

仿射非线性飞机运动方程的 RHO 优化控制

苏浩秦^{1,2}, 邓建华²

(1. 清华大学 汽车安全与节能国家重点实验室, 北京 100084; 2. 西北工业大学 航空学院, 陕西 西安 710072)

摘要: 飞机运动为非线性形式且扰动有可能极大, 在变化较大飞行范围内使用常规飞控系统控制这种对象会产生误差. 阐述一种逐点线性化后退区间优化控制(RHO)算法, 有效解决小迎角范围内飞机仿射非线性运动控制问题. 首先根据飞机仿射非线性运动方程特点, 提出采用逐点线性化方法, 在采样点上将仿射非线性方程变为时变线性方程, 以此为控制对象提出 RHO 控制概念, 并进一步推导出两个微分 Riccati(DRE)方程, 分析了 DRE 的解法, 从而计算出在线控制指令. 最后结合国内某型号飞机气动数据对此算法进行了仿真, 证实算法的可行性和实时性.

关键词: 仿射非线性运动方程; 线性时变系统; 逐点线性化; 后退区间优化控制

中图分类号: V221.3 **文献标识码:** A

RHO optimal control for the nonlinear movement equation of aircraft

SU Hao-qin^{1,2}, DENG Jian-hua²

(1. State Key Laboratory of Safety and Energy, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. College of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710072, China)

Abstract: Since airplane movement is nonlinear and disturbance to the airplane may be too great, general fly control systems for this nonlinear object produce more errors within the range of wild changed aero process. This paper proposes the linearization method at each sampling point and Receding Horizon Optimal algorithm(RHO), which can solve the control problem of nonlinear movement of airplane within the range of small attack angle. Firstly, the linearization method at each sampling point was put forward, which changes nonlinear equation to time-variant equation at each sampling point. Then RHO was advanced based on the linear equation. Furthermore, two differential Riccati equations (DRE) were deduced and their solutions were analyzed; and then the online control signal is derived from RHO. At last, simulation tests on an aircraft model with aerodynamic data for normal configuration indicate the validity and real time property of the proposed algorithm.

Key words: nonlinear movement equation; linear time-varying system; linearization method at each sampling point; Receding Horizon Optimal algorithm

1 引言(Introduction)

仿射非线性飞机运动方程 RHO 优化控制算法相比其他在线控制算法, 如直接自适应控制在在线调参控制^[1]有一定的优越性, 它可以将控制目标统一在优化控制指标中, 同时 RHO 算法对线性微分方程要求的条件较少, 能很好地满足舵面故障与无故障情况下对指令的分配, 文中通过一定的假设, 将仿射非线性方程变形为时变线性系统, 并使用 RHO 算法在线分配舵面指令.

2 飞机运动方程模型(Airplane movement model)

常规布局飞机运动方程和气动方程如式(1),

(2)所示:

$$\dot{x} = f(x) + D(x, u), \quad (1)$$

$$D(x, u) = T(x) + \lambda^T \cdot x + \gamma^T \cdot u. \quad (2)$$

这里, $x = [\alpha \ \omega_z \ \beta \ \omega_x \ \omega_y]^T$ 为飞机运动状态; $u = [\delta_{zl} \ \delta_{zr} \ \delta_{xl} \ \delta_{xr} \ \delta_y]^T$ 为舵面输入, 其中, 下标 z 表示升降舵输入, x 表示副翼输入, y 表示方向舵输入, l 和 r 分别表示飞机左或右操纵舵面. $f(x)$ 表示含重力项和飞机状态耦合影响的非线性项表达式. 式(2)为气动力与力矩对飞机状态变化率影响的表达式, 其中, $T(x)$ 为计算力与力矩矢量的非线性项, λ, γ 分别为稳定导数和操纵导数, 且 $T(x), \lambda, \gamma$ 随 α 的变化而发生变化. 具体气动数据存于数

据文件中,以供仿真时读取。

假定飞机在迎角 $\alpha \in [-2, 20]$ 小角度范围内变化,此时,飞机的各种状态角和姿态角的三角函数值与相应的弧度值基本相等,综合(1),(2)式可以得到飞机运动的仿射非线性运动方程(3):

$$\dot{x} = \bar{A}(\alpha) \cdot x + \bar{B}(\alpha) \cdot u + E(x). \quad (3)$$

