文章编号: 1000-8152(2005)02-0177-05

动态区间系统的最优保性能控制——LMI方法

毛维杰, 刘征宇
(浙江大学 工业控制技术国家重点实验室,先进控制研究所,浙江 杭州 310027)

摘要: 针对动态区间系统和一个给定的二次型性能指标,研究了其保性能控制问题,基于线性矩阵不等式(LMI)提出了最优保性能控制器设计方法,并将相关结果推广到参数不确定系统.利用功能强大的LMI工具,求解非常方便.所给实例表明,该方法用于设计动态区间系统与秩-1型参数不确定系统的最优保性能控制器,非常有效.

关键词: 区间系统; 保性能控制; 线性矩阵不等式(LMI)
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Optimal guaranteed cost control of dynamic interval systems: an LMI approach

MAO Wei-jie, LIU Zheng-yu
(National Lab of Industrial Control Technology and Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: The guaranteed cost control of dynamic interval systems with a given quadratic cost function is addressed. A design method for the optimal guaranteed cost controller is proposed in terms of linear matrix inequalities(LMIs). The results are also extended to parametric uncertain systems. With the powerful LMI toolbox, it is very convenient to solve these problems. The examples show that this method is effective to design the optimal guaranteed cost controller for dynamic interval systems and rank-1 parametric uncertain systems.

Key words: interval systems; guaranteed cost control; linear matrix inequality(LMI)

1 引言(Introduction)

近年来关于动态区间系统的鲁棒稳定性研究已引起了国内外控制界的广泛关注,取得了许多成果[1~7].动态区间系统的综合问题,显然要比分析问题困难,目前研究甚少.现有的绝大部分分析方法都不能自然推广到综合问题.文献[8,9]针对具有GAS(Generalized Antisymmetric Stepwise)结构的单输入动态区间系统,提出了鲁棒镇定方法,具有较大的局限性.事实上,在不确定系统的综合中,仅仅具有稳定性是不够的,还必须考虑鲁棒性能问题.因此,不确定系统的保性能控制问题受到了众多学者的关注,并相继取得了一些成果[10~13].其主要思想是,针对不确定系统,设计一个控制律,不仅使其闭环稳定,而且使得闭环系统的性能不超过某个确定的上界.特别是文献[11,12],基于LMI方法提出了不确定系统的保性能控制器设计方法,计算非常方便.但不宜直接套用到动态区间系统,否则不同的不确定性描述形式之间的不等价转换将带来很大的保守性.文献[14]针对动态区间系统提出了鲁棒控制器设计方法,但所给方法计算不方便(需要人为参数整定),且具有较大保守性.本文在上述文献的基础上,基于LMI方法提出了动态区间系统的保性能控制器设计方法,为动态区间系统的综合提供了一个非常有效的手段.所有结论均以线性矩阵不等式的形式给出,不需要人为参数整定,利用成熟的LMI工具,求解非常方便.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下的动态区间系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0. \tag{1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ 分别为系统(1)的状态和控制输入.记 $A^m = [a_{ij}^m]_{n\times n}$, $A^M = [a_{ij}^M]_{n\times n}$,满足 $a_{ij}^m \leqslant a_{ij}^M$; $B^m = [b_{ij}^m]_{n\times p}$, $B^M = [b_{ij}^M]_{n\times p}$,满足 $b_{ij}^m \leqslant b_{ij}^M$,则

$$[A^m, A^M] = \{[a_{ij}]: a_{ij}^m \leqslant a_{ij} \leqslant a_{ij}^M, 1 \leqslant i,j \leqslant n\}, \tag{2}$$

收稿日期:2003-09-11; 收修改稿日期:2004-05-14.
基金项目:浙江省自然科学基金资助项目(602055);国家自然科学基金资助项目(60421002,60004002).

