文章编号: 1000-8152(2005)03-0445-04

多输入/多输出系统动态矩阵控制鲁棒稳定性

申 涛, 诸 静
(浙江大学 电气工程学院, 浙江 杭州 310027)

摘要: 研究了基于脉冲响应模型的动态矩阵预测控制(DMC)算法,针对多输入、多输出(MIMO)系统脉冲响应模型的特点,利用脉冲响应系数误差矩阵范数平方和定义预测模型的模型误差,以线性矩阵不等式(LMI)的形式提出了DMC闭环鲁棒稳定充要条件,将DMC算法闭环稳定问题转换为一类线性矩阵不等式的可解问题.并且研究了模型误差与闭环系统稳定性之间的关系,给出了保证系统稳定条件下模型误差界的求取方法,通过求解一个线性矩阵不等式约束的凸优化问题得到保证闭环系统稳定的误差界.最后,利用算例对本文方法的有效性进行了验证.

关键词: 预测控制; 动态矩阵控制; 鲁棒稳定性; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Robust stability for DMC of multi-input/multi-output systems

SHEN Tao, ZHU Jing
(Electrical Engineering College, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: The dynamic matrix control (DMC) algorithm based on finite impulse response model was studied. The model errors of multi-input/multi-output systems were described in terms of sum of norm-squares of impulse response coefficient errors matrix. The necessary and sufficient conditions for robust stability of DMC algorithm were provided in the form of linear matrix inequality (LMI). The problem of robust stability for DMC was transformed into the problem of solvability of a class of LMIs. And the relations of the model errors with the stability were also studied. The bound of model errors can be derived by solving a class of convex optimization problems with linear matrix inequality constraint with. The illustrative examples proved the validity of these results.

Key words: predictive control; dynamic matrix control; robust stability; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

近年来,随着预测控制理论的不断发展和完善,预测控制算法在越来越多的工业生产领域得到了成功的应用.工业现场往往具有很强的不确定性,其鲁棒稳定性能直接影响着生产过程的安全性、可靠性,因此预测控制的鲁棒性能得到了国内外学者的普遍关注.文献[1]针对广义预测控制,利用线性有限脉冲响应模型的特点,将其闭环稳定性问题转换为优化问题的可解性问题.文献[2]基于Lyapunov理论证明了终端等式约束非线性MPC的稳定性.文献[3]将DMC转换到内模控制框架下进行描述,并对其稳定性、鲁棒性进行了分析.文献[4]针对石油化工过程的特点,提出了多重时滞系统的预测控制算法,并且给出了基于该算法的闭环系统鲁棒稳定性条件.文献[5]讨论了基于阶跃响应模型的单输入、单输出系统DMC算法,并利用Jury定理给出了闭环鲁棒稳定条件.文献[6]提出了基于系统脉冲响应模型的多输入、多输出(MIMO)系统动态矩阵控制算法,并且给出了闭环系统稳定性充分必要条件.

本文针对多输入、多输出系统的特点,以脉冲响应系数误差矩阵范数平方和的形式描述被控过程的不确定性,在此基础上利用线性矩阵不等式方法研究了文献[6]算法的鲁棒稳定性,以线性矩阵不等式的形式给出了该算法的闭环鲁棒稳定条件.

2 系统模型(System model)

假设某一MIMO过程可以用以下脉冲响应(FIR)模型来描述:

$$y(k)=\sum_{i=1}^{N}h(i)u(k-i)+d(k). \qquad (1)$$

其中: $y(k)\in\mathbb{R}^{ny}$ 为过程输出; $u(k)\in\mathbb{R}^{nu}$ 为控制输入; $h(i)\in\mathbb{R}^{ny\times nu}$ 为输入输出脉冲响应系数矩阵; nu, ny 为被控过程输入与输出变量数, N 为脉冲

收稿日期: 2003-04-07; 收修改稿日期: 2004-05-11.