其中

$$\bar{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} \bar{A}_{\text{lon}}(\alpha) & 0 \\ 0 & \bar{A}_{\text{lat_dir}}(\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}.$$

式中 $\bar{A}_{\text{lon}}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\bar{A}_{\text{lat_dir}}(\alpha) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 分别为纵向稳定导数阵与横航向导数稳定阵。

$$\bar{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} \bar{B}_{\text{lon}}(\alpha) & 0 \\ 0 & \bar{B}_{\text{lat_dir}}(\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}.$$

其中 $\bar{B}_{\text{lon}}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\bar{B}_{\text{lat_dir}}(\alpha) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, 分别为纵向和横航向操纵导数阵,而且 $\bar{A}(\alpha)$ 和 $\bar{B}(\alpha)$ 均为与 α 有关的线性时变稳定导数阵和操纵导数阵,可看出,飞机在小迎角时纵向和横航向是解耦的。

另外 $E(x) = f(x) + T(x)$ 是变形后方程的非线性项,包含重力和飞行状态耦合等因素。

3 后退区间优化算法 (Receding horizon optimal algorithm)

3.1 RHO 概念^[2] (Concept of RHO)

RHO (Receding-horizon optimization) 后退区间优化算法又称一般预测控制,起始于过程控制工业。RHO 在有限的时间段内对预测对象的动态和要求的对象响应之间的误差进行优化,求取优化指标的最小值,优化结果是在一段时间范围内的一系列控制量,取接近于当前时刻的第一个控制输入量,应用于系统中,在下一个时刻,不是应用第二个开环控制输入量,而是重新计算优化控制量,仍取接近于当前时刻的第一个控制输入量,应用于系统中,这样由于控制量从不会取到闭区间的终点,因此称此算法为后退区间优化算法。

3.2 RHO 算法 (RHO algorithm)

RHO 是基于线性微分方程

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), x(t_0) = x_0, \\ Y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

的优化算法,给定优化指标(4)

$$J = \frac{1}{2} Y(t_f) F Y(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ u(\tau) R u(\tau) + [Y_r(\tau) - Y(\tau)]^T Q [Y_r(\tau) - Y(\tau)] \} d\tau. \quad (4)$$

在 $t \in [t_0, t_f]$ 之间对飞机状态量和操纵输入量进行优化。其中 $Y_r(t)$ 是控制指令。由最大值原理,可

得最优控制解为

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T (P(t)x(t) + b(t)). \quad (5)$$

其中 $P(t)x(t)$ 属于调节器项,起到负反馈状态调节作用, $R(t)$ 需要求解 Riccati 微分方程

$$\dot{P}(t) = -P(t)A - A^T P(t) + P(t)BR^{-1}B^T P(t) - Q, \quad (6)$$

并且满足边界条件 $P(t_f) = F$ 。

$b(t)$ 代表由控制指令 $Y_r(t)$ 驱动的跟踪项,满足微分方程

$$\dot{b}(t) = [P(t)BR^{-1}B^T - A^T]b(t) - C^T Q Y_r(t) \text{ 和边界条件}$$

$$b(t_f) = C^T F Y(t_f). \quad (7)$$

关于式(6)的解法较多,可参见相关文献[3]。由于式(6)对 A 阵的极点配置无要求,即使 A 阵的特征值 $\lambda(A) \geq 0$, $P(t)x(t)$ 也能将状态调节到零值,也就是说 $P(t)$ 的 Riccati 微分方程恒有解。相对而言,无限时间调节问题 $t_f \rightarrow \infty$ 的代数 Riccati 方程要求 (A, B) 可控,这种要求太苛刻,从以下的推导中,可以看出仿射非线性飞机运动方程不适合用无限时间调节器问题求解。

式(7)在文献[4]中采用精细积分算法,在时间区间 $t \in [t_0, t_f]$ 要经过上万次矩阵迭代运算,不满足在线仿真时对实时性的要求,因此本文提出采用 N 步欧拉后退法近似求解 $b(t)$: 先将 $t \in [t_0, t_f]$ 分解为 N 段,即 $\Delta = (t_f - t_0)/N$, 已知末值条件和微分方程(7),在 Δ 足够小的情况下,微分方程可以用差分式表示,即 $\dot{b}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{b(t+\Delta) - b(t)}{\Delta}$, 并且预先设计出被跟踪的指令 $Y_r(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ 。这样式(7)可以表示为

$$\begin{aligned} b(t_f + \Delta) &= [P(t_f)BR^{-1}B^T - A^T]b(t_f) - C^T Q Y_r(t_f), \\ b(t_f + 2\Delta) &= [P(t_f + \Delta)BR^{-1}B^T - A^T]b(t_f + \Delta) - \\ &\quad C^T Q Y_r(t_f + \Delta), \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(t_0) &= b(t_f + N\Delta) = \\ &\quad [P(t_f + (N-1)\Delta)BR^{-1}B^T - A^T] \cdot \\ &\quad b(t_f + (N-1)\Delta) - C^T Q Y_r(t_f + (N-1)\Delta). \end{aligned}$$