$[B^m, B^M] =$
$\{[b_{ij}]: b_{ij}^m \leqslant b_{ij} \leqslant b_{ij}^M, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p\}$. (3)
其中 A^m, A^M, B^m, B^M 是已知的实矩阵.若令

$$A_0 = \frac{1}{2}[A^M + A^m], \tag{4}$$

$$\Delta A = \frac{1}{2}[A^M - A^m], \tag{5}$$

与

$$B_0 = \frac{1}{2}(B^M + B^m), \tag{6}$$

$$\Delta B = \frac{1}{2}(B^M - B^m), \tag{7}$$

则区间矩阵 $A \in [A^m, A^M], B \in [B^m, B^M]$ 可表示为

$$A = A_0 + \sum_{i,j=1}^{n} e_i f_{ij} e_j^{\mathrm{T}}, \ |f_{ij}| \leqslant \Delta a_{ij}, \tag{8}$$

$$B = B_0 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} e_i g_{ij} h_j^{\mathrm{T}}, \ |g_{ij}| \leqslant \Delta b_{ij}. \tag{9}$$

其中 $e_k \in \mathbb{R}^n, h_k \in \mathbb{R}^p$ 表示第 k 元素为1,其余元素为0的列矢量.

针对动态区间系统(1),考虑如下二次型性能指标

$$J(x_0, u(t)) = \int_0^{\infty} [x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]\mathrm{d}t. \tag{10}$$

其中 Q, R 是已知的对称正定矩阵.

定义 1 针对动态区间系统(1),如果存在状态反馈控制律 $u^*(t)$ 与正实数 J^*,使得对于所有 $A \in [A^m, A^M], B \in [B^m, B^M]$,满足

$$J(x_0, u^*(t)) \leqslant J^*, \tag{11}$$

则称 J^* 为系统(1)的保性能指标,$u^*(t)$ 为系统(1)的保性能控制律.

引理 1 设 X, Y, F 为具有合适维数的实矩阵,其中 $F^{\mathrm{T}}F \leqslant I$,则对任意参数 $\lambda > 0$,满足

$$XFY + Y^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}} \leqslant \lambda XX^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\lambda}Y^{\mathrm{T}}Y. \tag{12}$$

定义 2 矩阵 A 称为 M-矩阵,如果其非对角元素均非负;矩阵 A 称为拟 M-矩阵,如果存在符号矩阵

$$S = \mathrm{diag}\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}, \ s_i = \pm 1, \ i = 1, 2, \cdots, n \tag{13}$$

使得 SAS 为 M-矩阵.

引理 2 设对称矩阵 $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$,对所有容许的不确定性满足

$$Y = Y_0 + \sum_{i=1}^{N} \delta_i(\omega_i\tau_i^{\mathrm{T}} + \tau_i\omega_i^{\mathrm{T}}) < 0, \ |\delta_i| \leqslant \bar{\delta}_i. \tag{14}$$

其中 $\omega_i \in \mathbb{R}^n, \tau_i \in \mathbb{R}^n$.若 Y_0 是拟 M-矩阵,即存在符号矩阵 S 使得 SY_0S 是 M-矩阵,且 $S\omega_i, S\tau_i (i = 1, 2, \cdots, N)$ 为非正或非负向量,则存在参数 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, N)$,使得

$$Y_0 + \sum_{i=1}^{N}(\lambda_i\bar{\delta}_i^2\omega_i\omega_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\lambda_i}\tau_i\tau_i^{\mathrm{T}}) < 0. \tag{15}$$

证 只需证明 SYS 与

$$S\bar{Y}S = SY_0S + \sum_{i=1}^{N} S(\lambda\bar{\delta}_i^2\omega_i\omega_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\lambda_i}\tau_i\tau_i^{\mathrm{T}})S$$

具有相同的最大特征值.

设 $\lambda_{\max}$ 是 SYS 的最大特征值,$v \in \mathbb{R}^n (v^{\mathrm{T}}v = 1)$ 为相应的特征向量,则

$$\lambda_{\max} = v^{\mathrm{T}}SYSv = v^{\mathrm{T}}SY_0Sv + \sum_{i=1}^{N} 2\bar{\delta}_i^* v^{\mathrm{T}}S\omega_i\tau_i^{\mathrm{T}}Sv.$$

其中 $\bar{\delta}_i^*$ 取 $\bar{\delta}_i$ 或 $-\bar{\delta}_i$,使得 $\bar{\delta}_i^* v^{\mathrm{T}}S\omega_i\tau_i^{\mathrm{T}}Sv > 0$.由于 SY_0S 是 M-矩阵,则 v 是非负向量(即所有元素均非负).取 $\lambda_i = \dfrac{v^{\mathrm{T}}S\tau_i}{\bar{\delta}_i^* v^{\mathrm{T}}S\omega_i}$,则很容易确定 $\lambda_{\max}, v$ 是 $S\bar{Y}S$ 的特征值与相应的特征向量.由于 $S\bar{Y}S$ 是 M-矩阵,因此进一步可确定 $\lambda_{\max}, v$ 也是 $S\bar{Y}S$ 的最大特征值与相应的特征向量.