响应的截断步长.因此采用FIR模型可预测过程的未来输出为

$$y'(k+j)=\sum_{i=1}^{N}h'(i)u(k+j-i)+d'(k),\ j\geqslant 0. \tag{2}$$

$h'(i)$为估计的脉冲响应系数,通常不同于系统本身的$h(i),i=1,\cdots,N.\ d'(k)=y(k)-y'(k)$为系统输出预测误差,用于对模型误差进行在线校正,$y'(k)$为系统输出预测值.

采用文献[6]算法,闭环系统可以写为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{A}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{x}(k-1)+\boldsymbol{B}_{\mathrm{S}}(r(k)-d(k)),\\ \boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{C}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{x}(k).\end{cases} \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{S}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} & \cdots & \boldsymbol{M}_{1N}\\ \boldsymbol{I}_{nu} & 0_{nu} & \cdots & 0_{nu}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0_{nu} & \cdots & \boldsymbol{I}_{nu} & 0_{nu}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{S}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}_r\\ 0_{nu}\\ \vdots\\ 0_{nu}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{S}}=[\boldsymbol{I}_{nu}\quad 0_{nu}\quad\cdots\quad 0_{nu}],$$

$$\boldsymbol{M}_{11}=\boldsymbol{K}_u+\boldsymbol{K}_r(h'(1)-h(1))-\boldsymbol{K}_1,$$

$$\boldsymbol{M}_{1i}=\boldsymbol{K}_r(h'(i)-h(i))-\boldsymbol{K}_i,(i=2,\cdots,N),$$

$\boldsymbol{K}_r,\boldsymbol{K}_i,\boldsymbol{K}_u$的定义见文献[6].

3 系统不确定性描述(Definition of model uncertainty)

定义 1 对于某一给定的过程$\{h(i),i=1,\cdots,N\}$,若采用$\{h'(i),i=1,\cdots,N\}$作为系统模型,其模型总失配M定义为

$$M=\sum_{i=1}^{N}\|h(i)-h'(i)\|^2=\sum_{i=1}^{N}\|\Delta h(i)\|^2, \tag{4}$$

并且对于对象集Ω中的任一对象,有

$$M\leqslant M_{\Omega},\ \forall h\in\Omega. \tag{5}$$

其中

$$\|\Delta h(i)\|=\lambda_{\max}^{1/2}(\Delta h^{\mathrm{T}}(i)\Delta h(i)),$$

$$\Delta h(i)=h'(i)-h(i).$$

由此,式(3)可以写为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k)=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(k-1)+\boldsymbol{B}_S(r(k)-d(k)),\\ \boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{C}_S\boldsymbol{x}(k).\end{cases} \tag{6}$$

其中 $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}'_{11} & \boldsymbol{M}'_{12} & \cdots & \boldsymbol{M}'_{1N}\\ \boldsymbol{I}_{nu} & 0_{nu} & \cdots & 0_{nu}\\ \vdots & \ddots & & \vdots\\ 0_{nu} & \cdots & \boldsymbol{I}_{nu} & 0_{nu}\end{pmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{K}}_r=\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}_r & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

$$\Delta\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\Delta h(1) & \Delta h(2) & \cdots & \Delta h(N)\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\ \Delta\boldsymbol{A}=\bar{\boldsymbol{K}}_r\Delta\boldsymbol{H},$$

$\boldsymbol{M}'_{11}=\boldsymbol{K}_u-\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{M}_{1i}=-\boldsymbol{K}_i,(i=2,\cdots,N)$,

$\Delta h(i)=h'(i)-h(i)$.

4 DMC算法鲁棒稳定性分析(Robust stability analysis of DMC algorithm)

引理 1[6] 对于开环稳定的线性MIMO被控过程(1),其闭环稳定的充分必要条件为$\boldsymbol{A}_S$的所有特征值均在单位圆内.

引理 2[7] 若存在正定对称矩阵$\boldsymbol{P}\in\mathbb{R}^{n\times n}$满足:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}<0, \tag{7}$$

则$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$的特征值的模都小于1.