在求解 $b(t_f + i\Delta)$, $i = 1, \dots, N$ 时,采用文献[3]的算法,同时求解精确解 $P(t_f + i\Delta)$, $i = 1, \dots, N$ 就可计算出满足边界条件的 $b(t_0)$ 。

根据 RHO 优化算法的要求,只要求解出 $b(t_0)$ 和 $P(t_0)$,就可获得接近于当前时刻 t_0 的最优控制量值。

式(6),(7)两个微分 Riccati 方程实际是对线性微分 Riccati 方程的求解,文献[3]给出了它们的算法,只是式(7)在一个采样步长内需要求解 N 个线性微分 Riccati 方程,若 N 较小,计算精度达不到要求,不能实现飞行状态跟随;若 N 较大,实时性达不到要求,求解时需要兼顾实时性与精度的问题。

4 仿射非线性方程 RHO 解法(RHO solution for nonlinear equation)

观察公式(3)可以发现此仿射非线性微分方程不满足 RHO 关于 A, B 阵是定常阵的要求,同时由于多出了 $E(x)$ 项,需要对式(3)进行变形^[5]。

假设 1 当计算运行到 t_0 时刻,在未来的时间段 $t \in [t_0, t_f]$ 内 $\bar{A}(\alpha), \bar{B}(\alpha), E(x)$ 假设为常值,且等于 t_0 时刻各自的解. 表示为 $\bar{A} = \bar{A}(\alpha_0, t_0)$, $\bar{B} = \bar{B}(\alpha_0, t_0)$, $d = E(x_0, t_0)$ 其中状态量的下标代表 t_0 时刻的测量状态值和舵面输入量. 这样(4)式在 t_0 时刻就变为定常线性微分方程

$$\dot{x} = \bar{A} \cdot x + \bar{B} \cdot u + d. \quad (8)$$

现重新定义增广状态矢量

$$\bar{x} = [\alpha \quad \omega_z \quad \beta \quad \omega_x \quad \omega_{y1}]^T,$$

相应式(8)中的稳定导数阵和操纵导数阵变化为

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{5 \times 5} & d_{5 \times 1} \\ 0_{1 \times 5} & 0_{1 \times 1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad \bar{\bar{B}} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{5 \times 5} \\ 0_{1 \times 5} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 5},$$

C 阵亦作相应的调整,(8)式可进一步演化为

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\bar{A}} \cdot \bar{x} + \bar{\bar{B}} \cdot u, \quad (9)$$

$$y = \bar{C} \bar{x}. \quad (10)$$

仿射非线性飞机运动方程经过假设和变形,转化为在 t_0 时刻为定常线性微分运动方程(9),(10),可以利用它们采用 RHO 优化算法计算出接近于当前时刻的优化舵面输入量。

另外,从增广阵的产生式(9)可以看出,线性微分方程中 (A, B) 阵不可控,不符合无限时间调节问题对 A, B 阵的要求。

5 算例(Example)

在高度为 3 km, Mach 数为 0.6 条件下,仿真步长为 $T = 0.0125$ s, RHO 优化算法时间区间为 $N = 5$, 经仿真实时性可以满足要求。

算例 1 设驾驶杆纵向输入对 ω_z 产生操纵指令 ω_{zc} , 输入指令作两个阶跃输入如下:

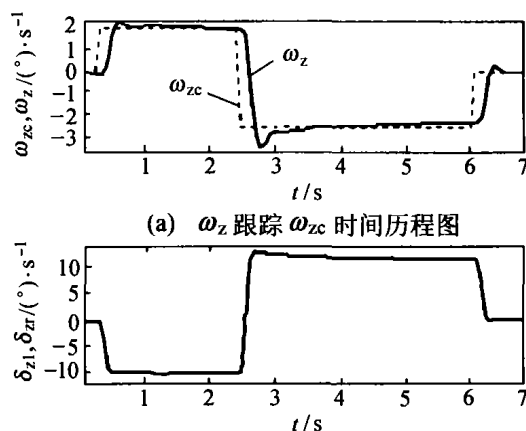
$$\omega_{zc} = \begin{cases} 2(^{\circ})/s, & t \in [0.25, 2.5], \\ -2.5(^{\circ})/s, & t \in [2.5, 6.25], \\ 0(^{\circ})/s, & \text{其他.} \end{cases}$$

优化参数选取如下:

$$C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$Q = 2, F = 1.4, R = \text{diag}\{5, 5, 5, 5, 5\}.$$

仿真结果如图 1 所示,虚线代表 ω_{zc} 指令,实线代表 ω_z . 可以看出 ω_{zc} 角度较小时, ω_z 能基本无偏差的跟踪 ω_{zc} , 而当 ω_{zc} 角度较大时, ω_z 不能无偏差的跟踪 ω_{zc} . 原因是: ω_z 发生变化时,攻角 α 的值也随之发生变化,时变稳定导数阵和操纵导数阵与 α 有关系. $|\omega_{zc}|$ 越大,那么 $|\omega_z|$ 也越大, α 亦变化较大,这直接导致了在 $|\omega_z|$ 较大时 \bar{A}, \bar{B} 阵发生很大变化,由 RHO 计算的舵输入量变化也较大,这反过来又会使俯仰力矩变化较大,进而使 ω_z 发生较大的变化,影响 ω_z 的跟踪精度,由于 ω_{zc} 较大,这只能在短时间内跟踪, ω_z 的改变量还是可以接受的. 当 ω_{zc} 绝对值较小时,由于 \bar{A}, \bar{B} 阵变化不太大,这也使 ω_z 能较精确的跟踪 ω_{zc} . 这是飞机仿射非线性方程所特有的一种现象,由此可以看出在线性化方程与线性小扰动方程的区别。



(a) ω_z 跟踪 ω_{zc} 时间历程图

(b) 升降舵偏转角时间历程图

图 1 算例 1 的仿真结果

Fig. 1 Simulations results of example 1

算例 2 设驾驶杆纵向输入对 ω_x 产生操纵指令 ω_{xc} , 输入指令作一个阶跃输入如下:

$$\omega_{xc} = \begin{cases} 3(^{\circ})/s, & t \in [0.25, 2.5], \\ 0(^{\circ})/s, & t \in [2.5, 6.25]. \end{cases}$$

优化参数选取如下:

$$C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$Q = 100, F = 7.3, R = \text{diag}\{5, 5, 100, 100, 10^4\}.$$

仿真结果如图 2 所示,图 2(a)中虚线代表 ω_{xc} 指令,实线代表 ω_x ,可见在减少方向舵输入的干扰下, ω_x 能够完全准确的跟踪 ω_{xc} 指令,从另一方面看,由于 ω_x 对 α 的影响只是发生在交叉耦合项中,数值较小,对 α 改变可忽略,因此 ω_x 才能够准确的跟踪 ω_{xc} 指令。

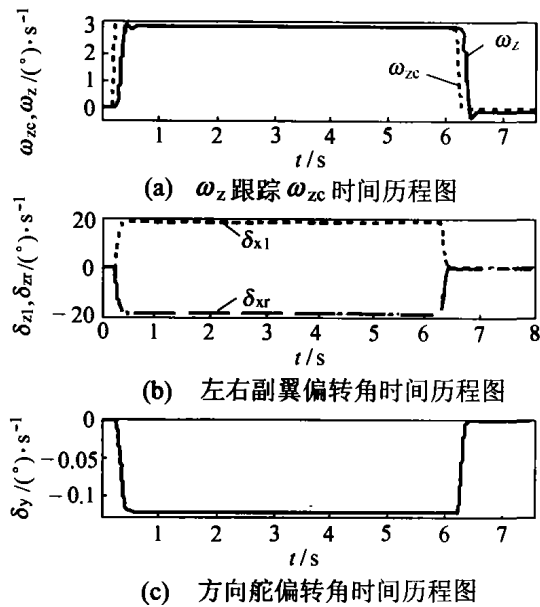


图 2 算例 2 的仿真结果

Fig. 2 Simulations results of example 2

6 结论(Conclusion)