3 保性能控制器(Guaranteed cost controller)

首先,参考文献[12,13],可直接获得如下结论:

定理 1 针对动态区间系统(1),如果存在对称正定矩阵 P,使得对于所有 $A \in [A^m, A^M], B \in [B^m, B^M]$,满足

$$(A + BK)^{\mathrm{T}}P + P(A + BK) + Q + K^{\mathrm{T}}RK < 0, \tag{16}$$

则 $u^*(t) = Kx(t)$ 是系统(1)的保性能控制律,$J^* = x_0^{\mathrm{T}}Px_0$ 是相应的保性能指标.

注 1 定理1中得到的保性能指标依赖于初始状态 x_0,然而实用中往往难以精确确定系统的初始状态.为克服这个困难,参照文献[12,13],假定 x_0 是一个满足 $\mathrm{E}\{x_0x_0^{\mathrm{T}}\} = I$ 的零均值随机变量.此时,保性能指标的期望值

$$\hat{J}^* = \mathrm{E}\{J^*\} = \mathrm{E}\{x_0^{\mathrm{T}}Px_0\} = \mathrm{tr}(P). \tag{17}$$

$\hat{J}^*$ 称为系统的期望保性能指标.

定理1中,条件(16)不仅包含待求矩阵 K,还包含区间矩阵 A 和 B,其求解与验证显然非常困难,因此有必要寻求更易于求解与验证的条件.

定理 2 针对动态区间系统(1),存在对称正定矩阵 P,控制律 $u^*(t)$ 满足定理1,如果存在矩阵 Z,对称正定矩阵 X,正实数 $\lambda_{ij} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$, $\delta_{ij} (i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, p)$,满足

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} XA_0^{\mathrm T}+A_0X+W+ \\ Z^{\mathrm T}B_0^{\mathrm T}+B_0Z \end{pmatrix} & U_1 & U_2 & X & Z^{\mathrm T} \\ U_1^{\mathrm T} & -V_1 & 0 & 0 & 0 \\ U_2^{\mathrm T} & 0 & -V_2 & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ Z & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{18}$$

其中

$$W = \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_{ij}\Delta a_{ij}^2 e_i e_i^{\mathrm T} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\delta_{ij}\Delta b_{ij}^2 e_i e_i^{\mathrm T}, \tag{19}$$

$$U_1 = [Xe_1 \cdots\ Xe_n \cdots\ Xe_1 \cdots\ Xe_n] = [\underbrace{X \ \cdots\ X}_{n}], \tag{20}$$

$$U_2 = [Z^{\mathrm T}h_1 \cdots\ Z^{\mathrm T}h_p \cdots\ Z^{\mathrm T}h_1 \cdots\ Z^{\mathrm T}h_p] = [\underbrace{Z^{\mathrm T} \cdots\ Z^{\mathrm T}}_{n}], \tag{21}$$

$$V_1 = \mathrm{diag}\{\lambda_{11},\cdots,\lambda_{1n},\cdots,\lambda_{n1},\cdots,\lambda_{nn}\}, \tag{22}$$

$$V_2 = \mathrm{diag}\{\delta_{11},\cdots,\delta_{1p},\cdots,\delta_{n1},\cdots,\delta_{np}\}, \tag{23}$$

而且,保性能控制律为

$$u^*(t) = Kx(t),\ K = ZX^{-1}. \tag{24}$$

相应的期望保性能指标为

$$\hat{J}^* = \mathrm{tr}(P),\ P = X^{-1}. \tag{25}$$

若

$$Y_0 = (A_0 + B_0K)^{\mathrm T}P + P(A_0 + B_0K) + Q + K^{\mathrm T}RK \tag{26}$$

是拟 M-矩阵,即存在符号矩阵 S 使得 SY_0S 是 M-矩阵,且 $SPe_i(i = 1,2,\cdots,n)$,$SK^{\mathrm T}h_j(j = 1,2,\cdots,p)$ 为非正或非负向量,则此条件也是必要的.

