

文章编号: 1000-8152(2005)03-0481-06

## 一类串联控制系统的优化设计: Backstepping 方法

张 艳, 李少远

(上海交通大学 自动化研究所, 上海 200030)

**摘要:** 针对一类多输入非线性串联系统提出了基于 Backstepping 方法的次优控制的设计. 首先, 将串联控制系统分为几个子系统, 然后为每个子系统分别设计辅助子系统及相应的辅助控制变量, 进一步利用 State-Dependent Algebraic Riccati Equation (SDARE) 技术为每个辅助子系统设计次优控制律. 设计出的次优控制律使得原状态变量和辅助控制变量(即: 辅助反馈变量)具有一定的渐近特性, 因此, 不但可在线获得次优控制律的解析解, 而且保证了原闭环系统的全局渐近稳定性. 最后通过一个两输入的二阶串联系统的数字仿真结果验证了该优化设计方法的有效性.

**关键词:** 串联系统; Backstepping 方法; 次优控制; SDARE(state-dependent algebraic Riccati equation); 全局渐近稳定性

中图分类号: TP273

文献标识码: A

## Optimization design for a class of cascade control systems: Backstepping approach

ZHANG Yan, LI Shao-yuan

(Institute of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

**Abstract:** A suboptimal control design is proposed based on Backstepping method for a class of multi-input nonlinear cascade systems. First, the cascade control system is decomposed into several subsystems. Then, the auxiliary subsystem and corresponding auxiliary control variables for each actual subsystem are devised, respectively. Third, a suboptimal control law for each auxiliary subsystem is designed with State-Dependent Algebraic Riccati Equation (SDARE) technique. The original state variables and the auxiliary control variables (i. e. auxiliary feedback variables) have an asymptotical characteristic by imposing the proposed control law, thus the analytic solution to suboptimal control can be achieved on-line and the global asymptotical stability (GAS) of the original closed-loop system can be guaranteed. Finally, the numeric simulation results of the second-order system with two inputs are provided to verify the effectiveness of the proposed optimization design.

**Key words:** cascade system; backstepping method; suboptimal control; state-dependent algebraic Riccati equation (SDARE); global asymptotical stability

### 1 引言(Introduction)

现代工业生产的发展对生产过程的控制提出了越来越高的要求, 除了对单个生产装置或局部过程实现优化控制外, 追求全过程的优化已是提高产品质量和降低成本的关键. 在工业控制中, 许多实际被控对象都可认为由几个环节串联而成, 比如生产线、轧钢厂、水源或质量控制系统等等, 所有这些在某种程度上都是串联结构的动态系统<sup>[1]</sup>. 这类系统的控制问题蕴含着各种非线性因素, 再加上我国生产过程的边界条件变化频繁, 以生产工艺条件为依据, 把最终目标分解为各个过程物理指标的传统做法在原

材料、工况变化多样时很难奏效. 此外, 在现代工业生产环境中, 由于 DCS、现场总线的广泛应用和信息网络的建立, 控制作为一种信息处理手段, 已不限于集中式的控制, 而更多地为分布式控制所取代. 复杂工业生产过程的这些新特点, 对最优控制和非线性控制理论和方法提出了新的挑战.

非线性控制系统理论包括 Lyapunov 稳定性方法、输入输出方法、精确线性化方法等<sup>[2]</sup>. 除此之外, 近年来针对不同的控制对象, 又提出了伪线性化法、Backstepping 设计法等新的控制思想和方法. 其中 Backstepping 设计法是在非线性标准形下进行的, 可

收稿日期: 2003-07-01; 收修改稿日期: 2004-06-11.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60474051); 国家教育部新世纪优秀人才计划和高等学校博士学科点专项科研基金(20020248028)资助项目.

