bmatrix} = n.$$

收稿日期:2002-11-27;收修改稿日期:2004-02-11.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60174017).

其中 $\mathbb{C}$ 为复数集，$\mathrm{rank}A$ 表示矩阵 A 的秩.

假定 2.2　系统(1)是正则的，即 $\det(zM-\Phi)\neq 0$. 本文中需解决以下问题:

基于观测 $y(k),y(k-1),\cdots,y(0)$ 求 $x(k+l)$ 的稳态线性最小均方差估计 $\hat{x}(k+l\mid k)$. $l>0,l=0,l<0$ 时，$\hat{x}(k+l\mid k)$ 分别表示预报、滤波和固定滞后平滑器.

3　最优状态估计(Optimal state estimation)

3.1　准备工作(Preliminaries)

在假定 2.1 的情况下，由奇异系统标准分解[3]，存在非奇异矩阵 Q_1 和 Q_2 满足

$$Q_1MQ_2=\begin{bmatrix}I_{n_1} & 0\\ 0 & M_1\end{bmatrix},\ Q_1\Phi Q_2=\begin{bmatrix}\Phi_1 & 0\\ 0 & I_{n_2}\end{bmatrix}. \tag{3}$$

其中 $n_1+n_2=n$，I_n 为 $n\times n$ 的单位矩阵，M_1 为一指数为 λ_0 的幂零矩阵，即: $M_1^{\lambda_0}=0,M_1^{\lambda_0-1}\neq 0$. 利用式(3)，不难得到

$$H(M-\Phi q^{-1})^{-1}=\frac{T(q^{-1})q^{\lambda_0}}{a(q^{-1})}. \tag{4}$$

其中，

$$a(q^{-1})=1+a_1q^{-1}+\cdots+a_{n_a}q^{-n_a}, \tag{5}$$

$$T(q^{-1})=T_0+T_1q^{-1}+\cdots+T_{n_t}q^{-n_t},$$

$$T_0\neq 0,\ T_i\in\mathbb{R}^{m\times n},\ i=0,1,\cdots,n_t. \tag{6}$$

q^{-1} 为滞后算子，即 $q^{-1}x(k)=x(k-1)$. 将式(1)代入式(2)且利用式(4)，有

$$a(q^{-1})y(k)=T(q^{-1})w(k+\lambda_0-1)+a(q^{-1})v(k). \tag{7}$$

不失一般性，假定 $T(q^{-1})$ 和 $a(q^{-1})$ 没有公共因子，那么可得到如下 ARMA 新息模型[6]:

$$a(q^{-1})y(k)=D(q^{-1})\varepsilon(k), \tag{8}$$

和

$$D(q^{-1})\varepsilon(k)=T(q^{-1})w(k+\lambda_0-1)+a(q^{-1})v(k). \tag{9}$$

其中

$$D(q^{-1})=I_m+D_1q^{-1}+\cdots+D_{n_d}q^{-n_d},\ n_d=\max\{n_a,n_t\} \tag{10}$$

是谱分解因子，因此是稳定多项式矩阵[5]; $\varepsilon(k)$ 是零均值的噪声序列，且有协方差阵 $\mathrm{E}[\varepsilon(k)\varepsilon^{\mathrm{T}}(j)]=Q_\varepsilon\delta_{kj}$ 满足

$$D(q^{-1})Q_\varepsilon D^{\mathrm{T}}(q)=T(q^{-1})Q_wT^{\mathrm{T}}(q)+a(q^{-1})Q_va(q). \tag{11}$$

注 1　由于谱分解因子 $D(q^{-1})$ 稳定，新息 $\varepsilon(k)$ 可利用式(11)反向递推计算，即

$$\varepsilon(k)=-D_1\varepsilon(k-1)-\cdots-D_{nd}\varepsilon(k-n_d)+a(q^{-1})y(k), \tag{12}$$

初始值为: $\varepsilon(0),\cdots,\varepsilon(-n_d)$.

由于 $D(q^{-1})$ 稳定，当时间 k 充分大时，$\varepsilon(k)$ 将不依赖于初始值的选取.

