

文章编号: 1000-8152(2005)03-0369-08

输出概率密度函数的最优跟踪控制:均方根 B-样条模型

周靖林¹, 王宏^{1,2}

(1. 中国科学院自动化研究所, 北京 100080; 2. 曼彻斯特大学控制中心, 英国曼彻斯特)

摘要: 在分析均方根 B 样条模型在实现输出概率密度函数最优跟踪控制时存在的问题的基础上, 提出了将最优跟踪控制转化为非线性状态约束下的跟踪误差最优调节器, 然后依据非线性状态约束和系统模型的特点分别设计了鲁棒变结构控制器及非线性观测器, 并利用误差补偿控制来保证非线性观测器误差的有界性. 仿真结果表明了提出的转换控制策略的有效性.

关键词: 动态随机系统; 概率密度函数; B 样条模型; 状态约束; 变结构控制; 误差补偿控制

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Optimal tracking control of the output probability density functions: square root B-spline model

ZHOU Jing-lin¹, WANG Hong^{1,2}

(1. Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;

2. Control System Centre, The University of Manchester, Manchester M60 0QD, U. K.)

Abstract: Based upon the analysis on the square root B-spline approximation used in the probability density function (PDF) shape control, this paper proposes a new strategy which transfers such an optimal tracking control into an optimal control design issue under a nonlinear state constraint. A robust variable structure controller (VSC) and a nonlinear observer are then designed according to such a nonlinear state constraint and the characteristic of the system model. A restrictive observation error has been ensured by using an error compensation mechanism. Simulation examples have indicated the effectiveness of the proposed algorithms.

Key words: dynamic stochastic systems; probability density functions; B-spline expansion; nonlinear state constraints; variable structure control; error compensation control

1 引言 (Introduction)

近几十年来, 随机系统控制被看作是控制理论与应用的一个重要分支. 这主要是因为许多实际控制工程均含有随机输入, 如: 传感器噪音、随机扰动或参数的随机变化. 对随机系统控制研究已经取得了大量理论研究和实际工业应用成果, 比较典型的有最小方差控制、自校正控制、随机线性二次型控制等^[1~6]. 这些已有的方法针对系统输出均值和方差进行控制, 且大都假设系统干扰量服从高斯分布, 然而, 这一假设并不完全符合一些实际应用过程, 故把这些方法推广到任意有界变量的随机分布系统控制非常困难.

从 1998 年开始, 王宏博士提出直接设计控制器以使系统输出概率密度函数形状跟踪给定的概率密

度函数形状的方法, 并系统地建立了一系列的建模与控制算法^[7~12]. 由于控制的目的在于整个输出概率密度函数形状, 因此, 这类控制在某种意义上就包括了随机系统中关于输出均值和方差的控制. 在输出概率密度函数形状的控制方法中, 系统模型分为动态部分和概率密度函数输出部分. 并考虑到实际的概率密度函数有界且连续的特点, 这一方法以 B 样条基函数逼近概率密度函数为出发点. 基函数均事先定义, 故基函数近似的系数就是代表了输出概率密度函数形状, 同时得到了基函数与系统的输入之间的解耦关系, 控制系统输出概率密度函数形状的任务转化为控制基函数近似的系数.

2 模型近似 (Model approximation)

记 $\eta(t) \in [a, b]$ 为一致有界随机过程并假定

收稿日期: 2003-09-08; 收修改稿日期: 2004-08-04.

基金项目: 国家自然科学基金海外青年学者合作研究基金资助项目(60128303); 国家自然科学基金资助项目(60274020); 英国 Leverhulme Trust 基金资助项目(F/D 100030).

其为随机系统在 t 时刻的输出,并记 $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 为控制 $\eta(t)$ 分布的控制输入向量.在任意时刻, $\eta(t)$ 的分布可以用它的概率密度函数 $\gamma(y, \mathbf{u}(t))$ 来表述:

$$P(a \leq \eta(t) < \xi | \mathbf{u}(t)) = \int_a^\xi \gamma(y, \mathbf{u}(t)) dy, \quad (1)$$

其中 $P(a \leq \eta(t) < \xi | \mathbf{u}(t))$ 表示系统在 $\mathbf{u}(t)$ 作用下输出 $\eta(t)$ 落在区间 $[a, \xi)$ 内的概率,即 $\eta(t)$ 的概率密度函数 $\gamma(y, \mathbf{u}(t))$ 的形状由 $\mathbf{u}(t)$ 控制.假定区间 $[a, b]$ 已知,输出概率密度函数 $\gamma(y, \mathbf{u}(t))$ 连续且有界,由 B 样条逼近原理^[13]可知,可以用 B 样条来逼近概率密度函数 $\gamma(y, \mathbf{u}(t))$ 的均方根.假定已经取定了 n 个 B 样条,对应的权值为 $\omega_i, (i = 1, 2, \dots, n)$,则这种逼近在无逼近误差的条件下为

$$\sqrt{\gamma(y, \mathbf{u}(t))} = \sum_{i=1}^n \omega_i B_i(y). \quad (2)$$

由于概率密度函数需要满足如下自然隐含条件

$$\int_a^b \gamma(y, \mathbf{u}(t)) dy = 1, \quad (3)$$

这就表明 n 个权值只有 $n - 1$ 个是独立的.式(2)中的 B 样条通常选取具有递推形式的多项式函数^[13],记为 $B_{i,l}(y), (i = -l + 1, \dots, m), l$ 表示 B 样条函数的阶次, m 为区间 $[a, b]$ 内有效节点个数.

$$B_{i,l}(y) = \begin{cases} 1, & y_i < y < y_{i+1}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (4)$$

$$B_{i,l}(y) = \frac{y - y_i}{y_{i+l-1} - y_i} B_{i,l-1}(y) + \frac{y_{i+1} - y}{y_{i+1} - y_{i+1}} B_{i+1,l-1}(y). \quad (5)$$

式中: $l > 1, y_i (i = -l + 1, \dots, m + l)$ 为节点,且有 $\dots < a = y_0 < \dots < y_m = b < \dots$.在不引起混淆的情况下, B 样条的阶次 l 通常省略不写.

