

基于重要抽样法和神经网络的模糊鲁棒性分析

吴淮宁, 李 勇, 蔡开元

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100083)

摘要: 将重要抽样(IS)法与神经网络(NN)用于不确定控制系统的模糊鲁棒性分析中. IS法被用于提高当模糊不可接受性能的概率很小时的抽样效率, 而 NN 被用于预测每次仿真试验中所需计算时间较长的性能指标值. 所建议方法降低了标准 Monte Carlo 仿真(MCS)方法在处理模糊鲁棒性分析中小概率事件以及性能指标计算时间较长所带来的过高计算成本. 最后, 仿真结果验证了方法的有效性.

关键词: 不确定控制系统; 鲁棒性分析; 模糊方法; 神经网络; 重要抽样; Monte Carlo 仿真

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Fuzzy robustness analysis based on importance sampling and neural network

WU Huai-ning, LI Yong, CAI Kai-yuan

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100083, China)

Abstract: This paper applies the importance sampling (IS) method and neural network (NN) to the fuzzy robustness analysis of uncertain control systems. The IS method is utilized to improve the sampling efficiency when the probability of fuzzy unacceptable performance is very small. The NN is used to predict the performance index requiring more computational time in each simulation experiment. The proposed approach can reduce the excessive computational cost generated from the standard Monte Carlo simulation (MCS) for dealing with the rare event case and the performance index requiring more computational time in the fuzzy robustness analysis. Finally, a numerical example is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: uncertain control systems; robustness analysis; fuzzy approach; neural network(NN); importance sampling; Monte Carlo simulation

1 引言(Introduction)

自 Stengel 等人^[1]用概率方法分析不确定控制系统的鲁棒性以来, 概率鲁棒性分析与综合理论得到了广泛关注^[2~7]. 其主要优点是可以降低基于最坏情形鲁棒性度量^[8]的保守性, 以及精确分析与综合相应鲁棒控制问题所带来的计算复杂性^[9]. 尽管如此, 概率方法仍存在一定的局限性.

控制系统的鲁棒性可以定义为在所有不确定参数作用下系统保持满意稳定性或性能的能力. 概率方法采用概率来度量鲁棒性定义中的“能力”. 然而, 鲁棒性定义中的“满意的稳定性或性能”是人们大脑中具有一定模糊性的概念, 现有的概率鲁棒性分析仅用“是”与“不是”二值逻辑来表示是否满意, 并不能反映这一模糊性. 另一方面, 虽然概率鲁棒性分析

中所采用的标准 Monte Carlo 仿真(MCS)方法简单而直接, 但在实际应用中会面临计算成本过高甚至不可行的问题, 这主要体现在: 一是小概率事件, 也即当性能(包括稳定性)不可接受概率很小时, 标准 MCS 方法所要求的仿真次数可能相当巨大; 二是每次仿真试验中性能指标的计算时间较长, 如处理高阶被控对象或二次型指标等.

为了能描述和处理鲁棒控制问题中的模糊现象, 文献[10]引入了一个新的模糊鲁棒性判据, 量化了控制系统鲁棒性定义中的模糊性; 而文献[11]则研究了性能界为模糊变量时的模糊鲁棒性问题. 然而, 文献[10]中基于 MCS 的模糊鲁棒性分析方法仍存在上述计算成本过高甚至不可行的问题. 本文将应用重要抽样(IS)法^[12]与神经网络(NN)^[13]相结合

来解决该问题.基本思想是采用 IS 法使出现模糊不可接受性能的不确定参数向量样本数量增加,从而提高抽样效率;而应用 NN 来预测每次仿真试验中计算费时的性能指标值.所建议方法可以显著降低计算成本.最后,本文通过一个简单例子来验证方法的有效性.

2 模糊鲁棒性分析 (Fuzzy robustness analysis)

令 $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_m]^T$ 为控制系统的一个随机参数向量,其在紧集 Q 中有界,也即 $\mathbf{q} \in Q$,且概率密度函数为 $f(\mathbf{q})$.令实标量可测函数 $J(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 为某一性能函数.在鲁棒控制理论中,经常要解决如下一个鲁棒性(包括稳定鲁棒性与性能鲁棒性)分析问题:

· 给定一个性能水平 γ_0 ,对于所有 $\mathbf{q} \in Q$,检验 $J(\mathbf{q}) < \gamma_0$ 或 $J(\mathbf{q}) \geq \gamma_0$ 是否满足?

