

## 分数阶系统状态空间描述的数值算法

王振滨, 曹广益, 朱新坚

(上海交通大学 自动化系 燃料电池研究所, 上海 200030)

**摘要:** 利用 Grünwald-Letnikov 分数微积分定义计算分数微积分的数值解, 计算精度仅为 1 阶, 不能满足快速收敛性要求. 给出并证明了分数阶微积分的高阶近似所应满足的条件, 并在此基础上推导出分数阶线性定常系统状态空间描述的数值计算公式. 本法不但公式简单易编程, 而且具有计算精度高、运算速度快等优点. 给出一个粘弹性动态系统的仿真实例, 验证了其有效性.

**关键词:** 分数微积分; 分数阶系统; 分数阶线性多步长方法; 状态空间描述

**中图分类号:** TP13      **文献标识码:** A

## A numerical algorithm for the state-space representation of fractional order systems

WANG Zhen-bin, CAO Guang-yi, ZHU Xin-jian

(Department of Automation, Fuel Cell Institute, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

**Abstract:** The computational precision is only of first order by using Grünwald-Letnikov fractional calculus definition to approximate fractional differentials/integrals, and thus it can not satisfy the high convergence demand. The high order approximate conditions for fractional differentials/integrals are given and verified, and based on that the numerical formula of the state space representation of linear time-invariant fractional order systems is deduced. This algorithm has not only a simple form, which is easy to program, but also the advantage of a high precision and fast computation time. An example of solving numerically the dynamic viscoelasticity system is given to show the effectiveness of the method aforementioned.

**Key words:** fractional calculus; fractional systems; fractional linear multi-step methods; state-space representation

### 1 引言 (Introduction)

分数微积分 (Fractional calculus) 已有 300 多年的历史, 它把传统整数阶微积分的阶次推广到分数甚至复数领域, 因而分数微积分极大地拓展了传统微积分的概念. 分数微积分的发展至今已基本上形成了一个完整的体系, 它的应用也不断渗透到多个领域. 分数微积分在控制中的应用还是个新兴的领域, 近年来, I. Podlubny 研究了分数阶 PID 控制器<sup>[1]</sup>; D. Matignon 研究了分数阶微分系统的稳定性、可控性、可观测性理论<sup>[2,3]</sup>.

Bagley 和 Torvik 指出分数导数非常合适描述粘弹性体 (Viscoelasticity) 的动态频率响应过程. 对于求解此类用分数微积分表示的阻尼系统, 已有一些方法, 解析算法如拉普拉斯变换法 (Bagley 和 Torvik, 1983)<sup>[4]</sup>; 傅立叶变换法 (Gaul, Klein 和 Kemple, 1989,

1991)<sup>[4]</sup>, 数值算法如 Zhang and Shimizu 法<sup>[5]</sup>, L-1 法<sup>[6]</sup>和池田法<sup>[7]</sup>等. 这些方法都有些缺陷, 解析算法虽然精度较高但公式复杂、计算费时还常常伴随发散问题, 上述数值算法一般都要求分数导数的阶次在 0~1 间, 所有这些都限制了它们的进一步应用. 本文给出了求解分数阶线性系统状态空间描述的一个非常有效的数值方法, 本方法不但精度高、计算速度快而且不需要作上述限制.

### 2 基本定义 (Basic definitions)

Riemann-Liouville 分数微分和积分定义分别如下

$$\begin{cases} D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \\ n-1 \leq \alpha < n, n \in N. \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\Gamma(\cdot)$  表示伽马函数,  $D^\alpha$  表示分数导数算子,

$\alpha$  为阶次.

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

式中,  $I^\alpha$  表示分数积分算子,  $\alpha$  为阶次.  $I^\alpha$  也可以用分数导数算子  $D^{-\alpha}$  代替, 反之亦然. 因而 Riemann-Liouville 分数微积分可以统一表示成算子  $I^\beta, \beta \in \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$ .