假定权值的动态响应可以表示为连续线性定常系统,其实此模型可通过扫描算法辨识出来.为方便,记 $\mathbf{c}(y) = [B_1(y) \ B_2(y) \ \dots \ B_{n-1}(y)]$, $\mathbf{x} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_{n-1}]^T$.则系统模型可以表示为^[12]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \sqrt{\gamma(y, \mathbf{u}(t))} = \mathbf{c}(y)\mathbf{x} + B_n(y)\omega_n. \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times 1}$.第 1 个方程表示了控制量和独立权系数 \mathbf{x} 的关系,第 2 个方程为输出概率密度函数的无误差逼近.式(6)中的 \mathbf{u} 实际上是经过降阶后的控制向量,在不引起混淆的情况下,仍然采用这个记号.由

隐含条件(3)及上式可知 B 样条函数的权值应满足

$$\mathbf{x}^T \Sigma_0 \mathbf{x} + 2 \Sigma_1 \mathbf{x} \omega_n + \Sigma_2 \omega_n^2 = 1. \quad (7)$$

其中: $\Sigma_0 = \int_a^b \mathbf{c}^T(y) \mathbf{c}(y) dy, \Sigma_1 = \int_a^b \mathbf{c}^T(y) B_n(y) dy, \Sigma_2 = \int_a^b B_n^2(y) dy$ ^[12].这样的动态系统可以用图 1 表示.其中,系统的输出为系统输出概率密度函数,输入为常规工程意义下的输入变量.

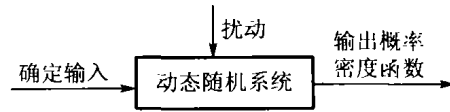


图 1 随机系统模型
Fig. 1 Considered stochastic system

以上即是 1998 年王宏博士提出的概率密度函数控制——用 B 样条来逼近概率密度函数的均方根,这样的新思想在文献[12]中有全面的描述.为实现跟踪,提出了很多方法.但这些方法大都是针对瞬时性能指标,得到的最优解也是瞬时的,故很容易陷入局部最优解中.为得到全局最优解,在线性 B 样条模型中,文献[12]中将跟踪性能指标优化问题转化为最优调节器问题,可得到不含任何约束的控制.然而概率密度函数的非负性及自然约束式(3),故实际控制有约束,因此得到的最优控制不一定有意义.这些约束条件限制了最优控制器设计.

为了保证输出概率密度函数非负,提出了新的 B 样条,即方程式(4)中的均方根 B 样条.均方根 B 样条的最大优点在于保证了概率密度函数的非负性,但是它将原来输出概率密度函数隐含条件(3)得到的线性约束变成了一个非线性约束^[12]:所有权值为实数.否则就没有意义.这个非线性约束在欧氏空间表现为一个超球体:

$$\|\mathbf{x}_\Sigma\| \leq 1, \quad (8)$$

式中 $\|\mathbf{x}\|_\Sigma = \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}$,表示 \mathbf{x} 的 Σ 范数,且 $\Sigma = \Sigma_0 - \Sigma_1^T \Sigma_1 / \Sigma_2$.

3 最优跟踪控制(Optimal tracking control)

对于已经建模的系统,常常期望它的输出概率密度函数跟踪一个预先给定的函数.为实现完全跟踪,给定如下的二次型性能指标:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_a^b (\sqrt{\gamma(y, \mathbf{u}(t))} - \sqrt{g(y)})^2 dy + \zeta^T R \zeta dt. \quad (9)$$

式中: $R = R^T > 0; B\zeta = \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{x}_g; \sqrt{g(y)} = \mathbf{c}(y)\mathbf{x}_g + B_n(y)\omega_{ng}$ 是期望概率密度函数的均方

根,其中 $x_g = [\omega_{1g}, \omega_{2g}, \dots, \omega_{(n-1)g}]^T$, ω_{ig} ($i = 1, 2, \dots, n$) 为对应的期望权值. 目的是寻求控制 u 使得指标(9)最小化. 由极小值原理不难得到下列的哈密顿方程:

$$H = 1 - \int_a^b \sqrt{\gamma(y, u(t))} \sqrt{g(y)} dy + \frac{1}{2} \zeta^T R \zeta + \lambda^T (Ax + Bu) \quad (10)$$

和正则方程

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ \dot{\lambda} = \int_a^b \frac{\partial \sqrt{\gamma(y, u(t))}}{\partial x} \sqrt{g(y)} dy - A^T \lambda, \end{cases} \quad (11)$$

并假定变量 ζ 不受约束, 可得

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta} = R \zeta + B^T \lambda = 0. \quad (12)$$

进一步得到如下微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T \lambda - Ax_g, \\ \dot{\lambda} = \int_a^b \frac{\partial \sqrt{\gamma(y, u(t))}}{\partial x} \sqrt{g(y)} dy - A^T \lambda \end{cases} \quad (13)$$

和边界及横截条件

$$x(t_0) = x_0, \lambda(\infty) = 0. \quad (14)$$

然而这组微分方程不是线性的, 常规的方法无法得到一个解, 在最优控制算法中提出用迭代的方法近似逼近真实解, 但迭代法的收敛解对于此非线性微分方程组是否可以得到还有待探讨. 且这个性能指标需满足式(8), 变量 ζ 不受约束的假设一般不成立. 故用迭代法即使得到一个解也不一定有意义.