以看作是微分几何方法的间接应用, Backstepping 方法<sup>[3,4]</sup>是一种结构化、系统化的设计方法,它利用系统的结构特性递推地构造整个系统的控制 Lyapunov 函数,使整个系统达到渐近稳定。

本文利用 Backstepping 方法构造性、系统化的设计优点,针对可状态线性化的多输入非线性串联系统设计一种次优控制律.以  $n$  输入的  $n$  阶非线性串联系统为例,基于 Backstepping 的结构化设计思想,结合 SDARE (state-dependent algebraic Riccati equation) 技术<sup>[5]</sup>,以非线性标量系统<sup>[6]</sup>的结论为基础,递推地为每个子系统设计次优控制律,给出了整个系统的设计思路和步骤,并根据 Lyapunov 稳定性定理证明原闭环系统是全局渐近稳定的。

## 2 问题描述 (Problem fomulation)

考虑如图 1 所示的由  $N$  个子系统组成,可状态线性化的串联系统.其中  $x_i, u_i (i = 1, 2, \dots, N)$  分别为第  $i$  个子系统的  $n_i$  维可测的状态向量和  $m_i$  维控制向量。

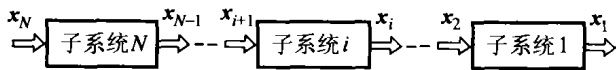


图 1 串联系统结构框图

Fig. 1 Cascade system configuration diagram

系统的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_{ii}(x_i)x_i + B_i(x_i)u_i + A_{i,i+1}(x_{i+1})x_{i+1}, \\ i = 1, \dots, N-1, \\ \dot{x}_N = A_{NN}(x_N)x_N + B_N(x_N)u_N, \\ x_i(t_0) = x_{i0}, i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

其中:子系统矩阵  $A_{ij}, B_i$  的阶数与各子系统的状态和控制向量  $x_i, u_i$  的维数相匹配<sup>[1]</sup>。

每个子系统的控制目标为寻找一个最优控制律  $u_i$  使整个闭环系统渐近稳定,并使如下的线性二次型目标函数达到最小值。

$$\begin{aligned} J_i(x_i(t_0), u_i, t_0, t_f) &= \frac{1}{2} x_i^T(t_f) S_i x_i(t_f) + \\ & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x_i^T Q_i(x_i) x_i + u_i^T R_i(x_i) u_i] dt, i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

其中:  $S_i$  为常数正定矩阵;  $Q_i(x_i), R_i(x_i)$  为  $x_i$  的正定矩阵函数。

由于串联系统的特殊结构,前一子系统的输出影响后面的子系统.文献[7]采用多前馈-反馈的广义预测控制,该控制算法将过程的可知外部扰动进

行前馈,将中间测量信息进行反馈,表现出良好的抗干扰性和鲁棒性.但是问题的求解是整体集中式控制,而实际工业环境下,一般采用分布式控制.文中提出一种串联控制系统的分布式递推设计方法。

## 3 基于 Backstepping 方法的系统优化设计 (Backstepping-based system optimization design)

利用 Backstepping 递推设计方法,为每个子系统设计一个辅助子系统,分别设计一个辅助控制变量,采用 SDARE 技术引入反馈控制,得到一个次优控制律.通过控制的作用,使得原系统的状态与辅助控制变量具有某种渐近特性,从而实现整个系统的渐近稳定。

对于如下的非线性标量系统,文献[6]采用 SDARE 方法设计次优控制律:

$$\dot{x} = a(x)x + b(x)u. \quad (3)$$

其中  $a(x), b(x)$  连续、有界,且  $b(x) \neq 0$ 。

目标函数为

$$\begin{aligned} J(x(t_0), u, t_0, t_f) &= \\ & \frac{1}{2} s x^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [q(x)x^2 + r(x)u^2] dt. \end{aligned} \quad (4)$$

其中:  $s$  为正的常数;  $q(x), r(x)$  为  $x$  的正定函数。

SDARE 控制为

$$u = -b(x)r^{-1}(x)p(x)x. \quad (5)$$

其中  $p(x)$  是下列方程的解:

$$2a(x)p(x) - b^2(x)r^{-1}(x)p^2(x) + q(x) = 0. \quad (6)$$

求解可得

$$\begin{aligned} p(x) &= \\ & r(x)b^{-2}(x) \left[ a(x) + \sqrt{a^2(x) + q(x)b^2(x)r^{-1}(x)} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