在目前的概率鲁棒性分析中, $J(\mathbf{q}) < \gamma_0$ 表示性能可接受, $J(\mathbf{q}) \geq \gamma_0$ 表示性能不可接受.性能不可接受的概率 p_f 可写为

$$\begin{aligned} p_f &= \Pr(J(\mathbf{q}) \geq \gamma_0) = \\ 1 - p_r &= 1 - \Pr(J(\mathbf{q}) < \gamma_0) = \\ &\int_Q f(\mathbf{q})(1 - I_r(\mathbf{q}))d\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: p_r 为性能可接受的概率, $I_r(\mathbf{q})$ 为指示函数,满足

$$I_r(\mathbf{q}) = \begin{cases} 1, & J(\mathbf{q}) < \gamma_0, \\ 0, & J(\mathbf{q}) \geq \gamma_0. \end{cases} \quad (2)$$

由于参数向量 \mathbf{q} 与性能函数之间的关系比较复杂,故在概率鲁棒性分析中常采用 MCS 方法来近似计算 p_f 或 p_r .由式(2)可以看出,在概率方法中,系统从可接受性能到不可接受性能是以一种突变的形式发生,因而不能描述和处理系统鲁棒性定义中“满意稳定性或性能”的模糊性.为了量化该模糊性,相似于模糊可靠性中的模糊状态假设^[14],本文采用如下模糊可接受性能定义:

定义 1^[10] 给定标量 $\gamma_0, \phi \geq 0$ 与 $\varphi \geq 0$,令论域 U 为性能函数 $J(\mathbf{q})$ 的值域,则论域 U 中模糊可接受性能的集合可以定义为

$$\tilde{E}_r = \{J(\mathbf{q}), \mu_r(J(\mathbf{q})) \mid J(\mathbf{q}) \in U\}.$$

其中 $\mu_r(J(\mathbf{q}))$ 为 $J(\mathbf{q})$ 在 \tilde{E}_r 中的隶属度函数,如图 1 所示,可分段表示为

$$\mu_r(J(\mathbf{q})) = \begin{cases} 1, & J(\mathbf{q}) < \gamma, \\ \mu_r^m(J(\mathbf{q})), & \gamma \leq J(\mathbf{q}) < \gamma + \varphi, \\ 0, & J(\mathbf{q}) \geq \gamma + \varphi. \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\gamma \in [\gamma_0 - \phi, \gamma_0]$,且 $0 \leq \mu_r^m(J(\mathbf{q})) \leq 1$.

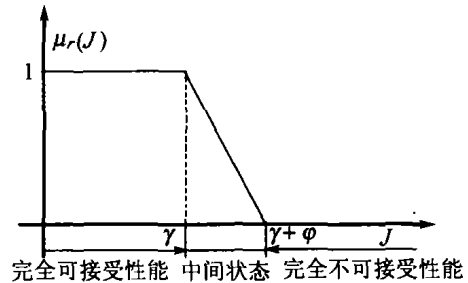


图 1 模糊可接受性能集合的隶属度函数表示
Fig. 1 Membership function of fuzzy acceptable performance set

注 1 式(3)中, $\mu_r^m(J(\mathbf{q}))$ 用来描述性能指标的模糊性.当 $\phi = 0$ 且 $\varphi = 0$ 时,式(3)则化为式(2),这说明概率鲁棒性分析方法可看成是模糊鲁棒性分析方法的一个特例,因而后面所建议的 IS 法与 NN 也同样适用于概率鲁棒性分析. $\mu_r^m(J(\mathbf{q}))$ 的形状是采用线性或正态型,还是采用其他形式的隶属函数,以及 ϕ 与 φ 的确定都需由设计人员根据经验、已积累的数据和其主观判断来确定.