Grünwald-Letnikov 分数微积分定义如下

$$I^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{j=0}^n w_{n-j} f(jh), \quad nh = t, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-. \quad (3)$$

其中, 权系数

$$w_j = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha + 1)}{j! \Gamma(\alpha - j + 1)}. \quad (4)$$

因而可以利用有限项近似表示分数微积分, 但只能获得  $O(h)$  的精度<sup>[4,6]</sup>.

对于算子  $I^\alpha$  下面两式成立:

$$(I^\alpha f)(x) = x^\alpha (I^\alpha f(tx))(1), \quad (5)$$

$$I^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f. \quad (6)$$

式中,  $*$  表示卷积运算.

考虑如下的离散化卷积公式:

$$\begin{cases} I_h^\alpha f(x) = h^\alpha \sum_{j=0}^n w_{n-j} f(jh) + h^\alpha \sum_{j=0}^s \varphi_{nj} f(jh), \\ x = nh, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-. \end{cases} \quad (7)$$

其中卷积权系数  $w_n (n \geq 0)$  和初始卷积权系数  $\varphi_{nj} (n \geq 0, j = 0, \dots, s, s$  固定, 都独立于  $h$ . 显然下式成立:

$$(I_h^\alpha f)(x) = x^\alpha (I_{h/x}^\alpha f(tx))(1). \quad (8)$$

为讨论方便, 给出下面几个定义:

$$\Omega_h^\alpha f(x) = h^\alpha \sum_{j=0}^n w_{n-j} f(jh), \quad x = nh, \quad (9)$$

$$E_h^\alpha = \Omega_h^\alpha - I^\alpha. \quad (10)$$

当  $f(t) = t^{\beta-1}$  时有

$$(E_h^\alpha t^{\beta-1})(x) = x^{\alpha+\beta-1} (E_{h/x}^\alpha t^{\beta-1})(1). \quad (11)$$

定义序列  $a = (a_n)_0^\infty$  的生成幂级数为:

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (12)$$

称  $(a_n)$  为  $a(z)$  的系数. 卷积生成函数  $w$  可以分解为

$$w(z) = r_1(z)^\alpha r_2(z). \quad (13)$$

其中  $r_i(z)$  为有理函数. 可以把  $w(z)$  分解为

$$w(z) = (1-z)^{-\alpha} [c_0 + c_1(1-z) + \dots + c_{N-1}(1-z)^{N-1}] + (1-z)^N r(z). \quad (14)$$

二项式系数的渐进展开式为

$$(-1)^n \binom{-\alpha}{n} = \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} [1 + a_1 n^{-1} + a_2 n^{-2} + \dots + a_{N-1} n^{-(N-1)} + O(n^{-N})]. \quad (15)$$

### 3 卷积的收敛性和分数阶线性多步长方法 (Convergence of convolution and fractional order linear multi-step method)

当  $\alpha = 1$  时, 式(2) 即为传统的积分, 运用线性多步长方法  $(\rho, \sigma)$ ,  $\rho, \sigma$  指本方法中的生成多项式, 易知式(7) 中的权系数  $w_n$  为下式的泰勒展开式系数

$$w(z) = \frac{\sigma(1/z)}{\rho(1/z)} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n. \quad (16)$$

线性多步长方法的收敛性由其稳定性和一致性决定<sup>[8]</sup>, 对权系数  $w_n$  来说, 稳定性与  $w_n$  的有界性等价.  $p$  阶一致性可以表示为

$$hw(e^{-h}) = 1 + O(h^p). \quad (17)$$

下面把上述概念推广到分数阶微积分领域, 从而可以得出所谓分数阶线性多步长方法.

定义 1  $I^\alpha$  的生成函数  $w$  是稳定的, 如果

$$w_n = O(n^{\alpha-1}). \quad (18)$$

定义 2  $I^\alpha$  的生成函数  $w$  是  $p$  阶一致性的, 如果

$$h^\alpha w(e^{-h}) = 1 + O(h^p). \quad (19)$$

引理 1  $w$  是稳定的, 当且仅当式(14) 中  $r(z)$  的系数  $r_n$  满足

$$r_n = O(n^{\alpha-1}). \quad (20)$$

证 从式(15) 可以看出, 若式(20) 成立, 则式(18) 成立. 反之, 设  $w$  稳定, 则  $w(z)$  在  $|z| < 1$  内无奇点, 所以式(13) 可以改写为