通过以上推导和仿真,说明 RHO 算法可以较好解决非线性飞机运动方程在线指令分配的问题,这对故障状态下的飞机运动方程尤其重要,同时为解决飞机实时性与计算精度的问题,需要进一步研究更快捷的微分 Riccati 算法来满足要求。

参考文献(References):

- [1] 韩曾晋. 自适应控制[M]. 北京:清华大学出版社,1995. (HAN Zengjin. *Self-adaptive Control* [M]. Beijing: Tsinghua university Press, 1995.)
- [2] MONACO J, WARD D, BARRON R, et al. Implementation and flight test assessment of an adaptive, reconfigurable flight control system [C]// *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 1997, 1: 1443 - 1454.
- [3] 王子才, 赵长安. 应用最优控制[M]. 黑龙江:哈尔滨工业大学出版社,1989. (WANG Zicai, ZHAO Chang'an. *Applied Optimal Control* [M], Heilongjiang: Harbin institute of technology Press, 1989.)
- [4] 钟万镒. 计算结构力学与最优控制[M]. 辽宁:大连理工大学出版社,1993. (ZHONG Wanxie. *Calculational Structure Mechanics and Optimal Control* [M]. Liaoning: Dalian University of Technology Press, 1993.)
- [5] ROWENA L. eberhardt, Indirect adaptive flight control of a tailless fighter aircraft [C]// *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 1999, 1:466 - 476.

作者简介:

苏浩秦 (1975—),男,现为清华大学汽车工程系博士后,西北工业大学博士毕业,分别于 2000 年、2004 年在西北工业大学航空学院获得硕士学位和博士学位,研究兴趣为飞行器故障检测、重构和主动控制算法, E-mail: suhaoqin@sohu.com;

邓建华 (1936—),男,西北工业大学教授、博导,研究方向为飞机故障检测、主动控制、系统辨识等方面。

(上接第 105 页)

参考文献(References):

- [1] PODLUBNY I. Fractional-order systems and-controllers [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(1):208 - 214.
- [2] MATIGNON D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing [C]// *Computational Engineering in Systems and Application*. Lille, France: IEEE Press. 1996, 2:963 - 968.
- [3] MATIGNON D, D' ANDRÉA-NOVEL B. Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems [C]// *Computational Engineering in Systems and Application multicongress*. Lille, France: IEEE Press. 1996, 2:952 - 956.
- [4] PODLUBNY I. *Fractional Differential Equations* [M]. San Diego: Academic Press, 1999:243 - 260.
- [5] ZHANG W, SHIMIZU N. Numerical algorithm for dynamic problems involving fractional operators [J]. *Int J of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, 1998, 41(3):364 - 370.
- [6] OLDHAM K B, SPANIER J. *The Fractional Calculus* [M]. New York: Academic, 1974.
- [7] 池田, 川田, 小口, 分数次微分方程式の時間応答の数値計算法 [J]. 計測自動制御学会論文集, 2001, 37(8):795 - 797. (IKEDA F, KAWATA S, OGUCHI T. A numerical algorithm of time

response for fractional differential equations [J]. *Trans on Society of Instrument and Control Engineers*, 2001, 37(8):795 - 797.)

- [8] HENRICI P. *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations* [M]. New York: John Wiley, 1968.
- [9] KATZNELSON Y. *An Introduction to Harmonic Analysis* [M]. New York: John Wiley, 1968.

作者简介:

王振滨 (1973—),男,上海交通大学博士生,2001 年于江苏理工大学电气工程系获硕士学位,主要研究方向为分数阶系统建模与辨识及熔融碳酸盐型燃料电池的建模与控制, E-mail: wzb123@sjtu.edu.cn;

曹广益 (1941—),男,上海交通大学电子信息与电气工程学院教授,博士生导师,燃料电池研究所所长,1964 年于上海交通大学电子信息学院自动化系毕业,1997 年获日本工学博士,主要研究方向为燃料电池的建模与动态分析和机器人控制理论研究,国内外发表学术论文 80 余篇,出版学术专著 3 部;

朱新坚 (1958—),男,上海交通大学电子信息与电气工程学院自动化系教授,博士生导师,燃料电池研究所副所长,1995 年于上海交通大学自动化系获博士学位,1997 年上海交通大学机械学院博士后出站,主要研究方向为燃料电池的建模与动态分析,国内外发表学术论文 70 余篇。