给定性能指标是为了实现完全跟踪, 由式(7)可知, ω_n 的跟踪可以通过 x 来体现, 当 x 实现了跟踪, 它也实现了跟踪. 因此在构造算法只需要 x 即可. 故用如下性能指标替代性能指标(9):

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_a^b (c(y)e)^2 dy + \zeta^T R \zeta du. \quad (15)$$

式中 $e = x - x_g$. 即

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^T \Sigma_0 e + \zeta^T R \zeta dt, \quad (16)$$

并将动态系统转化为误差动态模型得

$$\dot{e} = Ae + B\zeta. \quad (17)$$

最优状态跟踪问题(9)转化为最优调节器问题(16), (17). 假定系统的状态直接可测且矩阵 B 可逆, 则不难得到如下的最优控制律:

$$u^* = -B^{-1}R^{-1}B^TK(x - x_g) - B^{-1}Ax_g. \quad (18)$$

式中矩阵 K 是 Riccati 方程

$$-KA - A^TK + KBR^{-1}B^TK - \Sigma_0 = 0$$

的解. 需要指出的是, 替代性能指标只是用来构造控制算法, 并不具有实际意义, 但当它达到最小化值时原性能指标也最小化, 故所得的最优控制相对于原性能指标只是一个次优控制, 显然, 这样的次优控制算法不唯一.

然而上述的替代并不等价, 因为性能指标(9)还有隐含条件(8), 所以需要另设计一个控制器使得替代的最优控制与原最优控制有相同的可行区, 也就是满足式(8). 换句话说, 替代的最优控制器是一个有二次型不等式(8)状态约束的最优调节器. 对于常规线性最优控制的线性约束^[14, 15]已经有多种解决方案, 但二次型非线性约束未见有大量文献论述.

约束条件(8)实质上是一个超球体. 由滑模变结构控制理论^[16]可知, 在理想情况下, 系统的状态到达切换面后, 不再脱离切换面, 并沿切换面滑动; 实际中系统的状态最终是在切换面的一个小邻域内抖动. 于是可以这样设想: 如果将这个超球体的球面作为切换面, 在这个切换面的内部, 使用式(18)的最优控制, 而在切换面的外部, 使用强迫控制使得所有的状态重新返回到球体, 则替代的最优控制跟原最优控制有相同的可行域, 保证了系统的要求. 这利用了变结构控制的良好约束能力. 显然, 给定的初始条件应该满足约束条件, 所以当状态到达切换面时就会强制其回到球内. 由于实际最终滑模状态是在切换面的一个小邻域内进行, 为保证条件, 完全利用式(8)的球面不可取, 而是在其内部的一个球面上进行变结构控制, 即

$$\|x\|_\Sigma \leq \theta, 0 < \theta < 1. \quad (19)$$

θ 的选取依据原则是 $\theta > \|x_g\|_\Sigma$; 若 $\|x_g\|_\Sigma$ 非常接近于 1, 则采用动态方式, 即按一定的速度增加到 1, 如 $\theta = 1 - \hat{\theta} \exp(-(t - t_0))$, $\hat{\theta} > 0, t \geq t_0$.

4 变结构控制器的设计(VSC design)

为尽可能地保持替代的最优控制的特性, 采用全滑模控制思想^[17]——保持上文得到的线性最优策略, 仅在其基础上增加一项符号函数 $\text{sgn}(\cdot)$, 即

$$u = -B^{-1}K(x - x_g) - B^{-1}Ax_g - qB^{-1}\Sigma x \text{sgn}(\theta - x^T \Sigma x). \quad (20)$$

控制思想是限制约束条件的变化速率, 故在符号项中有反映其速率的 Σx 项. 若假定状态可测, 则只需要确定 q . 应用前文的设想, q 可以这样得到: 当 $s = \theta - x^T \Sigma x \geq 0$ 时, $q = 0$; $s < 0$ 时, $q = f(x)$; 具体表达式见下文.

定理 1 对于式(6)的动态系统, 当采用式(20)

的控制律时,则系统的状态不会超出式(8)的球体,也不会始终停留在球面上即系统的状态将渐近稳定于给定状态.

证 第一步,假定状态不受约束,使用变结构控制,但 $q \equiv f(\mathbf{x})$. 假定 $\mathbf{x} \neq 0$ (这个假设是合理的,这是因为,当 $\mathbf{x} = 0$ 时,使用的控制策略是式(18)确定的最优控制策略),则不论球内还是球外的状态均会到达球面并最终沿球面运动. 由

$$\begin{aligned} \dot{s} &= s(-2\mathbf{x}^T \Sigma \dot{\mathbf{x}}) = \\ &= -2\mathbf{x}^T \Sigma (A - K)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_g) s + 2q\mathbf{x}^T \Sigma \Sigma \mathbf{x} |s| \end{aligned} \quad (21)$$

知,若取

$$q = f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \Sigma (A - K)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_g)}{(\mathbf{x}^T \Sigma \Sigma \mathbf{x}) \operatorname{sgn}(s)} - \beta \|\mathbf{x}\|, \quad (22)$$