$$w(z) = u(z) \prod_{j=0}^m (z - z_j)^{-\alpha_j}. \quad (21)$$

其中  $z_j$  为绝对值为 1 的不同数值, 不妨设  $z_0 = 1, \alpha_0 = \alpha, u(z)$  在  $|z| \leq 1$  内解析, 且  $u(z_j) \neq 0, \alpha_j \neq 0, -1, -2, \dots$ . 把  $w(z)$  在  $z_j$  处利用部分分式展开得到

$$w(z) = \sum_{j=0}^m (z - z_j)^{-\alpha_j} p_j(z - z_j) + q(z). \quad (22)$$

其中,  $p_j$  为某一多项式, 且  $p_j(0) \neq 0, q(z)$  在  $|z| = 1$  上存在足够多次 (如  $k$  次) 导数, 即其系数是  $O(n^{-k})$ <sup>[9]</sup>. 由式(15) 不难看出,

$$w_n = O(n^{\alpha-1}) \quad (23)$$

成立, 当且仅当  $\text{Re}(\alpha_j) \leq \text{Re}(\alpha), j = 1, \dots, m$ .

同理,  $r(z)$  也可以表示为

$$r(z) = \sum_{j=0}^m (z - z_j)^{-\alpha_j} \tilde{p}_j(z - z_j) + \tilde{q}(z),$$

$\bar{p}_j$  和  $\bar{q}$  的定义同  $p_j$  和  $q$ . 所以把  $w_n$  换成  $r_n$ , 式(23)仍然成立, 从而引理得证.

**引理 2** 如果

$$(E_h^\alpha t^{k-1})(1) = O(h^k) + O(h^p), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

则  $w$  是  $p$  阶一致性的. 特别地,  $p$  阶收敛性意味着  $p$  阶一致性.

**证** 考虑自变量为  $t$  的函数  $e^{t-x}$ , 在区间  $[0, x]$  内有

$$e_h(x) = (E_h^\alpha e^{t-x})(x) = h^\alpha \sum_{0 \leq j \leq x} w_j e^{-jh} - (I^\alpha e^{t-x})(x).$$

当  $x \rightarrow \infty$ , 上式中的第一项趋于  $h^\alpha w(e^{-h})$ , 则不难得到下式

$$(I^\alpha e^{t-x})(x) \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty,$$

所以下式成立

$$e_h(\infty) = h^\alpha w(e^{-h}) - 1. \quad (25)$$

把  $e^{t-x}$  在  $t = 0$  处展开有

$$e^{t-x} = \sum_{k=0}^q \frac{t^k}{k!} e^{-x} + \frac{1}{q!} (\tau^q * e^{t-x})(t).$$

其中  $q + 1 \geq \max\{p, p - \text{Re}(\alpha)\}$ . 下式成立

$$e_h(x) = e_h^1(x) + e_h^2(x).$$

其中,

$$e_h^1(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} (E_h^\alpha t^k)(x).$$

由(11)知, 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $(E_h^\alpha t^k)(x)$  只是以多项式形式无限增大, 所以

$$e_h^1(\infty) = 0,$$

$$\begin{aligned} e_h^2(x) &= \frac{1}{q!} E_h^\alpha (t^q * e^{t-x})(x) = \\ &= \frac{1}{q!} (E_h^\alpha (t^q) * e^{t-x})(x) = \\ &= \frac{1}{q!} \int_0^x e^{-s} (E_h^\alpha t^q)(s) ds. \end{aligned}$$

可以得到

$$e_h^2(\infty) = \frac{1}{q!} \int_0^\infty e^{-s} (E_h^\alpha t^q)(s) ds. \quad (26)$$

由式(11)和假设有

$$(E_h^\alpha t^q)(s) = s^{q+\alpha} (E_{h/s}^\alpha t^q)(1) = O(s^{q+\alpha-p} h^p).$$

由式(25)和式(26)可以得出

$$h^\alpha w(e^{-h}) - 1 = O(h^p),$$

即  $w$  是  $p$  阶一致性的.