证　充分性.利用引理 1,对任意参数 $\lambda_{ij} > 0(i,j = 1,2,\cdots,n)$,$\delta_{ij} > 0(i = 1,2,\cdots,n,j = 1,2,\cdots,p)$,有

$$X(A + BK)^{\mathrm T} + (A + BK)X + XQX + XK^{\mathrm T}RKX = XA_0^{\mathrm T} + A_0X + Z^{\mathrm T}B_0^{\mathrm T} + B_0Z + XQX + Z^{\mathrm T}RZ + \sum_{i,j=1}^{n}(Xe_jf_{ij}e_i^{\mathrm T} + e_if_{ij}e_j^{\mathrm T}X) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(Z^{\mathrm T}h_jg_{ij}e_i^{\mathrm T} + e_ig_{ij}h_j^{\mathrm T}Z) \leqslant$$

$$XA_0^{\mathrm T} + A_0X + Z^{\mathrm T}B_0^{\mathrm T} + B_0Z + XQX + Z^{\mathrm T}RZ + \sum_{i,j=1}^{n}(\lambda_{ij}\Delta a_{ij}^2 e_ie_i^{\mathrm T} + \frac{1}{\lambda_{ij}}Xe_je_j^{\mathrm T}X) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(\delta_{ij}\Delta b_{ij}^2 e_ie_i^{\mathrm T} + \frac{1}{\delta_{ij}}Z^{\mathrm T}h_jh_j^{\mathrm T}Z) < 0.$$

上式右边不等号的成立由(18)的 Schur 补条件得到.对上式同时左乘与右乘 $P = X^{-1}$,即可得到定理 1 条件(16).

必要性.设动态区间系统(1)满足定理 1 条件,则存在对称正定矩阵 P,控制律 $u^*(t) = Kx(t)$,满足

$$S[(A + BK)^{\mathrm T}P + P(A + BK) + Q + K^{\mathrm T}RK]S = SY_0S + \sum_{i,j=1}^{n}(Se_jf_{ij}e_i^{\mathrm T}PS + SPe_if_{ij}e_j^{\mathrm T}S) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(SK^{\mathrm T}h_jg_{ij}e_i^{\mathrm T}PS + SPe_ig_{ij}h_j^{\mathrm T}KS) < 0.$$

由于 SY_0S 是 M-矩阵,且 SPe_i,$SK^{\mathrm T}h_j$ 为非正或非负向量,则由引理 2 可得,存在正实数 $\lambda_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$,$\delta_{ij}(i = 1,2,\cdots,n,j = 1,2,\cdots,p)$,使得

$$Y_0 + \sum_{i,j=1}^{n}(\lambda_{ij}\Delta a_{ij}^2Pe_ie_i^{\mathrm T}P + \frac{1}{\lambda_{ij}}e_je_j^{\mathrm T}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(\delta_{ij}\Delta b_{ij}^2Pe_ie_i^{\mathrm T}P + \frac{1}{\delta_{ij}}K^{\mathrm T}h_jh_j^{\mathrm T}K) < 0.$$

令 $X = P^{-1}$,$Z = KX$,并由 Schur 补条件可得上式等价于式(18).

注 2　定理 2 的必要条件,虽然没有明显的应用价值,但该条件表明在某些情形下定理 2 与定理 1 的等价性,从而显示出定理 2 具有较小的保守性.

通过对式(8),(9)的观察,上述结果可推广到参数不确定系统,即

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = (A_0+\sum_{i=1}^{r}\varepsilon_iA_i)x(t)+(B_0+\sum_{j=1}^{q}\eta_jB_j)u(t). \tag{27}$$

其中不确定参数 $|\varepsilon_i| \leqslant \bar{\varepsilon}_i$,$|\eta_j| \leqslant \bar{\eta}_j$,$A_0,A_i,B_0,B_j$ 均为已知的实矩阵.