引理 3[7] 若存在正定对称矩阵$P\in\mathbb{R}^{n\times n}$满足

$$\begin{pmatrix}-\boldsymbol{P} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{P}\end{pmatrix}<0, \tag{8}$$

则$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$的特征值的模均小于1.

引理 4[8] 闭环系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}(k) \tag{9}$$

的所有极点在圆盘$D(q,r)$中,当且仅当存在对称正定矩阵P使得下式成立:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}-r\boldsymbol{P} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}-q\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-q\boldsymbol{P} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}-r\boldsymbol{P}\end{pmatrix}<0. \tag{10}$$

其中:$\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$为适当维数的实常数矩阵;$\boldsymbol{F}\in\mathbb{R}^{i\times j}$是满足$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{I}$的未知矩阵;$\boldsymbol{I}$为适当维数的单位矩阵.

定理 1 若存在正定矩阵$\tilde{\boldsymbol{P}}>0$满足

$$\begin{pmatrix}-\tilde{\boldsymbol{P}} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{K}}_r & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{P}} & \boldsymbol{I}\\ \bar{\boldsymbol{K}}_r^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A} & \tilde{\boldsymbol{P}}-\boldsymbol{I} & 0 & 0\\ \tilde{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A} & 0 & -\tilde{\boldsymbol{P}} & 0\\ \boldsymbol{I} & 0 & 0 & -\frac{1}{M_{\Omega}}\boldsymbol{I}\end{pmatrix}<0, \tag{11}$$

则以上DMC控制算法使得Ω的所有对象采用均闭环稳定.

证 根据引理1,2可以得到,若存在正定对称矩阵P满足

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}}PA - P < 0, & (12) \\ (A+\Delta A)^{\mathrm{T}}P(A+\Delta A) - P < 0. & (13) \end{cases}$$

则对 Ω 中所有对象采用以上DMC控制算法闭环系统均稳定.若存在正定实对称矩阵 P 对于任意的 $x \in \mathbb{R}^{Nnu}$,下式成立:

$$\begin{bmatrix} x \\ \Delta Hx \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}PA - P & A^{\mathrm{T}}P\bar{K}_r \\ \bar{K}_r^{\mathrm{T}}PA & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Delta Hx \end{bmatrix} < 0, \tag{14}$$

则式(12),(13)一定成立.根据 ΔH 的定义可得

$$\begin{bmatrix} x \\ \Delta Hx \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} M_\Omega I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Delta Hx \end{bmatrix} \geqslant 0. \tag{15}$$

显然,若

$$\begin{bmatrix} x \\ \Delta Hx \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}PA - P + \tau M_\Omega I & A^{\mathrm{T}}P\bar{K}_r \\ \bar{K}_r^{\mathrm{T}}PA & P - \tau I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Delta Hx \end{bmatrix} < 0 \tag{16}$$

成立,则系统是稳定的,其中 $\tau > 0$.由 $\tau > 0$ 得到式(16)可以等价为

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}\tau^{-1}PA - \tau^{-1}P + M_\Omega I & A^{\mathrm{T}}\tau^{-1}P\bar{K}_r \\ \bar{K}_r^{\mathrm{T}}\tau^{-1}PA & \tau^{-1}P - I \end{bmatrix} < 0. \tag{17}$$

取 $\tilde{P} = \tau^{-1}P$,由Schur补定理可以得到上式等价于式(11),从而定理1得证.

定理2 若存在正定对称矩阵 $P > 0$ 及 $\alpha > \|K_r\|^2 M_\Omega$ 满足

$$\begin{pmatrix} -P+I & A^{\mathrm{T}}P & 0 \\ PA & -P & P \\ 0 & P & -\alpha^{-1}I \end{pmatrix} < 0, \tag{18}$$

则以上DMC控制算法使得 Ω 的所有对象采用均闭环稳定.