式中 $\beta > 0$. 则显然有 $\dot{s} < 0$. 根据滑模变结构控制理论^[16], 不难得出结论成立;

第二步,采用式(20)的控制律,状态最多到达由式(19)确定的切换面外的一个邻域. 由切换面和约束条件的关系知,给定的初始条件应该满足约束条件但不一定在切换面内. 假定在某一时刻,系统的状态在切换面外,由第一步的证明可知,控制律将会强迫其返回切换面;

第三步,定义如下的分段李雅普诺夫能量函数

$$\begin{cases} V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} s^2, & s < 0, \\ V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_g)^T P (\mathbf{x} - \mathbf{x}_g), & s \geq 0. \end{cases} \quad (23)$$

其中矩阵 P 为方程 $(A - BR^{-1}B^TK)^T P + P(A - BR^{-1}B^TK) = -I$ 的解且 $P = P^T > 0$. 当 $s < 0$ 时显然有 $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$; 当 $s > 0$ 时,由最优控制理论可知,矩阵 $A - BR^{-1}B^TK$ 为 Hurwitz 型矩阵,故这样的 P 矩阵有唯一解. 从而也有 $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$, 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_g$ 时取等号. 而当 $s = 0$ 时,由约束条件不难得出系统的状态有界,所以系统稳定. 由能量函数知,系统的状态轨迹不会稳定于切换面,故其只能稳定于期望点. 证毕.

5 观测器设计及控制器重构 (Observer design and controller reconstruction)

上一节假定状态可测,然而实际中,这个假设并不成立. 为了获得状态变量,对于这样的模型,通常有两种方法来获得状态,即状态观测器和参数估计,利用参数估计方法在文献[12]中有详细论述. 在这

里采用状态观测器方法.

假定系统可观测,则可以设计如下的非线性观测器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + Bu + h\epsilon(t), \\ \epsilon(t) = \int_a^b (\sqrt{\gamma(y, u(t))} - \sqrt{\hat{\gamma}(y, u(t))})^2 dy, \\ \sqrt{\hat{\gamma}(y, u(t))} = c(y)\hat{\mathbf{x}}(t) + B_n(y)\hat{\omega}_n. \end{cases} \quad (24)$$

式中: $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{\omega}_1 \ \hat{\omega}_2 \ \cdots \ \hat{\omega}_{n-1}]^T$ 是观测器的状态变量, $h \in \mathbb{R}^{(n-1) \times 1}$ 是观测器的增益矩阵. 记 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, 由于

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma(y, u(t))} - \sqrt{\hat{\gamma}(y, u(t))} = \\ c(y)\bar{\mathbf{x}} + B_n(y)(\Sigma_1 \bar{\mathbf{x}} / (2\Sigma_2) \mp \Delta), \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\Delta = (\sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|_\Sigma} - \sqrt{1 - \|\hat{\mathbf{x}}\|_\Sigma}) / \Sigma_2,$$

所以 $\|\Delta\| \leq 2/\Sigma_2$, 故不难得出如下的观测误差动态方程:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = A\bar{\mathbf{x}} + h\bar{\mathbf{x}}^T \Sigma_3 \bar{\mathbf{x}} \mp 2h\Delta \Sigma_4 \bar{\mathbf{x}} + h\Sigma_2 \Delta^2. \quad (26)$$

式中

$$\Sigma_3 = \int_a^b (c(y) + B_n(y)\Sigma_1 / 2\Sigma_2)^2 dy,$$

$$\Sigma_4 = \int_a^b (c(y) + B_n(y)\Sigma_1 / 2\Sigma_2) B_n(y) dy.$$

对于此非线性观测器,有如下定理.

定理 2 假定系统的状态矩阵 A 是稳定的,且 $\|h\| \leq \varphi$, φ 是一个事先给定的小正数,则误差动态方程(26)的稳态解的范数 $\|\bar{\mathbf{x}}\|$ 不会超过某个事先给定的小正数.

证 因矩阵 A 稳定,故存在一个正定矩阵 L 使得

$$A^T L + LA = -I. \quad (27)$$

选择如下的李雅普诺夫函数:

$$\pi(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}^T L \bar{\mathbf{x}}, \quad (28)$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{\pi}(\bar{\mathbf{x}}) &= -\|\bar{\mathbf{x}}\|^2 + 2\bar{\mathbf{x}}^T L (h\bar{\mathbf{x}}^T \Sigma_3 \bar{\mathbf{x}} \mp 2h\Delta \Sigma_4 \bar{\mathbf{x}} + h\Sigma_2 \Delta^2) \leq \\ &= -\|\bar{\mathbf{x}}\|^2 + 2\|\bar{\mathbf{x}}\| \|L\| \|h\| (\|\bar{\mathbf{x}}\|^2 \Sigma_3 + \\ &= 2\|\Delta\| \|\Sigma_4\| \|\bar{\mathbf{x}}\| + \|\Sigma_2\| \|\Delta\|^2). \end{aligned} \quad (29)$$

由式(8)知

$$\|\mathbf{x}\| \leq M \text{ (若 } M = \sqrt{\theta/\|\Sigma\|}, \text{ 则 } \|\mathbf{x}_\Sigma\| \leq \theta),$$

故 $\|\bar{\mathbf{x}}\| \leq 2M$, 记 $\Xi = \max\{\|\Sigma_3\|, \|\Delta\| \|\Sigma_4\|, \|\Sigma_2\| \|\Delta\|^2\}$, 则有

$$\dot{\pi}(\bar{\mathbf{x}}) \leq -\|\bar{\mathbf{x}}\|^2 + 2\Xi \|\bar{\mathbf{x}}\| \|L\| \|H\| (\|\bar{\mathbf{x}}\| + 1)^2. \quad (30)$$

若选取

$$\|h\| \leq \varphi = \delta / (2(2M + 1)^2 \Xi \|L\|), \quad (31)$$

式中, δ 是一个事先给定的小正数. 故 $\|\bar{x}\|$ 的稳态值将不会超过 δ , 这是因为当 $\|\bar{x}\| > \delta$ 时, $\dot{\pi}(\bar{x}) < 0$, 则 $\pi(\bar{x})$ 减少. 证毕.