定理 3　针对参数不确定系统(27),如果存在对称正定矩阵 P,使得对于所有 $|\varepsilon_i| \leqslant \bar{\varepsilon}_i$,$|\eta_j| \leqslant \bar{\eta}_j$,满足

$$(A + BK)^{\mathrm T}P + P(A + BK) + Q + K^{\mathrm T}RK < 0, \tag{28}$$

则 $u^*(t) = Kx(t)$ 是系统(27)的保性能控制律,$\hat{J}^* = \mathrm{tr}(P)$ 是相应的期望保性能指标.

定理 4　针对参数不确定系统(27),存在对称正定矩阵 P,控制律 $u^*(t)$ 满足定理 3,如果存在矩阵 Z,对称正定矩阵 X,Λ_i,Δ_j,$i = 1,2,\cdots,r$,$j = 1,2,\cdots,q$,满足

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} XA_0^{\mathrm T}+A_0X+W+ \\ Z^{\mathrm T}B_0^{\mathrm T}+B_0Z \end{pmatrix} & U_1 & U_2 & X & Z^{\mathrm T} \\ U_1^{\mathrm T} & -V_1 & 0 & 0 & 0 \\ U_2^{\mathrm T} & 0 & -V_2 & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ Z & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{29}$$

其中

$$W=\sum_{i=1}^{r}\bar{\varepsilon}_i^2A_i\Lambda_iA_i^{\mathrm{T}}+\sum_{j=1}^{q}\bar{\eta}_j^2B_j\Delta_jB_j^{\mathrm{T}},\tag{30}$$

$$U_1=[\underbrace{X\ \cdots\ X}_{r}],\tag{31}$$

$$U_2=[\underbrace{Z^{\mathrm{T}}\ \cdots\ Z^{\mathrm{T}}}_{q}],\tag{32}$$

$$V_1=\mathrm{diag}\{\Lambda_1\ \ \Lambda_2\ \ \cdots\ \ \Lambda_r\},\tag{33}$$

$$V_2=\mathrm{diag}\{\Delta_1\ \ \Delta_2\ \ \cdots\ \ \Delta_q\},\tag{34}$$

而且,保性能控制律为

$$u^*(t)=Kx(t),\ K=ZX^{-1},\tag{35}$$

相应的期望保性能指标为

$$\hat{J}^*=\mathrm{tr}(P),\ P=X^{-1}.\tag{36}$$

注 3 参数不确定系统(27)中,若 A_i,B_j 具有秩-1 型分解,则可得到与定理 2 结论类似的充分和必要条件,具体描述可参照定理 2,这里不再赘述.

4 最优保性能控制器(Optimal guaranteed cost controller)

基于上述结论,针对动态区间系统(1)与参数不确定系统(27),可进一步优化闭环系统的保性能指标,并有如下结论:

定理 5 针对动态区间系统(1),如果如下优化问题

$$\min_{Y,X,Z,\lambda,\delta}\ \mathrm{tr}(Y)$$

s.t. i)

$$\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}XA_0^{\mathrm{T}}+A_0X+W+\\ Z^{\mathrm{T}}B_0^{\mathrm{T}}+B_0Z\end{pmatrix} & U_1 & U_2 & X & Z^{\mathrm{T}}\\ U_1^{\mathrm{T}} & -V_1 & 0 & 0 & 0\\ U_2^{\mathrm{T}} & 0 & -V_2 & 0 & 0\\ X & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0\\ Z & 0 & 0 & 0 & -R^{-1}\end{bmatrix}<0;$$

$$\text{ii)}\ \begin{bmatrix}Y & I\\ I & X\end{bmatrix}>0\tag{37}$$

存在最优解,其中 W,U_1,U_2,V_1,V_2 如式(19)~(23)定义,则控制律(24)是保证闭环系统性能指标(25)极小化的最优保性能控制律.

证 根据定理 2,由优化问题(37)的任意可行解构造的控制律(24)是系统(1)的保性能控制律.由Schur 补条件可得,式(37)中的 ii)等价于 $Y>X^{-1}=P>0$.因此,$\mathrm{tr}(Y)$ 极小化将保证 $\mathrm{tr}(P)$ 极小化,即极小化系统(1)的期望保性能指标.优化问题(37)的解的最优性由目标函数与约束的凸性保证.