为了度量系统保持模糊鲁棒性能的“能力”,本文采用如下模糊鲁棒度定义:

定义 2^[10] 在所有不确定参数的作用下,系统保持模糊可接受性能的概率称为模糊鲁棒度,也即

$$\tilde{R} = \int_{\mathbf{q} \in Q} \mu_r(J(\mathbf{q}))f(\mathbf{q})d\mathbf{q} = E\{\mu_r(J(\mathbf{q}))\}. \quad (4)$$

基于定义 2,可以得到系统模糊不可接受性能的概率 \tilde{F} 为

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= 1 - \tilde{R} = \\ &\int_{\mathbf{q} \in Q} [1 - \mu_r(J(\mathbf{q}))]f(\mathbf{q})d\mathbf{q} = \\ &E\{\mu_f(J(\mathbf{q}))\}. \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\mu_f(J(\mathbf{q})) = 1 - \mu_r(J(\mathbf{q}))$ 为模糊不可接受性能的隶属度函数.

同概率鲁棒性分析一样, \tilde{F} 可通过 MCS 方法来近似计算;亦即,根据 $f(\mathbf{q})$,随机产生 N_s 个独立同分布的样本值 $\mathbf{q}_i, i = 1, 2, \dots, N_s$,若样本数足够大,则有

$$\tilde{F} \approx \hat{\tilde{F}} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \mu_f(J(\mathbf{q}_i)). \quad (6)$$

给定参数 $\epsilon \in (0, 1), \delta \in (0, 1)$,由著名的 Hoeffding 不等式^[15]可知,如果

$$N_s \geq \frac{\ln(2/\delta)}{2\epsilon^2}, \quad (7)$$

则有

$$\Pr\{| \tilde{F} - \hat{F} | \leq \epsilon\} \geq 1 - \delta. \quad (8)$$

也就是说,要想使得经验概率 \hat{F} 以精度为 ϵ 、置信度为 $1 - \delta$ 逼近真实的概率 \tilde{F} , 则至少需要随机产生 $\frac{\ln(2/\delta)}{2\epsilon^2}$ 个独立同分布的不确定参数向量样本。

3 重要抽样法(Importance sampling method)

对于 \tilde{F} 值很小的控制系统来说,为了得到足够的使得系统处于中间状态或具有完全不可接受性能的不确定参数向量样本, MCS 方法要求的仿真次数可能相当巨大,这在计算上通常不可行。为表达方便起见,以后将使得系统处于中间状态或具有完全不可接受性能(见图 1 所示)的不确定参数向量样本简称为模糊不可接受样本。

为了减少仿真次数,目前已有多种减少方差的方法, IS 法便是其中之一^[12]。其基本思想是采用一个 IS 密度函数去代替原始的 $f(\mathbf{q})$, 使得模糊不可接受样本数量增加,从而提高抽样效率。

在式(5)中引入一个 IS 密度函数 $h(\mathbf{q})$, 可得

$$\tilde{F} = \int_Q g(\mathbf{q}) h(\mathbf{q}) d\mathbf{q}. \quad (9)$$

其中 $g(\mathbf{q}) = \mu_f(J(\mathbf{q})) \frac{f(\mathbf{q})}{h(\mathbf{q})}$ 。则估计式(9)中的积分的 MCS 算法是:根据 $h(\mathbf{q})$, 随机产生 N_s 个独立同分布的样本点 $\mathbf{q}_i, i = 1, 2, \dots, N_s$ 。若样本数足够大,则 \tilde{F} 的估计值可由下式给出:

$$\hat{F} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} g(\mathbf{q}_i). \quad (10)$$

\hat{F} 的方差为

$$\sigma_{h(\mathbf{q})}^2(\hat{F}) = \frac{1}{N_s} \left\{ \int_Q g(\mathbf{q})^2 h(\mathbf{q}) d\mathbf{q} - \tilde{F}^2 \right\}. \quad (11)$$

如果将 IS 密度函数选为

$$h(\mathbf{q}) = h_{\text{opt}}(\mathbf{q}) = \mu_f(J(\mathbf{q})) f(\mathbf{q}) / \tilde{F}, \quad (12)$$