**引理 3** 如果  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , 且  $(E_h^\alpha t^{p-1})(1) = O(h^p)$ , 则对任意  $\text{Re}(\beta) > p$  有  $(E_h^\alpha t^{\beta-1})(1) = O(h^p)$ .

**证** 令  $\beta = p + u$ , 易知

$$t^{\beta-1} = \frac{\Gamma(p+u)}{\Gamma(p)\Gamma(u)} t^{p-1} * t^{u-1}.$$

则由式(11)得到

$$(E_h^\alpha t^{p-1})(x) = O(x^{\alpha-1} h^p),$$

$E_h^\alpha (t^{p-1} * t^{u-1})(1) = (E_h^\alpha t^{p-1} * t^{u-1})(1) = O(h^p)$ , 因而结论成立.

**引理 4** 设  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0, -1, -2, \dots$ , 如果  $w$  是稳定的, 则  $t^{\beta-1}$  的卷积误差可以渐进展开成下式:

$$\begin{aligned} (E_h^\alpha t^{\beta-1})(1) &= e_0 + e_1 h + \dots + \\ &= e_{N-1} h^{N-1} + O(h^N) + O(h^\beta). \end{aligned} \quad (27)$$

其中系数  $e_j, e_j(\alpha, \beta, c_0, c_1, \dots, c_{p-1})$ , 取决于  $\alpha, \beta$  和式(14)中的系数  $c_j$ .

**证** 首先给出如下的辅助结论: 两个离散序列  $u_n = O(n^u)$  和  $v_n = O(n^v)$ , 其中  $v < \min\{-1, u-1\}$  的卷积满足

$$\sum_{j=0}^n u_{n-j} v_j = O(n^u). \quad (28)$$

这可以从下面两式看出

$$\left| \sum_{j=0}^n u_{n-j} v_j \right| \leq |u_n v_0| + |u_0 v_n| + Mn^u \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^u j^v,$$

$$\left(1 - \frac{j}{n}\right)^u \leq \begin{cases} 1, & u \geq 0, \\ (j+1)^{-u}, & u < 0, \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

对于  $\beta \neq 0, -1, -2, \dots$ , 及式(15)下式成立:

$$\begin{aligned} n^{\beta-1} &= b_0 (-1)^n \binom{-\beta}{n} + b_1 (-1)^n \binom{-\beta+1}{n} + \dots + \\ &= b_{N-1} (-1)^n \binom{-\beta+N-1}{n} + O(n^{\beta-1-N}). \end{aligned} \quad (29)$$

定义如下函数

$$\begin{aligned} b(z) &= \sum_{n=1}^\infty n^{\beta-1} z^n = \\ &= b_0 (1-z)^{-\beta} + b_1 (1-z)^{-\beta+1} + \dots + \\ &= b_{N-1} (1-z)^{-\beta+N-1} + s(z). \end{aligned}$$

其中,  $s(z)$  的系数  $s_n$  满足

$$s_n = O(n^{\beta-1-N}). \quad (30)$$

考虑表达式

$$h^\alpha \sum_{j=1}^n w_{n-j} (jh)^{\beta-1}, \quad hn = 1,$$

令  $y_n = \sum_{j=1}^n w_{n-j} j^{\beta-1}$ , 为  $y(z) = w(z)b(z)$  的第  $n$  个系数, 则由式(14)和(29)可以得到:

$$y(z) = d_0 (1-z)^{-(\alpha+\beta)} +$$

$$d_1(1-z)^{-(\alpha+\beta)+1} + \dots + d_{2N-2}(1-z)^{-(\alpha+\beta)+2N-2} + w(z)s(z) + [b(z) - s(z)](1-z)^N r(z).$$

其中,  $d_k = \sum_{j=0}^k b_{k-j} c_j$ . 当  $N$  取足够大时, 由式(14), (20), (30) 和(28), 可以得出  $w(z)s(z)$  和  $[b(z) - s(z)](1-z)^N r(z)$  的系数都为  $O(n^{\alpha-1})$ . 由式(14) 得出

$$y_n = e_0 n^{\alpha+\beta-1} + e_1 n^{\alpha+\beta-2} + \dots + e_0 n^{\alpha+\beta-N-1} + O(n^{\alpha-1}),$$