定理 6 针对参数不确定系统(27),如果如下优化问题

$$\min_{Y,X,Z,\Lambda,\Delta}\ \mathrm{tr}(Y)$$

s.t. i)

$$\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}XA_0^{\mathrm{T}}+A_0X+W+\\ Z^{\mathrm{T}}B_0^{\mathrm{T}}+B_0Z\end{pmatrix} & U_1 & U_2 & X & Z^{\mathrm{T}}\\ U_1^{\mathrm{T}} & -V_1 & 0 & 0 & 0\\ U_2^{\mathrm{T}} & 0 & -V_2 & 0 & 0\\ X & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0\\ Z & 0 & 0 & 0 & -R^{-1}\end{bmatrix}<0;$$

$$\text{ii)}\ \begin{bmatrix}Y & I\\ I & X\end{bmatrix}>0\tag{38}$$

存在最优解,其中 W,U_1,U_2,V_1,V_2 如式(30)~(34)定义,则控制律(35)是保证闭环系统性能指标(36)极小化的最优保性能控制律.

5 数值实例(Numerical examples)

例 1 考虑动态区间系统(1),其中

$$A^m=\begin{bmatrix}-7 & 4.6 & 4.5 & -5.3\\ -4.3 & -6.1 & -3.5 & 0.2\\ -5.7 & 2.6 & -7.6 & -0.2\\ -2.8 & 0.5 & 4.3 & -4.6\end{bmatrix},$$

$$A^M=\begin{bmatrix}-3 & 7.1 & 6.3 & -2.7\\ -1.7 & -2.8 & -1.5 & 2\\ -4 & 4.9 & -3.1 & 3.2\\ -0.6 & 2.5 & 6.2 & -2.8\end{bmatrix},$$

$$B^m=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -2\\ 0\end{bmatrix},\ B^M=\begin{bmatrix}3\\ 0\\ -1\\ 0\end{bmatrix}.$$

利用定理 5,取 $Q=I_4,R=1$,则优化问题(37)的最优解为

$$Y=\begin{bmatrix}4.2857 & -0.7312 & -0.8041 & -6.0685\\ -0.7312 & 7.1257 & 1.5453 & 0.6723\\ -0.8041 & 1.5453 & 8.1231 & 3.7730\\ -6.0685 & 0.6723 & 3.7730 & 18.6491\end{bmatrix},$$

$$X=\begin{bmatrix}0.4474 & 0.0389 & -0.0332 & 0.1509\\ 0.0389 & 0.1498 & -0.0309 & 0.0135\\ -0.0332 & -0.0309 & 0.1437 & -0.0388\\ 0.1509 & 0.0135 & -0.0388 & 0.1101\end{bmatrix},$$

$$Z=[-1.0960\ \ 0\ \ 0.6576\ \ 0],$$

$$\lambda=\begin{bmatrix}0.1303 & 0.1933 & 0.1700 & 0.1021\\ 0.1225 & 0.0896 & 0.0935 & 0.0901\\ 0.3203 & 0.2196 & 0.0710 & 0.0816\\ 0.1218 & 0.1243 & 0.0828 & 0.0758\end{bmatrix},$$

$$\delta = \begin{bmatrix} 1.5275 \\ * \\ 1.5963 \\ * \end{bmatrix}.$$

相应的最优保性能控制律为

$$u^*(t) = [-5.2257 \quad 1.8175 \quad 6.2228 \quad 9.1319]x(t).$$

例 2　考虑文献[10 ~ 12,14]所给参数不确定系统,其中

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & \begin{pmatrix} 0.2855+ \\ 0.2192\varepsilon \end{pmatrix} & -0.7070 & \begin{pmatrix} 1.3229+ \\ 1.2031\varepsilon \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.0447+1.0673\eta & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.9900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

当 $|\varepsilon| \leqslant 1$, $|\eta| \leqslant 1$ 时,设计最优保性能控制律.