则 \hat{F} 的方差等于零,与仿真的次数无关。由于 \tilde{F} 是个未知的待求量,所以想得到最优的 IS 密度函数是不可能的。

IS 密度函数的选择是 IS 仿真成功的关键。若 $h(\mathbf{q})$ 选择的合适,则只需很少的样本数便可得到 \tilde{F} 的一个可靠估计;否则, IS 过程的效率可能非常低。本文采用一种简单的参数估计法来选择 $h(\mathbf{q})$ 。首

先假定 $h(\mathbf{q})$ 为一个正态或对数正态分布密度函数,且其 m 个分量相互独立,则 IS 密度函数的选择可归结为估计正态或对数正态分布的未定参数问题。其步骤如下:

1) 根据 $f(\mathbf{q})$, 随机产生一组不确定参数向量样本 $\mathbf{q}_i (i = 1, 2, \dots, N_0)$, 并计算 $J(\mathbf{q}_i)$ 。然后,挑选出使得 $\mu_f(J(\mathbf{q}_i)) \neq 0$ 的模糊不可接受样本集,记为 $Q_0^f := \{\mathbf{q}_j^f, j = 1, 2, \dots, N_f\}$ 。

2) 利用下式估计 Q_0^f 中向量 \mathbf{q} 各个分量的均值及标准差:

$$\hat{\mu}_{f,i} = \frac{1}{N_f} \sum_{j=1}^{N_f} q_{i,j}^f, \quad (13)$$

$$\hat{\sigma}_{f,i} = \sqrt{\frac{1}{N_f - 1} \sum_{j=1}^{N_f} (q_{i,j}^f - \hat{\mu}_{f,i})^2}. \quad (14)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, m$ 。并将其作为正态 IS 密度函数的参数。若选取对数正态分布作为 IS 密度函数,则需经过如下变换来得到对数正态分布的参数估计,也即对数均值与对数标准差的估计:

$$\hat{\mu}'_{f,i} = \ln \frac{\hat{\mu}_{f,i}^2}{\sqrt{\hat{\mu}_{f,i}^2 + \hat{\sigma}_{f,i}^2}}, \quad \hat{\sigma}'_{f,i} = \sqrt{\ln \frac{\hat{\mu}_{f,i}^2 + \hat{\sigma}_{f,i}^2}{\hat{\mu}_{f,i}^2}}. \quad (15)$$

4 神经网络的应用(Application of neural network)

从式(6)或(10)可以看出,在估计 \tilde{F} 时,需要重复运行大量的仿真试验。显然,如果每次仿真试验中性能指标 $J(\mathbf{q})$ 的计算时间较长,则会使整个仿真过程的计算成本非常高,限制了仿真方法的实际应用。本节将应用神经网络^[13]来预测性能指标值。其主要优点是可以大大降低计算成本,这一思想已广泛应用于其他许多领域。

4.1 BP 学习算法(BP learning algorithm)

本文采用 BP 网络来预测性能指标值,网络的输入为不确定参数向量的 m 个分量 q_1, q_2, \dots, q_m , 而网络的输出为 $J(\mathbf{q})$ 的预测值,记为 $\hat{J}(\mathbf{q})$ 。设 BP 网络共有 L 个层(不包括输入层),第 l 层的节点数为 M_l ,用 $y_k^{(l)}$ 表示第 l 层节点 k 的输出,则 $y_k^{(l)}$ 可由如下两式确定:

$$s_k^{(l)} = \sum_{j=0}^{M_{l-1}} w_{kj}^{(l)} \cdot y_j^{(l-1)} = \mathbf{w}_k^{(l)} \cdot \mathbf{y}^{(l-1)}, \quad (16)$$

$$y_k^{(l)} = \varphi^{(l)}(s_k^{(l)}). \quad (17)$$

其中: $s_k^{(l)}$ 为第 l 层神经元 k 的状态,且 $w_{k0}^{(l)} =$

$-\theta_k^{(l)}, y_0^{(l-1)} = 1$. 这里 $\theta_k^{(l)}$ 为第 l 层神经元 k 的阈值, $w_{kj}^{(l)}$ 为第 $l-1$ 层神经元 j 到第 l 层神经元 k 的连接权值, $w_k^{(l)}$ 为由网络权值组成的系数行向量, $y^{(l-1)}$ 为第 $l-1$ 层的输出列向量, $\varphi^{(l)}(\cdot)$ 为第 l 层神经元的激活函数. 在本文中, 对于隐含层 (第 1 至 $L-1$ 层), 其神经元采用如下 Sigmoid 型激活函数:

$$\varphi(v) = \tanh\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{1 - e^{-v}}{1 + e^{-v}}. \quad (18)$$