通过使用 ARMA 新息模型(8),(9)，白噪声 $w(k+l),v(k+l)$ 和输出 $y(k+l)$ 的线性最小均方差估计 $\hat{w}(k+l\mid k),\hat{v}(k+l\mid k)$ 和 $\hat{y}(k+l\mid k)$ 计算为

引理 3.1　白噪声估计 $\hat{w}(k+l\mid k),\hat{v}(k+l\mid k)$ 可由下列式子计算:

1) 对于

$$l\geqslant\lambda_0,\hat{w}(k+l\mid k)=0;$$

$$l\geqslant 0,\hat{v}(k+l\mid k)=0.$$

2) 对于其它情况，

$$\hat{w}(k+l\mid k)=\sum_{i=0}^{\lambda_0-l-1}Q_wF^{\mathrm{T}}_{\lambda_0-i-l-1}Q_\varepsilon^{-1}\varepsilon(k-\lambda_0+l+1-i),\ l<\lambda_0; \tag{13}$$

$$\hat{v}(k+l\mid k)=\sum_{i=0}^{-l}Q_vG^{\mathrm{T}}_{-i-l}Q_\varepsilon^{-1}\varepsilon(k-i),\ l<0. \tag{14}$$

F_i 和 G_i 可由以下递归式得到:

$$F_i=-\sum_{j=1}^{i}D_jF_{i-j}+T_i,\ G_i=-\sum_{j=1}^{i}D_jG_{i-j}+a_iI_m. \tag{15}$$

$i>n_t$ 时，$F_i=T_0$; $i>n_a$ 时，$G_0=I_m$ 且 $T_i=0$; $i>n_d$ 时，$a_i=0$ 且 $D_i=0$.

证　结论可由文献[5]直接得出.

引理 3.2　最优输出预报器 $\hat{y}(k+l\mid k)(l>0)$ 有如下形式:

$$\hat{y}(k+l\mid k)=a^{-1}(q^{-1}\Sigma_l(q^{-1})\varepsilon(k). \tag{16}$$

其中，

$$\Sigma_l(q^{-1})=S_0+S_1q^{-1}+\cdots+S_{n_s}q^{-n_s},$$

$$n_s=\max\{n_d-l,n_a-1\}. \tag{17}$$

系数 $S_i(i=0,\cdots,n_s)$ 可利用下式计算出:

$$S_i=-\sum_{j=1}^{l-1}\Xi_ja_{l+i-j}+D_{l+i}, \tag{18}$$

$$\Xi_i=-\sum_{j=1}^{i}\Xi_ja_{i-j}+D_i,\Xi_0=I_n,i=0,1,\cdots,l-1. \tag{19}$$

该引理的详细证明可见文献[11].

3.2 主要结果(Main results)

利用标记 $K_e(l)$ 表示估计增益矩阵,即

$$K_e(l) = M\mathrm{E}[x(k+l)\varepsilon^{\mathrm{T}}(k)]Q_\varepsilon^{-1}, \quad (20)$$

其中 $\varepsilon(k)$ 是新息, Q_ε 新息方差阵, E 是数学期望. 应用系统(1),(2)和射影公式得[5]:

$$M\hat{x}(k+l \mid k) = \Phi\hat{x}(k+l-1 \mid k-1) + \hat{w}(k+l-1 \mid k-1) + K_e(l)\varepsilon(k), \quad (21)$$

$$\hat{y}(k+l \mid k) = H\hat{x}(k+l \mid k) + \hat{v}(k+l \mid k). \quad (22)$$

由式(4),(5)可看出,为了计算 $\hat{x}(k+l \mid k)$,关键的问题是求增益矩阵 $K_e(l)$. 这个问题已在文献[5]中考虑过,其中增益矩阵可用射影公式得到,但是方法繁琐.在下面的定理中,将给出一种基于解多项式方程简单有效的算法.

定理 3.1 对满足假定 2.1 和 2.2 的线性奇异系统(2.1)和(2.2),稳态增益矩阵 $K_e(l)$ 是以下多项式方程的唯一解:

$$T(q^{-1})K_e(l) = R(q^{-1}), \quad (23)$$

对于滤波或平滑估计, $R(q^{-1})$ 具有以下形式:

$$R((q^{-1})) = D((q^{-1}))q^{-\lambda_0+l} - T(q^{-1})F((q^{-1})q^{-1} - a(q^{-1})G(q^{-1})q^{-\lambda_0}, \quad (24)$$

其中

$$F(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{\lambda_0-l-1} Q_w F_{\lambda_0-i-l-1}^{\mathrm{T}} Q_\varepsilon^{-1} q^{k-\lambda_0 l+1-i},$$

$$G(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{-l} Q_v G_{-i-l}^{\mathrm{T}} Q_\varepsilon^{-1} q^{-i}.$$