从而

$$(E_h^\alpha t^{\beta-1})(1) = h^{\alpha+\beta-1} y_n - (I^\alpha t^{\beta-1})(1), \quad h_n = 1.$$

**定理 1** 设  $\alpha \in \mathbb{R}$ , 如果  $w$  是稳定的且是  $p$  阶一致性的, 则其也是  $p$  阶收敛的.

**证** 假设  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ . 由引理 1 ~ 4 知, 对于任意  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > p$  有

$$e_j(\alpha, \beta, c_0, c_1, \dots, c_{p-1}) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, p-1.$$

通过解析分析, 根据假设不难看出上式对任意  $\alpha$  和  $\beta$  都成立, 这样由引理 4 可以直接得出本定理.

**定理 2** (分数阶线性多步长方法) 令  $(\rho, \sigma)$  表示某一稳定的、 $p$  阶一致性的隐含的线性多变量方法. 假设  $\rho(z)$  的零点的绝对值小于 1. 令  $w(z)$  由式(16) 给定, 表示相应卷积积分的生成幂级数. 定义  $w^\alpha = (w_n^\alpha)_0^\infty$ , 有

$$w^\alpha(z) = (w(z))^\alpha, \quad (31)$$

则  $I^\alpha$  的卷积积分生成函数  $w^\alpha$  为  $p$  阶收敛的.

**证** 因为线性多步长方法是  $p$  阶一致性的, 即

$$hw(e^{-h}) = 1 + O(h^p).$$

把上式推广到  $\alpha$  次幂有

$$h^\alpha w(e^{-h}) = 1 + O(h^p),$$

以便  $w^\alpha$  对于  $I^\alpha$  是  $p$  阶一致性的. 由加在  $(\rho, \sigma)$  上的假设有

$$w(z) = \frac{\sigma(z^{-1})}{\rho(z^{-1})} = \prod_{i=0}^r (1 - z_i z)^{-1} v(z).$$

其中  $v(z)$  解析且在  $|z| \leq 1$  附近无零点,  $z_i$  为  $\rho(z)$  在单位圆上的零点, 则

$$w^\alpha(z) = \prod_{i=0}^r (1 - z_i z)^{-\alpha} u(z).$$

其中,  $u(z) = v(z)^\alpha$  在  $|z| \leq 1$  附近解析. 由式(21), (23) 知  $w_n^\alpha = O(n^{\alpha-1})$ , 所以  $w^\alpha$  是稳定的, 再运用定理 1 可以证明出本定理. 下面给出  $p = 1, 2, 3$  时,  $p$  阶收敛精度的生成函数  $w_p^\alpha$  的一组表达式:

$$w_1^\alpha(z) = (1-z)^{-\alpha}, \quad (32)$$

$$w_2^\alpha(z) = (1.5 - 2z + 0.5z^2)^{-\alpha}, \quad (33)$$

$$w_3^\alpha(z) = (11/6 - 3z + 1.5z^2 - 1/3z^3)^{-\alpha}. \quad (34)$$

当  $\alpha < 0$  时, 它们为相应分数微分的  $p$  阶收敛权系数.

#### 4 分数阶微分系统的状态空间描述及其离散化近似算法 (State-space representation of fractional order differential systems and their discrete approximation algorithm)

一般  $(n, m)$  次的分数阶微分系统可以表示为

$$\begin{cases} [D_m^\alpha + a_1 D_m^{\frac{\alpha-1}{m}} + \dots + a_n D_m^0] x(t) = 0, \\ x(0) = [x(0), x'(0), \dots, x^{(l)}(0)]^T. \end{cases} \quad (35)$$

其中,  $D_m^{\frac{1}{m}}$  表示  $1/m$  阶分数微分算子,  $m$  为正整数,  $n$  为非负整数, 且  $m$  表示所有分数微分项分母的最小公倍数,  $l-1 < \frac{n}{m} \leq l, l \in \mathbb{N}$ , 式(35)的状态空间表示如下

$$\begin{cases} D_m^{\frac{1}{m}} X(t) = AX(t) + Bu(t), \\ X(0) = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]^T. \end{cases} \quad (36)$$