而对于输出层 (第 L 层), 其神经元的激活函数取为限幅线性函数. 显然输出层的节点数为 1, 也即 $M_L = 1$, 且 $\hat{J}(\mathbf{q}) = y_1^{(L)}$. 将输入层作为第 0 层处理, 则有 $M_0 = m$, 且 $y_k^{(0)} = q_k$.

记 $S_T := \{(\mathbf{q}_i, J(\mathbf{q}_i)), i = 1, 2, \dots, N_T\}$ 为训练样本集. 给定 S_T 后, BP 网络的权值将被调整, 使如下的误差目标函数达到最小:

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} [J(\mathbf{q}_i) - \hat{J}(\mathbf{q}_i)]^2. \quad (19)$$

其中 \mathbf{w} 为 BP 网络中所有权值组成的权向量. 按梯度法调整网络权值向量 \mathbf{w} , 采用批处理方式进行训练, 改进型 BP 算法的权值向量 \mathbf{w} 的迭代公式为

$$\mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t) + \eta \cdot \mathbf{g}(t) + \alpha \cdot \Delta \mathbf{w}(t). \quad (20)$$

其中: η 为学习步长, $\mathbf{g}(t) = -\frac{\partial E(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}(t)}$ 为 $E(\mathbf{w})$ 的负梯度, $\Delta \mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(t-1)$, α 为动量因子.

4.2 神经网络的训练 (Training of NN)

BP 网络的预测能力在很大程度上取决于网络结构、动量因子以及学习步长的选择. 然而关于这些参量的选择却没有理论性的指导, 只能通过大量的仿真实验来选择其中较好的. 本文采用 3 层 BP 网络 (只有一个隐层), 并通过仿真实验来决定 BP 网络的隐层节点数, 可以遵循这样一个经验^[16]: 在训练开始阶段, 应逐渐增加隐层节点数, 当训练的均方根误差

$$e_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} [J(\mathbf{q}_i) - \hat{J}(\mathbf{q}_i)]^2} \quad (21)$$

达到期望的收敛精度时再逐渐减少节点数, 以便得到一个 e_{RMS} 最小的且结构最简单的 BP 网络.

在 BP 算法中, 学习步长 η 和动量因子 α 是影响网络训练效果的两个重要参数, 网络的训练对这些参数的选择很敏感. 如果学习步长设定得太大, 算法可能会振荡和不稳定; 过小的学习步长会使得训练

过程收敛太慢, 而动量因子的合理选择可以加快学习过程. 本文采用自适应学习步长算法, 但动量因子的选择只有通过仿真试验来确定.

另外, 为了使得训练后的 BP 网络有很好的预测能力, 训练样本应能够覆盖整个不确定参数空间. 因此, 合理选择样本集 S_T 也是网络训练的一个重要因素. 可以采用如下两种方法来选择:

1) 根据 $f(\mathbf{q})$, 随机产生 N_T 个不确定参数向量样本 \mathbf{q}_i , 并计算 $J(\mathbf{q}_i)$, 得到 S_T ;

2) 根据 IS 密度函数 $h(\mathbf{q})$, 随机产生 N_T 个样本 \mathbf{q}_i , 并计算 $J(\mathbf{q}_i)$, 得到 S_T .

仿真试验表明: 利用 $h(\mathbf{q})$ 产生 S_T 所得到的结果会优于由 $f(\mathbf{q})$ 产生 S_T 所得到的结果.