对于预报有如下形式:

$$R(q^{-1}) = \Sigma_l(q^{-1})q^{-\lambda_0} - T(q^{-1})F(q^{-1})q^{-1}. \quad (25)$$

证 在滤波和平滑的情况下 $(l \leqslant 0)$, 式(22)变为

$$y(k+l) = H\hat{x}(k+l \mid k) + G(q^{-1})\varepsilon(k). \quad (26)$$

其中 $l \leqslant 0$ 时, $\hat{y}(k+l \mid k) = y(k+l)$ 并且用到了式(12),把式(21)代入上面的等式并注意到式(12)可得

$$\begin{aligned} y(k+l) = {} & [H(M-\Phi q^{-1})^{-1}K_e(l) + \\ & H(M-\Phi q^{-1})^{-1}F(q^{-1})q^{-1} + G(q^{-1})]\varepsilon(k) = \\ & [a^{-1}(q^{-1})T(q^{-1})q^{\lambda_0}K_e(l) + \\ & a^{-1}(q^{-1})T(q^{-1})q^{\lambda_0-1}F(q^{-1}) + G(q^{-1})]\varepsilon(k). \end{aligned} \quad (27)$$

由于 ARMA 新息模型(8)可以表示为

$$y(k+l) = a^{-1}(q^{-1})D(q^{-1})\varepsilon(k+l), \quad (28)$$

因此式(23)可由式(27)和(28)得出,对于预测情况 $(l > 0)$,因为 $\hat{v}(k+l \mid k) = 0$, 由式(22)得

$$\hat{y}(k+l \mid k) = H\hat{x}(k+l \mid k). \quad (29)$$

把式(21)和式(16)代入上式,可得

$$\begin{aligned} & a^{-1}(q^{-1})\Sigma_l(q^{-1})\varepsilon(k) = \\ & [H(M-\Phi q^{-1})^{-1}K_e(l) + \\ & H(M-\Phi q^{-1})^{-1}q^{-1}F(q^{-1})]\varepsilon(k) = \\ & [a^{-1}(q^{-1})T(q^{-1})q^{\lambda_0}K_e(l) + \\ & a^{-1}(q^{-1})T(q^{-1})q^{\lambda_0-1}F(q^{-1})]\varepsilon(k). \end{aligned} \quad (30)$$

进而可得到

$$q^{-\lambda_0}\Sigma_l(q^{-1}) = T(q^{-1})K_e(l) + q^{-1}T(q^{-1})F(q^{-1}), \quad (31)$$

即是对于预测情况的式(23).

下面考虑解式(23)解的唯一性.

注意到 $T(q^{-1}) = T_0 + T_1q^{-1} + \cdots + T_{n_t}q^{-n_t}$,用 $\bar{T}$ 来标记

$$\bar{T} = [T_0^{\mathrm{T}} \quad T_1^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad T_{n_t}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}. \quad (32)$$

由假定 2.1,可知 $\bar{T}$ 是列满秩的[7],所以式(23)有唯一解.故此定理成立. 证毕.

在假定 2.1 和 2.2 的情况下,存在一矩阵 K_1 使得 $M + K_1H$ 是非奇异的,且 $\bar{\Phi} = (M+K_1H)^{-1}\Phi$ 是稳定的[5],结合式(21)和(22)可得

$$\begin{aligned} & (M+K_1H)\hat{x}(k+l \mid k) = \\ & \Phi\hat{x}(k+l-1 \mid k-1) + \hat{w}(k+l-1 \mid k-1) + \\ & K_e(l)\varepsilon(k) + K_1\hat{y}(k+l \mid k) - K_1\hat{v}(k+l \mid k). \end{aligned} \quad (33)$$

利用引理 3.1,3.2 很容易地由式(33)得出估计

$$\hat{x}(k+l \mid k) = \bar{\Phi}\hat{x}(k+l-1 \mid k-1) + K(q^{-1})\varepsilon(k) + \bar{K}_e(l)\varepsilon(k). \quad (34)$$

其中

$$K(q^{-1}) = (M+K_1H)^{-1}F(q^{-1}) - \bar{K}_1G(q^{-1}) + \bar{K}_1\Sigma_l(q^{-1}),$$

$$\bar{K}_e(l) = (M+K_1H)^{-1}K_e(l), \text{和}$$

$$\bar{K}_1 = (M+K_1H)^{-1}K_1.$$

4 结论(Conclusion)

利用多项式方法研究了奇异系统最优滤波、预报和平滑估计问题.估值器是基于射影公式和新息分析方法得到.其计算归结为估计增益矩阵的求解问题.通过一个谱分解和求解一个简便的多项式方

程而得到估计增益矩阵,与现有结果相比较[5,6],本文的算法得到很大简化.