定理2表明 h 的有界性可以保证 $\|\bar{x}(t)\|$ 的有界性. 由定理2可知, 对于 $\|\bar{x}(t_0)\| \leq \delta$, 恒有 $\|\bar{x}(t)\| \leq \phi, \delta \leq \phi \leq 2M, t > t_0$. 若 δ, ϕ 足够小, 则实际控制为

$$u_f = -B^{-1}K(\hat{x} - x_g) - B^{-1}Ax_g - qB^{-1}\Sigma\hat{x}\operatorname{sgn}(\theta - \hat{x}^T\Sigma\hat{x}). \quad (32)$$

然而这样的假设一般不成立, 由于约束的存在, 对于观测器状态成立的约束对原系统状态不一定成立. 故要求对控制器进行补偿.

控制器补偿的主要思想是, 由于观测状态和原状态有一个误差, 先估计这个误差的大小然后用其对原系统的控制作一个补偿. 对于式(24)的非线性观测器, 用线性系统来估计它, 故有 $\delta = 0$, 这样观测器误差动态方程(26)可以用一个线性定常自治系统来描述. 并引进线性系统定常自治中的衰减速度^[18], 它表征了系统自由运动的衰减性能. 其定义式是

$$\eta = -\dot{V}(\bar{x})/V(\bar{x}), \quad (33)$$

式中的 $V(x)$ 是李雅普诺夫能量函数. 可得如下的衰减速度^[18]估计:

$$\eta \geq \lambda_{\min}(L^{-1}), \quad (34)$$

其中 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 表示 (\cdot) 的最小特征值.

引进衰减系数是为了估计 \bar{x} , 对原系统做一个补偿. 经试验, 确定如下的误差补偿控制:

$$u_c = F\varepsilon(t)\exp(-\eta(t-t_0)). \quad (35)$$

式中: F 是补偿增益矩阵; $\exp(-\eta(t-t_0))$ 为估计的衰减速度; $\varepsilon(t)$ 是观测器的调节误差. 这样做的目的是在刚开始时, 观测状态和实际状态之间误差比较大时做一个合理补偿, 使得二者之间的误差不至于相差太大以保证二者均满足约束条件. 由假设可知, 只要观测误差足够小时, 就可以只用式(32)来控制了, 同时由定理2知, 观测器的误差响应将会稳定于某一小区域, 也就是说, 观测误差经过一定时间后将会变得很小, 这个时候不再需要补偿. 指数衰减速度的加入, 很好地满足了这两个要求. 然而补偿器的增益矩阵及衰减速率的合理选择在理论上还有待进一步讨论.

这样, 对于观测器, 采用式(32)的控制, 而对于原系统, 再在其基础上增加式(35)的误差补偿控制. 即

$$u = u_f + u_c. \quad (36)$$

定理3 对于形如式(6)的模型, 其性能指标为

式(9). 采用式(32)控制下的观测器(24), 在控制器式(36)的作用下, 系统的状态将能跟踪目标状态.

证 式(36)的作用是保证实际状态和观测状态均满足约束条件, 而且, 当 t 较大时, 有 $u_c \approx 0$. 即在这个时候, 只有式(32)起作用. 故只需要证明在式(32)的作用下, 系统的状态能跟踪目标状态即可.

由定理2可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \delta$. 也就是说, 在某一时刻以后, 实际状态和观测状态非常接近. 这个时候的观测状态即可看为实际状态. 而在实际状态下, 定理1表明了系统的状态将渐近稳定于期望状态. 但由于实际状态与观测状态总存在一个事先确定的很少误差, 使得观测状态不会完全跟踪实际状态, 故这个时候只能得到系统的状态跟踪目标状态, 而不会渐近稳定于目标状态. 证毕.

6 鲁棒控制(Robust control)

在实际中, 方程(6)并不能完整表示系统的响应, 因为概率密度函数逼近常有逼近误差, 而动态模型有未建模的动态, 故实际模型是

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + v(t), \\ \sqrt{\gamma(y, u(t))} = c(y)x + B_n(y)\omega_n + e_0(y). \end{cases} \quad (37)$$

式中的 $v(t)$ 表示的是未建模的动态, 不失一般性, 假定 $\|v(t)\| \leq W$, W 为事先已知的正常数. 而 $e_0(y)$ 表示概率密度函数的逼近误差且满足 $\|e_0(y)\| \leq d_0$, d_0 是一个事先已知的小正常数. 由于 $\gamma(y, u(t))$ 是概率密度函数, 故式(3)仍需满足. 若记

$$e_1 = \int_a^b 2e_0(y)(c(y)x + B_n(y)\omega_n) + e_0^2(y)dy \quad (38)$$

显然有 $\|e_1\| \leq d_1$, 这是因为已经假定 $\gamma(y, u(t))$ 有界, 故不妨设 $\gamma(y, u(t)) \leq \Psi^2$, Ψ 为事先已知的正常数. 则有 $d_1 \leq 2d_0\Psi$, 它与小正数 d_0 成比例. 由变结构控制可知, 其切换面为一个封闭的曲面. 定理1表明只要控制器式(36)参数选择合理, 则状态就最多到达这个有限的封闭曲面, 这表明状态满足约束条件, 即系统的输出恒有界.