上述参数不确定系统可描述为秩-1 型分解,即

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.2855 & -0.7070 & 1.3229 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\varepsilon[0 \quad 0.2192 \quad 0 \quad 1.2031],$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.0447 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.9900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\eta[1.0673 \quad 0].$$

根据定理 5 的类似结论,取 $Q = I_4, R = I_2$,则优化问题(37)存在最优解,最优保性能控制律为

$$u^*(t) = \begin{bmatrix} -0.6608 & 0.1994 & 0.8444 & 1.1744 \\ 0.3637 & 0.8702 & -0.3350 & -1.1398 \end{bmatrix}x(t).$$

为了比较本文与文献[10 ~ 12,14]结果,特将保性能指标与控制律增益范数列表 1 所示.由表 1 可见,本文的期望保性能指标 $\hat{J}^*$ 优于文献[10 ~ 12,14],但保性能指标 J^* 大于文献[11],为改善该指标,可对优化问题(37)添加约束

$$x_0^{\mathrm{T}}X^{-1}x_0 < 5.18.$$

该约束可非常方便地转换为 LMI 形式.相应的最优保性能控制律与保性能指标为

$$u^*(t) = \begin{bmatrix} -0.6878 & 0.2052 & 0.8780 & 1.2139 \\ 0.3880 & 0.8850 & -0.3111 & -1.1484 \end{bmatrix}x(t),$$

$$J^* = x_0^{\mathrm{T}}Px_0 = 5.1800,\ \hat{J}^* = \mathrm{tr}(P) = 6.2350,$$

$$\|K\| = 2.0782.$$

显然,上述结果要优于文献[10 ~ 12,14],该结果以适当牺牲 $\hat{J}^*$ 与 $\|K\|$ 指标换取 J^* 指标的改善.

表 1　本文方法与其他方法结果比较

Table 1　Comparison between the proposed method and other methods

方法	$J^* = x_0^{\mathrm{T}}Px_0$	$\hat{J}^* = \mathrm{tr}(P)$	增益范数 $\|K\|$
文献[14]	6.7398	11.8606	4.4402
文献[10]	5.800	7.34	3.04
文献[11]	5.2591	6.4720	4.4038
文献[12]	5.3124	6.2954	2.0957
本文	5.2786	6.2101	2.0318

6　结论(Conclusion)

本文基于 LMI 方法提出了动态区间系统的保性能控制器设计方法,在此基础上进一步提出了最优保性能控制器设计方法,并将相关结果推广到参数不确定系统.该结果推广到秩-1型参数不确定系统时,优于现有文献提出的其它方法.本文的所有结论均以线性矩阵不等式的形式给出,目前 LMI 的解法已非常成熟,例如可直接利用 MATLAB 的 LMI 工具箱求解.

参考文献(References):

[1] MANSOUR M. Robust stability of interval matrices [C]// *Proc of the 28th IEEE Conf on Decision and Control*. Tampa, Florida, USA: IEEE Control Systems Society, 1989: 46 - 51.

[2] SEZER M E, SILJAK D D. On stability of interval matrices [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(2): 368 - 371.

[3] MAO W J, SUN Y X. Criteria for robust stability of dynamic interval systems [C]// *Proc of the 35th IEEE Conf on Decision and Control*. Kobe, Japan: IEEE Control Systems Society, 1996: 45 - 46.

[4] MAO W J, CHU J. On quadratic stability of dynamic interval systems [C]// *Proc of American Control Conference*. Anchorage, AK, USA: American Automatic Control Council, 2002: 3926 - 3930.

[5] WANG K, MICHEL A N, LIU D. Necessary and sufficient conditions for the Hurwitz and Schur stability of interval matrices [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(6): 1251 - 1255.

[6] XIAO Y, UNBEHAUEN R. Robust hurwitz and schur stability test for interval matrices [C]// *Proc of the 39th IEEE Conf on Decision and Control*. Sydney, Australia: IEEE Control Systems Society, 2000: 4209 - 4214.