4.3 基于 IS 法与 NN 的模糊鲁棒性分析 (Fuzzy robustness analysis based on IS and NN)

在完成 BP 网络的训练之后, 就可结合 IS 法对系统进行模糊鲁棒性分析, 其步骤如下:

1) 根据所选择的 $h(\mathbf{q})$ 来随机产生一组不确定参数向量样本 $\mathbf{q}_i, i = 1, 2, \dots, N_s$, 并利用训练好的 BP 网络来估计 $J(\mathbf{q}_i)$, 得到 $\hat{J}(\mathbf{q}_i), i = 1, 2, \dots, N_s$.

2) 利用下式来估计 \tilde{F} :

$$\hat{\tilde{F}} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \mu_f(\hat{J}(\mathbf{q}_i)) \frac{f(\mathbf{q}_i)}{h(\mathbf{q}_i)}. \quad (22)$$

5 仿真示例 (Simulation example)

考虑两质量弹簧系统, 其状态空间方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1(\mathbf{q})u(t) + \mathbf{B}_2(\mathbf{q})w(t).$$

其中: $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2]^T$ 为状态, 且 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, $w(t)$ 为外部干扰, $\mathbf{q} = [m_1 \ m_2 \ k]^T$ 为不确定参数向量, 且

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_1 & k/m_1 & 0 & 0 \\ k/m_2 & -k/m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m_2 \end{bmatrix}.$$

其中: x_1 与 x_2 分别为两辆小车的位置, m_1 与 m_2 分别为两辆小车质量, k 为弹簧常数. 假定 k, m_1 与 m_2 均为服从对数正态分布的随机变量, 且

$$k \sim \ln(0.25, 0.25^2), \quad m_1, m_2 \sim \ln(0, 0.25^2). \quad (23)$$

考虑状态反馈控制律:

$$u = Kx = [-0.7901 \quad 0.4271 \quad -1.5565 \quad -0.196]x \quad (24)$$

与二次型指标

$$J(q) = \int_0^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt. \quad (25)$$

其中: $Q = \text{diag}\{0, 0.5, 0, 0\}$, $R = 0.5$, 且 $t_f = 50\text{s}$. 选择可接受二次性能的隶属度函数如图 1 所示, 其中 $\mu_r^m(J(q))$ 为线性函数, 且 $\gamma_0 = 3, \phi = 0$ 与 $\varphi = 0.1$. 目标是估计在单位脉冲干扰作用下闭环系统模糊不可接受性能的概率 \bar{F} .

根据 Hoeffding 不等式, 要使精度 $\epsilon = 0.001$, 置信度 $1 - \delta = 0.99$, 则标准 MCS 方法至少需要 $N_s = 2.65 \times 10^6$ 次仿真, 且每次仿真都要计算式(25)中的数值积分, 这会使计算成本过高.

现在, 就利用所建议的 IS 法和 NN 来估计 \bar{F} . 首先选取对数正态分布作为 IS 密度函数, 并利用标准 MCS 方法, 预先抽取 $N_0 = 1000$ 个样本来估计 IS 密度函数 $h(q)$ 的参数 $\mu'_{f,i}$ 与 $\sigma'_{f,i}$. 然后选择 NN 的结构, 并根据式(23)随机产生 $N_T = 1000$ 个不确定参数向量样本, 同时计算式(25)来得到训练样本集 S_T . 通过仿真发现, 具有 14 个隐层节点的 3 层 BP 网络同时具有很好的训练效果和预测性能, 故选其

作为预测网络.

在得到 $h(q)$ 与训练好的 NN 之后, 就可以根据 4.3 小节的步骤来计算 \bar{F} 的估计值 $\hat{\bar{F}}$. 为了验证方法的有效性, 这里将没有采用 NN 的 IS 法在经过 $N_s = 265000$ 次仿真后所得的结果 $\hat{\bar{F}} = 3.330 \times 10^{-3}$ 作为 \bar{F} 的“精确值”. 另外, 为了与式(23)产生 S_T 所得结果进行比较, 本节还根据 $h(q)$ 产生 S_T , 并重复上面步骤重新确定 NN 的结构及计算 $\hat{\bar{F}}$. 不同方法所得到的 $\hat{\bar{F}}$ 的计算精度和计算时间分别由表 1 与 2 给出, 其中“NN + MCS 法”表示不使用 IS 法而仅用 NN 来预测 MCS 过程中要计算的绩效指标值. 而且, 针对每种方法重复运行计算 $\hat{\bar{F}}$ 的过程 30 次, 所得到 $\hat{\bar{F}}$ 的子样方差 S^{*2} 由表 3 给出, 其中 $S^{*2} = \frac{1}{29} \sum_{i=1}^{30} (\hat{\bar{F}} - 3.330 \times 10^{-3})^2$.