7 仿真实例(Simulation examples)

为了说明所提方法的有效性, 考虑如下例子. 其概率密度函数由下式给定:

$$\{r(y, u(t))\} \sqrt{\gamma(y, u(t))} = \omega_1 B_1(y) + \omega_2 B_2(y) + \omega_3 B_3(y). \quad (39)$$

式中的 ω_i 为权值 $B_i(y)$, ($y \in [2, 7]$, ($i = 1, 2, 3$)) 为基函数, 它们由下式确定:

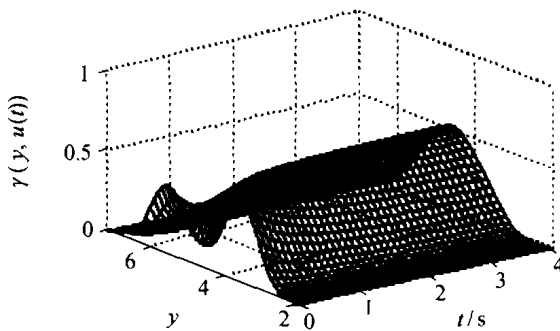
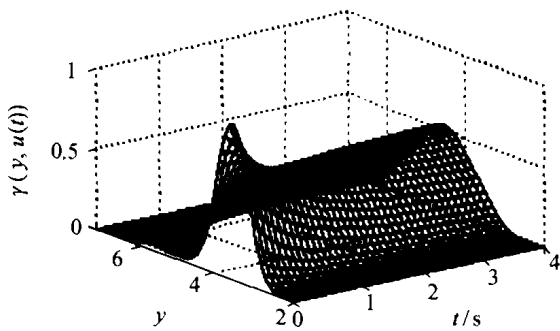
$$\begin{cases} B_1(y) = \frac{1}{2}(y-2)^2 I_1 - (y^2 - 7y + \frac{23}{2}) I_2 + \frac{1}{2}(y-5)^2 I_3, \\ B_2(y) = \frac{1}{2}(y-3)^2 I_2 - (y^2 - 9y + \frac{39}{2}) I_3 + \frac{1}{2}(y-6)^2 I_4, \\ B_3(y) = \frac{1}{2}(y-4)^2 I_3 - (y^2 - 11y + \frac{59}{2}) I_4 + \frac{1}{2}(y-7)^2 I_5. \end{cases} \quad (40)$$

其中 $I_i = \begin{cases} 1, & y \in [i+1, i+2] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, $i = 1, \dots, 5$. 对于此概率密度函数, 必定有一个权值依赖于其他两个权值, 不失一般性, 选取 $x = [\omega_1 \ \omega_2]^T$. 设 $t_0 = 0$, 并设系统的动态部分可以表示为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u. \quad (41)$$

故有 $\lambda_{\min}(L^{-1}) = 0.3576$. 由前文的论述可得替代的性能指标(13)

$$R = I, \Sigma_0 = \begin{bmatrix} 0.5500 & 0.2167 \\ 0.2167 & 0.5500 \end{bmatrix}, \quad (42)$$



故最优反馈矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} 1.0236 & 0.1524 \\ 0.1524 & 0.0491 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

7.1 跟踪检验(Tracking verification)

在检验跟踪性能时, 考虑了两组不同的初始条件, 二者仿真采样时间均为 0.01 s.

a) 实际初始状态为 $[1.3 \ 0.05]^T$, 观测器初始状态为 $[1 \ 0.1]^T$, 观测器增益矩阵为 $[0.0005 \ -0.0005]^T$, 目标为 $[0.52 \ 0.80]^T$. 其误差补偿控制选取为

$$u_c = -[2 \ 1]^T \epsilon(t) \exp(-0.36t). \quad (44)$$

b) 实际初始状态为 $[0.9 \ 0.2]^T$, 观测器初始状态为 $[0.895 \ 0.195]^T$, 补偿控制为零即直接使用方程(32), 其余同前. 仿真结果如图 2 所示.

仿真结果表明了输出概率密度函数形状跟踪了给定的概率密度函数的形状. 说明构造的补偿控制器可行.

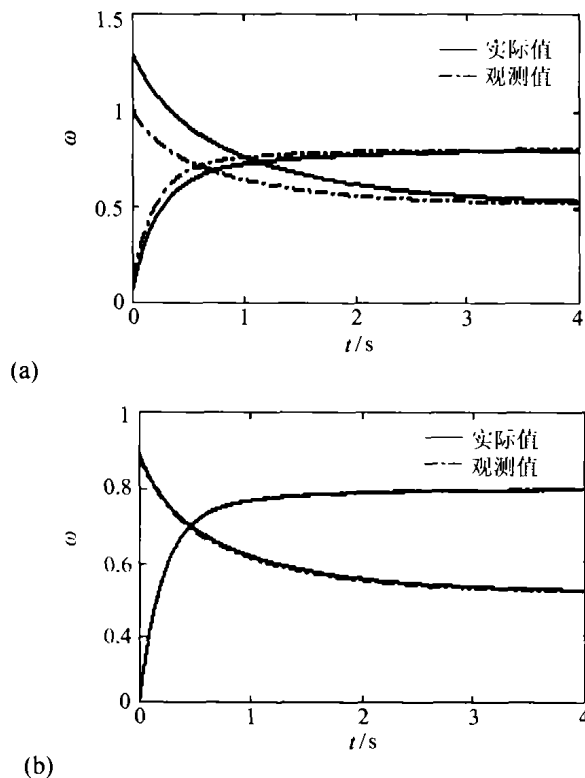


图 2 不同观测状态下的跟踪实现
Fig. 2 Tracking in different observer states

7.2 约束条件检验(Constraint conditions verification)