其中,  $X(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T, \quad (37)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t), \\ x_2(t) = D_m^{\frac{1}{m}} x_1(t) = D_m^{\frac{1}{m}} x(t), \\ \vdots \\ x_n(t) = D_m^{\frac{1}{m}} x_{n-1}(t) = D_m^{\frac{n-1}{m}} x(t), \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

式(35)的解析解为

$$X(t) = E_{1/m, 1/m}(At^{1/m})X(0) + \int_0^t (t-\tau)^{1/m-1} E_{1/m, 1/m}(A(t-\tau)^{1/m})Bu(\tau)d\tau, \quad (39)$$

其中  $E_{\alpha, \beta}(z)$  为双变量 Mittag-Leffler 函数<sup>[4]</sup>.

根据第 3 节的讨论, 可以得到系统(36)的  $p, p = 1, 2, 3$ , 阶精度离散化表达式为

$$h^{-\alpha} \sum_{j=0}^n \omega_j^\alpha X_{n-j} - \frac{(nh)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} X(0) = AX_n + Bu_n. \quad (40)$$

其中  $\alpha = 1/m, X_j = X(jh), u_j = u(jh), j = 0, 1, 2, \dots, n, t = nh, \omega_j^\alpha$  为式(32), (33), (34)的生成函数

的展开式系数,上式左边第二项为考虑初始条件不为零时的附加项.

从式(40)可以得到如下的迭代公式

$$X_n = (\omega_0^\alpha I - h^\alpha A)^{-1} \left[ Bh^\alpha u_n + \frac{(nh)^\alpha h^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} X(0) - \sum_{j=1}^n \omega_j^\alpha X_{n-j} \right], n = 1, 2, \dots \quad (41)$$

计算权系数  $\omega_j^\alpha$  的最方便有效的方法是利用快速傅立叶变换技术.

### 5 仿真实例(Simulation)

给定粘弹性系统如下

$$mD^2x(t) + cD^\alpha x(t) + kx(t) = u(t),$$

$$x(0) = a_1, \dot{x}(0) = a_2.$$

其中,  $m, c, k$  分别表示质量、阻尼系数和弹性系数,  $u(t)$  表示施加外力,  $D^\alpha x(t), 0 < \alpha < 1$ , 表示位移函数  $x(t)$  的  $\alpha$  阶导数. 取  $m = 1, c = 1.5, k = 1, \alpha = 0.5, a_1 = 0, a_2 = 1, u(t) = 1$  (单位阶跃输入). 其状态空间描述为

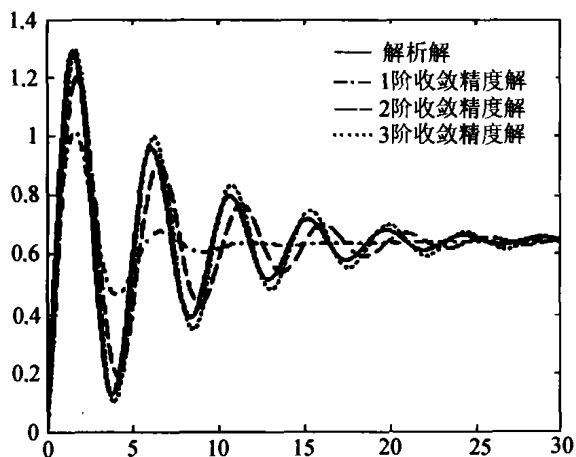


图1  $\Delta t = 0.3$  s时系统的单位阶跃响应  
Fig. 1 Unit step response at time step  $\Delta t = 0.3$  s

$$D^{0.5}X(t) = AX(t) + Bu(t).$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T,$$

$$X(0) = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T.$$

图1,2分别给出了步长  $\Delta t = 0.3$  s 和  $\Delta t = 0.1$  s 时,系统的仿真结果,包括系统的解析解和卷积权系数分别取1,2,3阶精度的数值解.表1给出了3种近似解的计算时间和及其与解析解之间的相对误差.从表1中可以看出,卷积权系数的近似阶次越高,时间步长取得越小,近似解与解析解越接近.本文所有仿真程序都是利用 Matlab 软件包编程.数值计算速度非常快,在普通 PENTIUM-4(CPU1.7 GHz)计算上述1,2,3阶近似数值解,当  $\Delta t = 0.1$  s 时,运行时间不到 2 s.