证 由 $\alpha > \|K_r\|^2 M_\Omega$,则 $\|\Delta A\|^2 < \alpha$,可以得到,对于任意正定对称矩阵 $P > 0$ 总有

$$\begin{pmatrix} I & -\Delta A^{\mathrm{T}}P \\ -P\Delta A & \alpha P^2 \end{pmatrix} > 0. \tag{19}$$

根据引理3,若存在正定对称矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足

$$\begin{pmatrix} -P & (A+\Delta A)^{\mathrm{T}}P \\ P(A+\Delta A) & -P \end{pmatrix} < 0, \tag{20}$$

则系统(6)是稳定的.若存在正定对称矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足

$$\begin{pmatrix} I & \Delta A^{\mathrm{T}}P \\ P\Delta A & \alpha P^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -P & (A+\Delta A)^{\mathrm{T}}P \\ P(A+\Delta A) & -P \end{pmatrix} < 0, \tag{21}$$

则式(20)成立.式(21)可以写为

$$\begin{pmatrix} -P+I & A^{\mathrm{T}}P \\ PA & -P+\alpha P^2 \end{pmatrix} < 0. \tag{22}$$

根据Schur补定理,式(22)可等价为式(18),从而定理2得证.

系统(6)可以等价为

$$\begin{cases} x(k) = (A+\tilde{K}_r\Delta\tilde{H}L)x(k-1) + B_S(r(k)-d(k)), \\ u(k) = C_S x(k). \end{cases} \tag{23}$$

其中 $\Delta\tilde{H} = M_\Omega^{-1/2}[\Delta h(1) \ \cdots \ \Delta h(N)]$,$L = \sqrt{M_\Omega I}$,$\tilde{K}_r = [K_r^{\mathrm{T}} \ 0 \ \cdots \ 0]^{\mathrm{T}}$,$A$ 如式(6)定义.

定理3 以上DMC控制算法对于 Ω 的所有对象均闭环稳定的充要条件为:存在正定对称矩阵 P 满足

$$\begin{pmatrix} \tilde{K}_r\tilde{K}_r^{\mathrm{T}} - P & AP & 0 \\ PA^{\mathrm{T}} & -P & P \\ 0 & P & -M_\Omega^{-1}I \end{pmatrix} < 0. \tag{24}$$

证 根据引理1可以得到,系统(23)闭环稳定等价为其闭环极点均位于圆盘 $D(0,1)$ 中.由矩阵性质可以得到

$$\lambda_{\max}(\Delta\tilde{H}^{\mathrm{T}}\Delta\tilde{H}) = \lambda_{\max}(\Delta\tilde{H}\Delta\tilde{H}^{\mathrm{T}}) = \frac{M}{M_\Omega}, \tag{25}$$

因此可以得到

$$\Delta\tilde{H}^{\mathrm{T}}\Delta\tilde{H} \leqslant I. \tag{26}$$

根据引理4可以得到,系统(23)的闭环极点均位于圆盘 $D(0,1)$ 中的充要条件为:存在对称正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足

$$\begin{pmatrix} \tilde{K}_r\tilde{K}_r^{\mathrm{T}} - P & AP \\ PA^{\mathrm{T}} & PL^{\mathrm{T}}LP - P \end{pmatrix} < 0. \tag{27}$$

根据对矩阵 L 的定义,式(27)可以写为

$$\begin{pmatrix} \tilde{K}_r\tilde{K}_r^{\mathrm{T}} - P & AP \\ PA^{\mathrm{T}} & M_\Omega P^2 - P \end{pmatrix} < 0. \tag{28}$$

由Schur补定理可以得到式(28)等价为式(24),从而定理3得证.

式(24)的求解问题可以转换为一个优化问题,通过Matlab的函数mincx( )对式(29)进行求解得到 γ,判断系统(3)是否稳定.若 $\gamma^{-1} \geqslant M_\Omega$ 则DMC控制器对于系统(3)是闭环稳定的.

$$\begin{cases} \min \gamma \\ \begin{pmatrix} \tilde{K}_r\tilde{K}_r^{\mathrm{T}} - P & AP & 0 \\ PA^{\mathrm{T}} & -P & P \\ 0 & P & -\gamma I \end{pmatrix} < 0. \end{cases} \tag{29}$$

5 算例(Example)