为了检验约束条件是否恒满足, 取 $\theta = 0.82$, 目标为 $[0.52 \ 0.80]^T$. 动态系统仍为式(38). 初始条件为 $[0.9 \ 0.2]^T$. 观测器的初始值为 $[1.3 \ 0.05]^T$, 观测器的误差调节增益矩阵同前. 补偿控制为

$$u_c = -[1.8 \ 1]^T \epsilon(t) \exp(-0.36t). \quad (45)$$

因 ω_n 包含了约束条件, 故在图 3 中画出其响应曲线. 采样时间同前.

从仿真可以明显看出, 在某一时刻约束条件不满足时, 变结构控制总能强迫状态返回约束区域. 仿真结果表明了切换面选取是合理的.

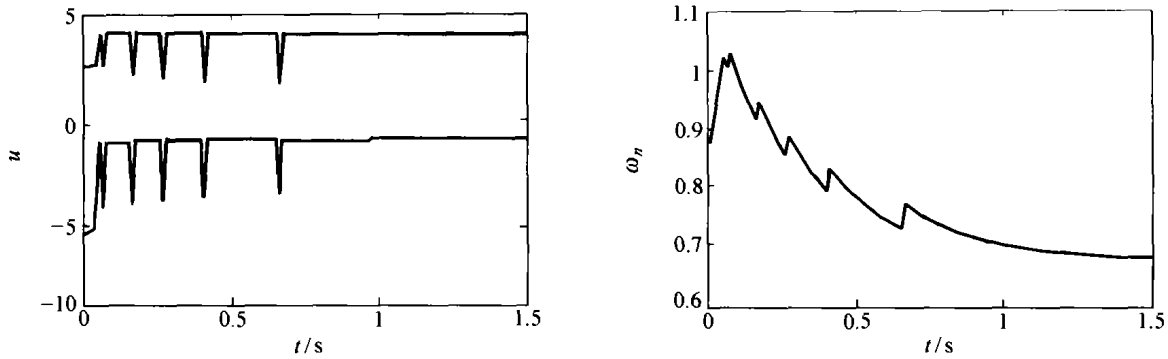


图 3 约束条件的检验

Fig. 3 Constraints condition verification

7.3 鲁棒性检验(Robustness verification)

为了检验鲁棒性,采用的例子同 7.1 节;为简单,只考虑未建模的动态,即

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + v(t), \\ \sqrt{\gamma(y, u(t))} = c(y)x + B_n(y)\omega_n. \end{cases} \quad (46)$$

式中的 $v(t)$ 是 $[0,0.1]$ 间的均匀分布的随机过程.其余的初始条件同上一节的初始条件,但补偿控

制为

$$u_r = - [3 \ 1.5]^T \epsilon(t) \exp(-0.36t). \quad (47)$$

仿真结果如图 4 所示.从图中可以看出,期望的跟踪性能已经获得,但由于外来扰动的存在,完全跟踪已不能实现.

从以上的仿真结果可以看出,算法式(36)具有良好的动态性质,这表明控制算法构造成功.

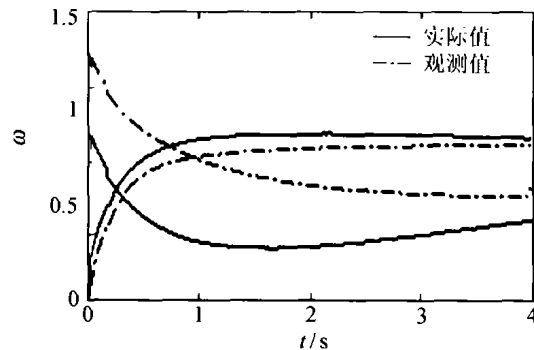
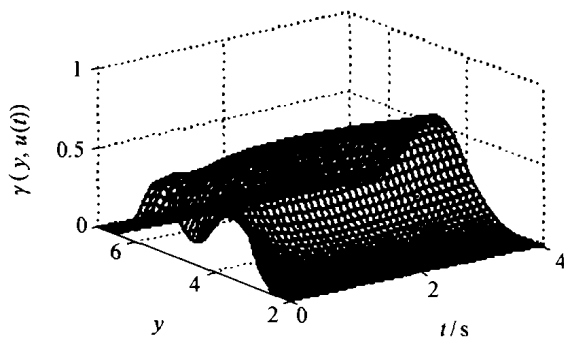


图 4 鲁棒性检验

Fig. 4 Robustness verification

8 结论(Conclusions)

对于均方根 B 样条模型的动态随机系统的输出概率密度形状最优跟踪控制,文中将问题转化成有约束的常规最优控制,提出了用约束条件直接构造切换面并设计变结构控制器.接着,为了使观测器状态构造的控制器也能满足原系统约束条件,引进了误差补偿控制.最后,对给出的算法具有良好的鲁棒进行了说明.仿真表明了算法的有效性.但是,对于引进的误差补偿控制并没有作出证明,这有待进一步的研究.