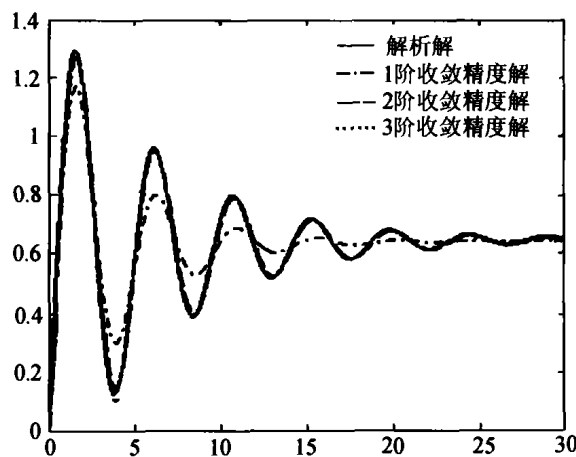


图2  $\Delta t = 0.1$  s时系统的单位阶跃响应  
Fig. 2 Unit step response at time step  $\Delta t = 0.1$  s

表1 分数导数的3种不同近似方法的计算时间与相对误差比较

Table 1 Comparison of time and relative error among three different approximation methods of fractional derivatives

$\Delta t/s$	0.3			0.1			0.01		
	1阶精度解	2阶精度解	3阶精度解	1阶精度解	2阶精度解	3阶精度解	1阶精度解	2阶精度解	3阶精度解
$ x - \bar{x} /x$	0.2471	0.126	0.0511	0.0828	0.0488	0.0358	0.0396	0.0082	0.0059
$T_c/s$	0.125	0.937	1.109	0.672	1.500	1.569	19.436	20.733	21.847

### 6 结语(Conclusion)

本文提出的分数阶线性多步长方法,非常适合求解分数阶系统的数值解,特别是卷积权系数取高阶近似时,数值解收敛到解析解的速度很快.另外本

方法不需限制分数阶导数的阶次在0~1间,不但如此,对于一部分非线性时变系统本方法也是行之有效的,这将在以后的文献中作进一步讨论.

(下转第109页)

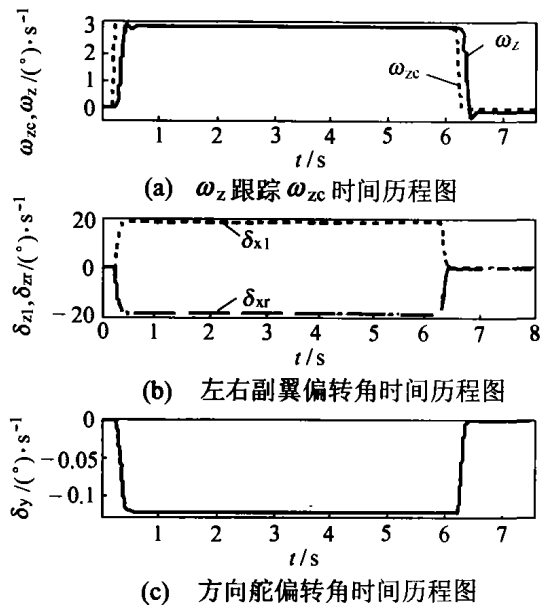


图 2 算例 2 的仿真结果  
Fig. 2 Simulations results of example 2

## 6 结论(Conclusion)

通过以上推导和仿真,说明 RHO 算法可以较好解决非线性飞机运动方程在线指令分配的问题,这对故障状态下的飞机运动方程尤其重要,同时为解决飞机实时性与计算精度的问题,需要进一步研究更快捷的微分 Riccati 算法来满足要求。