致谢:本文在整理期间张焕水博士给予了很大的帮助和有意义的建议.

参考文献(References):

[1] LEWIS F L, MERTZIOS V G. (Eds.). Recent advances in singular systems [J]. *Special Issue Circuits, Systems and Signal Processing*, 1989, 8(1): 111 - 116.

[2] CAMPELL S L. *Singular Systems of Differential Equations* [M]. London: Pitman, 1980.

[3] DAI L. *Singular Control Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[4] DAROUACH M, BOUTAGEB M. Recursive state and parameter estimation of SISO singular systems [J]. *IEE Proceedings-D*, 1992, 139 (2): 204 - 206.

[5] ZHANG H S, CHAI T Y, LIU X J. A unified approach to optimal estimation for discrete-time stochastic singular linear systems [J]. *Automatica*, 1998, 34(6): 777 - 781.

[6] ZHANG H S, XIE L H, SOH Y C. Optimal recursive filtering, prediction and smoothing for singular stochastic discrete-time systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(11): 2154 - 2157.

[7] DAI L. Observers for discrete singular systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1988, 33(2): 187 - 191.

[8] DAI L. Filtering and LQG problems for discrete-time stochastic singular systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(3): 1105 - 1108.

[9] 王恩平. 广义离散随机线性系统的次优滤波[J]. 科学通报, 1989, 34(15): 1186 - 1188.
(WANG Enping. The suboptimal filtering for linear stochastic singnlar systems [J]. *Chinese Science Bulletin*, 1989, 34(15): 1186 - 1188.)

[10] NIKOUKHAH R, WILLSKY A S, LEVY B C. Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(9): 1325 - 1342.

[11] ASTROM K J. *Introduction to Stochastic Control Theory* [M]. New York and London: Academic Press, 1970.

作者简介:

郇正良　(1964—),男,副教授,硕士研究生,主要研究方向为计算机应用与状态估计,最优滤波等,E-mail: HZL097918@sina.com;

崔进平　(1955—),男,副教授,主要研究方向为计算机应用及机器人控制,智能控制等.

(上接第 75 页)

6 结论(Conclusion)

本文在文献[1~3,6,7]的基础上进一步从理论上研究了转矩跟踪控制和磁场渐近定向问题.其中,给定的期望转矩是时变的,负载转矩和转子电阻具有任意时变未知的形式.中间环节的期望轨道是一般形式的.从理论上给出了一般性的控制器设计方法.这些都发展了文献[1~3,6,7]的相应结果.仿真结果证明了这种无源性控制器具有优良的跟踪性能,达到了期望的设计目标.

参考文献(References):

[1] ORTEGA R, ANTONIO L, NICKLASSON P J, et al. *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems—Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications* [M]. London: Springer, 1998, 241 - 441.

[2] ORTEGA R, ESPINOSA G. Torque regulation of induction motors [J]. *Automatica*, 1999, 29(3): 621 - 633.

[3] ORTEGA R, NICKLASSON P J, ESPINOSA G. On speed control of induction motors [J]. *Automatica*, 1996, 32(3): 445 - 460.

[4] MARINO R, TOMEI P, PERESADA S. Adaptive output feedback control of current-fed induction motors with uncertain rotor resistance and load torque [J]. *Automatica*, 1998, 34(5): 617 - 624.

[5] MARINO R, TOMEI P, PERESADA S. Global adaptive output feedback control of induction motors with uncertain rotor resistance [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(5): 967 - 982.

[6] ORTEGA R, CANUDAS C, SELEME S I. Nonlinear control of induction motors: torque tracking with unknown disturbance [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(11): 1675 - 1680.

[7] CECATI C. Position control of the induction motor using a passivity-based controller [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 36 (5): 1277 - 1284.

作者简介:

马良河　(1963—),男,中国人民解放军徐州空军学院副教授,电力电子与电力传动专业博士,主要研究领域为交流电机的高性能控制, E-mail: mlh0307_cn@sina.com;

姜建国　(1958—),男,上海交通大学电子信息与电气工程学院教授,博士生导师,主要研究领域为电力电子与电力传动.