致谢(Acknowledgement):

本文成文过程中,和岳红博士、陈雪飞同学进行了有益的探讨,在此表示感谢.

参考文献(References):

- [1] ASTROM K J. *Introduction to Stochastic Control Theory* [M]. New York: Academic Press, 1970.
- [2] ASTROM K J, WITTENMARK B. *Adaptive Control* [M]. Reading Mass: Addison Wesley, 1988.
- [3] BROWN M, HARRIS C J. *Neurofuzzy Adaptive Modelling and Control* [M]. Hemel-Hempstead: Prentice-Hall, 1994.
- [4] GAJIC Z, LOSADA R. Monotonicity of algebraic Lyapunov iterations for optimal control of jump parameter linear systems [J]. *Systems and Control Letters*, 2000, 41(3): 175 - 181.
- [5] GUO L, CHEN H F. The Astrom-Wittenmark self-tuning regulator revisited and ELS-based adaptive trackers [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(7): 802 - 812.
- [6] GUO L. Self-convergence of weighted least-squares with applications to stochastic adaptive control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(1): 79 - 89.

- [7] 王宏,岳红.随机分布系统的输出概率密度函数:建模、控制和应用[J].控制工程,2003,10(3):193-197.
(WANG Hong, YUE Hong. Output PDF control of stochastic distribution systems: modeling, control and applications [J]. *Control Engineering of China*, 2003, 10(3): 193-197.)
- [8] WANG H. Robust control of the output probability density functions for multivariable stochastic systems with guaranteed stability [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(11): 2103-2107.
- [9] YUE H, WANG H. Minimum entropy control of closed-loop tracking errors for dynamic stochastic systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(1): 118-122.
- [10] WANG H, ZHANG J H. Bounded stochastic distributions control for pseudo-ARMAX stochastic systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(3): 486-490.
- [11] WANG H. Minimum entropy control of non-Gaussian dynamic stochastic systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(2): 398-403.
- [12] WANG H. *Bounded Dynamic Stochastic Systems: Modeling and Control* [M]. London: Springer-Verlag, 2000.
- [13] GIROSI F, POGGIO T. Networks and the best approximation property [J]. *Biological Cybernetics*, 1990, 63(1): 169-176.
- [14] WICHAYA M, REIN L. Optimal control of inequality state constrained systems [J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 1997, 36(5): 1686-1694.
- [15] CLARKE F H, LEDYAEV Y, VINTER R B. Regularity properties of solution to linear quadratic optimal control problems with state constraints [J]. *Systems and Control Letters*, 1997, 30(2): 265-272.
- [16] 高为炳.变结构控制的理论及设计方法[M].北京:科学出版社,1996.
(GAO Weibing. *Variable Structure Control Theory and Design Method* [M]. Beijing: Science Press, 1996.)
- [17] 肖雁鸿,葛召炎,周靖林,等.全滑模变结构控制系统[J].电机与控制学报,2002,6(3):233-236.
(XIAO Yanhong, GE Zhaoyan, ZHOU Jinglin, et al. Global sliding model variable structure control systems [J]. *Electric Machines and Control*, 2002, 6(3): 233-236.)
- [18] 郑大钟,线性系统理论[M].北京:清华大学出版社,1992.
(ZHENG Dazhong. *Linear Systems Theory* [M]. Beijing: TsingHua University Press, 1992.)

作者简介:

周靖林 (1976—),男,博士研究生,研究方向为广义随机分布控制的建模及最优控制算法、变结构控制等, E-mail: jinglin.zhou@mail.ia.ac.cn;

王宏 (1960—),男,研究员,中国科学院引进海外杰出人才“百人计划”项目的引进学者,UMIST教授,出版专著多部,研究领域为有界随机分布控制系统的建模、控制与应用,动态系统故障诊断(确定系统与随机系统)等, E-mail: hong.wang@manchester.ac.uk.

(上接第368页)

- [5] LIU H, BUTTERFASS J, KNOCH S, et al. A new control strategy for DLR's multisensory articulated hand [J]. *IEEE Control Systems*, 1999, 19(2): 47-54.
- [6] HOGAN N. Impedance control: an approach to manipulation [J]. *J of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1985, 107(1): 1-24.
- [7] 姜力,蔡鹤皋,刘宏.基于滑模位置控制的机器人灵巧手模糊自适应阻抗控制[J].控制与决策,2001,16(5):612-616.
(JIANG Li, CAI Hegao, LIU Hong. Fuzzy adaptive impedance control for robot dextrous hand based on sliding mode position control [J]. *Control and Decision*, 2001, 16(5): 612-616.)
- [8] 郑时雄,谢存禧.机器人操作手:数学、编程和控制[M].北京:机械工业出版社,1991:130-134.
(ZHENG Shixiong, XIE Cunxi. *Robot Manipulator: Mathematics, Programming and Control* [M]. Beijing: Mechanical Industry Press, 1991: 130-134.)

作者简介:

姜力 (1970—),男,现为大庆高新技术开发区博士后,研究领域为机器人灵巧手的传感和控制, E-mail: Ljiang98@yahoo.com.cn;

蔡鹤皋 (1934—),男,中国工程院院士,研究领域为机电一体化技术,机器人学, E-mail: hgcai@hit.edu.cn;

刘宏 (1966—),男,“长江学者”奖励计划特聘教授,博士生导师,研究领域为仿人机器人灵巧手、机器人宏/微操作器, E-mail: Hliu@robinst.hit.edu.cn.