从表 1 ~ 3 可以看出, 虽然 NN + MCS 法所需 CPU 时间要少于 NN + IS 法, 但所得的 $\hat{\bar{F}}$ 的子样方差较大, 而 NN + IS 法不仅可以大大降低计算成本 (与单独的 IS 法或标准 MCS 法相比), 而且可以得到 \bar{F} 的一个满意的估计. 而且, 从表 3 可以看出, 由 $h(q)$ 产生 S_T 与由式(23)产生 S_T 所得到的 NN 相比, 可以显著降低计算 $\hat{\bar{F}}$ 时的子样方差, 这说明利用 $h(q)$ 产生 S_T 来训练 NN 效果更好.

表 1 不同方法所得到的估计值 $\hat{\bar{F}}$

Table 1 Resulting estimated value $\hat{\bar{F}}$ from different methods

仿真次数 N_s	IS 法 (10^{-3})	标准 MCS 法(10^{-3})	NN + MCS 法(10^{-3})	NN + IS 法(10^{-3})	
				由式(23)产生 S_T	由 $h(q)$ 产生 S_T
100	3.944	0	0	3.747	2.986
1000	3.171	7.756	4.493	3.017	3.109
6650	3.124	3.517	4.210	3.447	3.116
26500	3.440	3.858	3.197	3.208	3.465
265000	3.330	3.747	3.626	3.374	3.335

表 2 不同方法所需的 CPU 时间(s)

Table 2 Required CPU time for different methods (s)

计算方法	IS 法	标准 MCS 法	NN + MCS 法	NN + IS 法
估计 IS 密度函数	148	-	-	148
选择训练样本集	-	-	144	144
训练	-	-	35	35
产生 265000 个样本	-	-	50	50
预测	-	-	16	16
总计	36520 ^a	36668 ^a	245	393

注 a 经过 265000 次仿真

表3 不同方法所得到的子样方差 S^{*2}
Table 3 Resulting sample variance S^{*2} for different methods

仿真次数 N_s	IS 法	标准 MCS	NN + MCS 法	NN + IS 法	
				由式(23)产生 S_T	由 $h(q)$ 产生 S_T
100	3.6567×10^{-7}	1.4707×10^{-5}	4.5319×10^{-5}	2.2629×10^{-5}	6.4366×10^{-7}
1000	9.5048×10^{-8}	3.3132×10^{-6}	3.1335×10^{-6}	1.3997×10^{-6}	7.1784×10^{-8}
6650	2.9618×10^{-8}	6.7240×10^{-7}	4.8303×10^{-7}	3.7532×10^{-7}	3.1516×10^{-8}
26500	6.8063×10^{-9}	2.8302×10^{-7}	9.3466×10^{-8}	6.3164×10^{-8}	7.9385×10^{-9}
265000	- ^b	- ^b	4.6225×10^{-8}	1.2866×10^{-8}	4.2511×10^{-9}

注 b 由于计算 S^{*2} 的代价太大,故略去其仿真试验。

6 结论(Conclusion)

本文将 IS 法与 NN 用于控制系统的模糊鲁棒性分析中,IS 法被用来提高在模糊不可接受性能的概率很小时的抽样效率,而训练好的 NN 被用来预测每次仿真试验中计算时间较长的性能指标值。为解决控制系统模糊鲁棒性分析中所遇到的计算成本过高问题提供了一条有效途径。仿真结果也表明:IS 法与 NN 的结合不仅可以大大降低计算成本,而且可以得到模糊不可接受性能概率的一个满意估计。