## 参考文献(References):

- [1] 韩曾晋. 自适应控制[M]. 北京:清华大学出版社,1995. (HAN Zengjin. *Self-adaptive Control* [M]. Beijing: Tsinghua university Press, 1995.)
- [2] MONACO J, WARD D, BARRON R, et al. Implementation and flight test assessment of an adaptive, reconfigurable flight control system [C]// *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 1997, 1: 1443 - 1454.
- [3] 王子才, 赵长安. 应用最优控制[M]. 黑龙江:哈尔滨工业大学出版社,1989. (WANG Zicai, ZHAO Chang'an. *Applied Optimal Control* [M], Heilongjiang: Harbin institute of technology Press, 1989.)
- [4] 钟万镒. 计算结构力学与最优控制[M]. 辽宁:大连理工大学出版社,1993. (ZHONG Wanxie. *Calculational Structure Mechanics and Optimal Control* [M]. Liaoning: Dalian University of Technology Press, 1993.)
- [5] ROWENA L. eberhardt, Indirect adaptive flight control of a tailless fighter aircraft [C]// *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 1999, 1:466 - 476.

## 作者简介:

苏浩秦 (1975—),男,现为清华大学汽车工程系博士后,西北工业大学博士毕业,分别于 2000 年、2004 年在西北工业大学航空学院获得硕士学位和博士学位,研究兴趣为飞行器故障检测、重构和主动控制算法, E-mail: suhaoqin@sohu.com;

邓建华 (1936—),男,西北工业大学教授、博导,研究方向为飞机故障检测、主动控制、系统辨识等方面。

(上接第 105 页)

## 参考文献(References):

- [1] PODLUBNY I. Fractional-order systems and-controllers [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(1):208 - 214.
- [2] MATIGNON D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing [C]// *Computational Engineering in Systems and Application*. Lille, France: IEEE Press. 1996, 2:963 - 968.
- [3] MATIGNON D, D' ANDRÉA-NOVEL B. Some results on control-ability and observability of finite-dimensional fractional differential systems [C]// *Computational Engineering in Systems and Application multicongress*. Lille, France: IEEE Press. 1996, 2:952 - 956.
- [4] PODLUBNY I. *Fractional Differential Equations* [M]. San Diego: Academic Press, 1999:243 - 260.
- [5] ZHANG W, SHIMIZU N. Numerical algorithm for dynamic problems involving fractional operators [J]. *Int J of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, 1998, 41(3):364 - 370.
- [6] OLDHAM K B, SPANIER J. *The Fractional Calculus* [M]. New York: Academic, 1974.
- [7] 池田, 川田, 小口, 分数次微分方程式の時間応答の数値計算法 [J]. 計測自動制御学会論文集, 2001, 37(8):795 - 797. (IKEDA F, KAWATA S, OGUCHI T. A numerical algorithm of time

response for fractional differential equations [J]. *Trans on Society of Instrument and Control Engineers*, 2001, 37(8):795 - 797.)

- [8] HENRICI P. *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations* [M]. New York: John Wiley, 1968.
- [9] KATZNELSON Y. *An Introduction to Harmonic Analysis* [M]. New York: John Wiley, 1968.

## 作者简介:

王振滨 (1973—),男,上海交通大学博士生,2001 年于江苏理工大学电气工程系获硕士学位,主要研究方向为分数阶系统建模与辨识及熔融碳酸盐型燃料电池的建模与控制, E-mail: wzb123@sjtu.edu.cn;

曹广益 (1941—),男,上海交通大学电子信息与电气工程学院教授,博士生导师,燃料电池研究所所长,1964 年于上海交通大学电子信息学院自动化系毕业,1997 年获日本工学博士,主要研究方向为燃料电池的建模与动态分析和机器人控制理论研究,国内外发表学术论文 80 余篇,出版学术专著 3 部;

朱新坚 (1958—),男,上海交通大学电子信息与电气工程学院自动化系教授,博士生导师,燃料电池研究所副所长,1995 年于上海交通大学自动化系获博士学位,1997 年上海交通大学机械学院博士后出站,主要研究方向为燃料电池的建模与动态分析,国内外发表学术论文 70 余篇。