(下转第 188 页)

$$\dot{L} \leqslant -\|e\|^2 + \|r\|(\bar{\varepsilon} + \|w\|) - \lambda\|r\|\|\tilde{Z}\| + \lambda\|r\|\|\tilde{Z}\|\bar{Z} - K_{r0}\|r\|^2 - K_{r1}\|r\|^2(\|Z\| + \bar{Z}), \tag{A.10}$$

上式可以写为

$$\dot{L} \leqslant -\|e\|^2 - a_0\|r\|^2 - a_1\|r\|. \tag{A.11}$$

其中

$$a_0 = K_{r0} + 2K_{r1}\bar{Z} + (K_{r1} - c_6)\|\tilde{Z}\|, \tag{A.12}$$

$$a_1 = (c_7 - \lambda)\|\tilde{Z}\|^2 + (\lambda\|\tilde{Z}\| + c_5)\|\tilde{Z}\| + \bar{\varepsilon} + c_4. \tag{A.13}$$

当 $K_{r1} > c_6$ 时, $a_0 > 0$. 当 $\|r\| \geqslant \left|\frac{a_1}{a_0}\right|$ 时,上面的条件是保证 $\dot{L}$ 负半定的充分条件. 因此,由 LaSalle 定理可知, e 和 Z 保持有界. 如果假设条件2满足,所有系统信号保持有界.

作者简介:

朱家强 (1974—),男,在清华大学计算机科学与技术系作博士后研究工作,主要研究方向为智能飞行控制、嵌入式系统、飞行控制计算机,E-mail: zhujiaqiang@tsinghua.org.cn;

朱纪洪 (1968—),男,清华大学计算机科学与技术系教授,博士生导师,当前研究领域为无人驾驶飞机、飞行控制系统、月球探测机器人和鲁棒控制理论,E-mail: jhzhu@tsinghua.edu.cn;

郭锁凤 (1929—),男,南京航空航天大学自动化学院教授,博士生导师,主要研究方向为飞行器导航、制导与控制,E-mail: guosf@nuaa.edu.cn;

孙增圻 (1943—),男,清华大学计算机科学与技术系教授,博士生导师,当前研究领域为月球探测机器人、足球机器人、空间遥操作系统和模糊神经网络理论,E-mail: szq-dcs@tsinghua.edu.cn.

(上接第181页)

[7] YEDAVALLI R K. An improved extreme point solution for checking robust stability of interval matrices with much reduced vertex set and combinatorial effort [C]// *Proc of American Control Conference*. Arlington, VA, USA: American Automatic Control Council, 2001: 3902 - 3907.

[8] HU S, WANG J. On stabilization of a new class of linear time-invariant interval systems via constant state feedback control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(11): 2106 - 2111.

[9] WEI K. Stabilization of linear time-invariant interval systems via constant state feedback control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(1): 22 - 32.

[10] KOSMIDOU O I, ABOU-KANDIL H, BERTRAND P. A game theoretic approach for guaranteed cost control [C]// *Proc of European Control Conference*. Grenoble, France: European Union Control Association, 1991: 2220 - 2225.

[11] FISCHMAN A, DION J M, DUGARD L, et al. A linear matrix inequality approach for guaranteed cost control [C]// *Proc of the 13th IFAC World Congress*. San Francisco, USA: Int Federation of Automatic Control, 1996, H: 197 - 202.

[12] 俞立. 线性不确定系统的最优保性能控制——线性矩阵不等式处理方法[J]. 控制理论与应用, 2000, 17(3): 423 - 428.
(YU Li. Optimal guaranteed cost control of linear uncertain system: am LMI approach [J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(3): 423 - 428.)

[13] PETERSEN I R, MCFARLANE D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(9): 1971 - 1977.

[14] 吴庆宪, 王源, 姜长生. 区间矩阵系统低保守性鲁棒控制器的设计[J]. 控制理论与应用, 2000, 17(2): 291 - 295.
(WU Qingxian, WANG Yuan, JIANG Changsheng. Design of lower conservatism robust controller for interval matrix systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(2): 291 - 295.)

作者简介:

毛维杰 (1969—),男,浙江大学教授,1991年毕业于浙江大学,1996年获浙江大学工学博士学位,主要研究方向为鲁棒控制、时滞系统控制、解耦控制等理论与应用,E-mail: wjmao@iipc.zju.edu.cn;

刘征宇 (1979—),男,2001年毕业于浙江大学,2004年获浙江大学工学硕士学位,主要研究方向为复杂工业过程的建模与控制.