选取系统模型[6]:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = G_m(s)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$$G_m(s) = \begin{pmatrix} \frac{4.05}{50s+1}e^{-27s} & \frac{1.77}{60s+1}e^{-28s} \\ \frac{5.39}{50s+1}e^{-18s} & \frac{5.72}{60s+1}e^{-14s} \end{pmatrix}$$

作为一类控制对象 Ω:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = G_m(s)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$$G_m(s) = \begin{pmatrix} \frac{4.05}{50s+1}e^{-27s} & \frac{1.77+K}{60s+1}e^{-28s} \\ \frac{5.39}{50s+1}e^{-18s} & \frac{5.72}{60s+1}e^{-14s} \end{pmatrix},$$

的标称对象.这里选取采样周期为4 s,截断步长 $N = 31$,控制时域 $m = 2$,预测时域 $p = 30$;输出误差矩阵 $Q_j = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$,控制输入加权矩阵 $R_j = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.经计算可以得到标称对象的特征值的模的最大值为0.9210.根据引理1显然标称对象闭环系统是稳定的,但是根据引理1不能判断该控制器对于 Ω 中的其它对象是否稳定.根据定理3进行求解可以得到 $\gamma = 872.9678$,从而得到 $|K| < 0.1713$ 时,该控制器对于 Ω 的所有对象均闭环稳定.

6 结束语(Conclusions)

本文针对一类不确定过程的DMC闭环稳定性问题进行了研究,提出了线性矩阵不等式形式的鲁棒稳定判据,对于不确定系统DMC控制器的设计具有一定的指导作用.

参考文献(References):

[1] SCOKAERT P. Infinite horizon generalized predictive control [J]. *Int J Control*, 1997, 66(1): 161 - 175.

[2] MICHALSKA H, MAYNE D Q. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(11): 1623 - 1633.

[3] 舒迪前.预测控制算法的内模结构及其统一格式[J].控制与决策,1994,9(1):29 - 36.
(SHU Diqian. Internal model structure of predictive control algorithm and its unified form [J]. *Control and Decision*. 1994, 9(1): 29 - 36.)

[4] 夏伯锴,许锋,杜殿林,等.状态多重时滞系统的预测控制算法及应用[J].化工自动化及仪表,2003,30(2):38 - 40.
(XIA Bokai, XU Feng, DU Dianlin, et al. Predictive control algorithm of state variable multi-time-delay and its application [J]. *Control and Instruments in Chemical Industry*, 2003, 30(2): 38 - 40.)

[5] BADGWELL T A. Robust stability conditions for SISO model predictive control algorithms [J]. *Automatica*, 1997, 33(7): 1357 - 1361.

[6] 戴连奎.多变量动态矩阵控制系统的闭环稳定性[J].控制理论与应用,2001,18(4):585 - 587.
(DAI liankui. Closed-loop stability conditions for MIMO dynamic matrix control [J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(4): 585 - 587.)

[7] 俞立,陈国定,杨马英.不确定系统具有圆盘区域极点约束的鲁棒控制[J].自动化学报,2000,26(1):116 - 120.
(YU Li, CHEN Guoding, YANG Maying. Robust control of uncertain linear system with disk pole constraints [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(1): 116 - 120.)

[8] 俞立,陈国定,杨马英.不确定系统的鲁棒输出反馈区域极点配置[J].控制理论与应用,2002,19(2):244 - 246.
(YU Li, CHEN Guoding, YANG Maying. Robust regional pole assignment of uncertain systems via output feedback controllers [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(2): 244 - 246.)

作者简介:

申 涛 (1977—),男,2004年毕业于浙江大学控制理论与控制工程专业,获得博士学位,现工作于济南大学控制学院,主要研究方向为鲁棒控制、预测控制、模糊控制等,E-mail: shentao28@163.com;

诸 静 (1938—),男,1962年毕业于浙江大学,现为浙江大学电气工程学院教授,博士生导师,主要研究方向为复杂系统的智能控制、鲁棒控制、预测控制、模糊控制等.