参考文献(References):

- [1] STENGEL R F, RAY L R. Stochastic robustness of linear time-invariant control systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(1): 82 - 87.
- [2] STENGEL R F, RAY L R, MARRISON C I. Probabilistic evaluation of control system robustness [J]. *Int J of Systems and Sciences*, 1995, 26(7): 1363 - 1382.
- [3] BARMISH B R, LAGO A C M. The uniform distribution: A rigorous justification for its use in robustness analysis [J]. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1997, 10(3): 203 - 222.
- [4] KHARGONEKAR P P, TIKKU A. Randomized algorithms for robust control analysis and synthesis have polynomial complexity [C] // *Proc of IEEE Conf on Decision and Control*. NJ: IEEE Press, 1996: 3470 - 3475.
- [5] TEMPO R, BAI E W, DABBENE F. Probabilistic robustness analysis: Explicit bounds for the minimum number of samplings [J]. *Systems & Control Letters*, 1997, 30(5): 237 - 242.
- [6] VIDYASAGAR M. Randomized algorithms for robust controller synthesis using statistical learning theory [J]. *Automatica*, 2001, 37(10): 1515 - 1528.
- [7] CALAFIORE G, DABBENE F, TEMPO R. Randomized algorithms for probabilistic robustness with real and complex structured uncertainty [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(12): 2218 - 2235.
- [8] GREEN M, LIMEBEER D J N. *Linear Robust Control* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995.
- [9] BLONDEL V D, TSITSIKLIS J N. A survey of computational complexity results in systems and control [J]. *Automatica*, 2000, 36(9): 1249 - 1274.
- [10] 吴淮宁,李勇,蔡开元. 基于遗传算法具有模糊鲁棒性的控制器综合[C]//中国自动化学会第18届青年学术年会论文集. 合肥:中国科学技术大学出版社,2003:45 - 51.
(WU Huaining, LI Yong, CAI Kaiyuan. Controller synthesis with fuzzy robustness using genetic algorithms [C] // *Proc of the 18th Youth Academic Conf of Chinese Association of Automation*. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2003: 45 - 51.)
- [11] WU H N, CAI K Y. Fuzzy robustness analysis and design of uncertain control systems with fuzzy performance bound [C] // *Proc of Int Conf on Fuzzy Information Processing Theories and Applications*. Beijing: Tsinghua University Press/Springer, 2003: 325 - 330.
- [12] RUBINSTEIN R Y. *Simulation and the Monte-Carlo Method* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1981.
- [13] 阎平凡,张长水. 人工神经网络与模拟进化计算[M]. 北京:清华大学出版社,2001.
(YAN Pingfan, ZHANG Changshui. *Artificial Neural Networks and Simulated Evolutionary Computation* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2001.)
- [14] CAI K Y. *Introduction to Fuzzy Reliability* [M]. Boston/Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [15] Hoeffding W. Probability inequalities for sums of bounded random variables [J]. *J of American Statistics Association*, 1963, 58(301): 13 - 30.
- [16] HIROSE Y, YAMASHITA K, HILTYA S. Back-propagation algorithm which varies the number of hidden units [J]. *Neural Networks*, 1991, 4(1): 61 - 66.

作者简介:

吴淮宁 (1972—),男,北京航空航天大学自动化学院副教授,1992年于山东建材学院自动化系获学士学位,同年进入西安交通大学信息与控制工程系自动控制专业学习,1997年6月获博士学位,其后至1999年7月在北京理工大学从事博士后研究工作,主要研究领域为鲁棒控制与滤波、可靠控制、模糊控制等, E-mail: huainingwu@163.com;

李勇 (1979—),男,硕士研究生,研究方向为鲁棒控制;

蔡开元 (1965—),男,北京航空航天大学自动化学院教授,博士生导师,教育部“长江学者奖励计划”特聘教授(第二批,导航、制导与控制学科),1980年考入北京航空航天大学本科,分别于1984年、1987年、1991年在北航获得学士、硕士、博士学位,主要从事计算机系统可靠性、智能控制、模糊技术等方面的研究, E-mail: kycai@buaa.edu.cn.