并且有,当  $t_f = \infty$  时,式(5)的 SDARE 控制是标量系统(3)的最优解。

带入式(3)可得闭环系统方程为

$$\dot{x} = -\sqrt{a^2(x) + q(x)b^2(x)r^{-1}(x)}x. \quad (8)$$

SDARE 控制避免了求解非线性问题的两点边值问题,如式(5)形式的状态反馈控制使整个闭环系统渐近稳定。

对于多输入的高阶系统,一般采用大系统的“分解-协调”思想,将整个系统分解成几个阶次较小的子系统,虽然减少了计算量,但是需要反复迭代经过协调得到控制律的最优解,同样存在着两点边值问题,而且存在迭代计算是否收敛的问题.本文研究一

类多输入具有串联结构系统的优化设计,将整个系统( $n$  阶)分解为  $n$  个一阶的单输入子系统,利用 Backstepping 方法为每个子系统设计一个状态反馈的辅助控制变量,得到与原系统对应的辅助系统,充分利用上述标量系统的结果,可在线求得控制律的解析解,避免了非线性系统求解的两点边值问题和需要迭代计算的收敛问题,而且每个子系统的 SDARE 控制律单独计算,计算量大为简化,整个设计过程可看作是一个分布式的递推过程.

$n$  输入的  $n$  阶非线性串联系统状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = a_i(x_i)x_i + b_i(x_i)u_i + a_{i,i+1}(x_{i+1})x_{i+1}, \\ i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x} = a_n(x_n)x_n + b_n(x_n)u_n. \end{cases} \quad (9)$$

其中  $a_i(x_i), b_i(x_i)$  连续、有界,且  $b_i(x_i) \neq 0$ .

定义  $n$  个误差变量:

$$\begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_2 = x_2 - v_1, \\ \vdots \\ z_n = x_n - v_{n-1}. \end{cases} \quad (10)$$

其中:  $v_i(z_i)(i = 1, \dots, n-1)$  为辅助控制(辅助反馈)变量,记  $z \triangleq [z_1 \ \dots \ z_n]^T, v \triangleq [v_1 \ \dots \ v_n]^T$  分别为误差向量和辅助控制(辅助反馈)向量.

对于第 1 个子系统:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = \dot{x}_1 = a_1(x_1)x_1 + b_1(x_1)u_1 + a_{12}(x_2)x_2 = \\ a_1(z_1)z_1 + b_1(z_1)u_1 + a_{12}(x_2)(z_2 + v_1). \end{aligned} \quad (11)$$

假设

$$u_1 = \left[ 1 - \frac{a_{12}(x_2)}{b_1(z_1)} \right] v_1, \quad (12)$$

则第 1 个子系统可改写为

$$\dot{z}_1 = a_1(z_1)z_1 + b_1(z_1)v_1 + a_{12}(x_2)z_2. \quad (13)$$

定义第 1 个辅助子系统  $\dot{z}_1 = a_1(z_1)z_1 + b_1(z_1)v_1$ , 其目标函数为

$$J_1 = \frac{1}{2} s_1 z_1^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [q_1(z_1)z_1^2 + r_1(z_1)v_1^2] dt. \quad (14)$$

其中:  $s_1$  为正的常数;  $q_1(z_1), r_1(z_1)$  为  $z_1$  的正定函数.

由标量系统的结论可得

$$v_1 = -b_1(z_1)r_1^{-1}(z_1)p_1(z_1)z_1. \quad (15)$$

其中

$$p_1(z_1) = r_1(z_1)b_1^{-2}(z_1)[a_1(z_1) + \sqrt{a_1^2(z_1) + q_1(z_1)b_1^2(z_1)r_1^{-1}(z_1)}].$$

对于第 2 个子系统:

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{v}_1 = \\ a_2(x_2)x_2 + b_2(x_2)u_2 + a_{23}(x_3)(z_3 + v_2) - \\ \frac{\partial v_1}{\partial z_1} [a_1(z_1)z_1 + b_1(z_1)v_1 + a_{12}(x_2)z_2]. \end{aligned} \quad (16)$$

假设

$$\begin{aligned} u_2 = \frac{1}{b_2(x_2)} [a_2(z_2)z_2 - a_2(x_2)x_2 + \\ \frac{\partial v_1}{\partial z_1} (a_1(z_1)z_1 + b_1(z_1)v_1 + a_{12}(x_2)z_2)] + \\ \frac{1}{b_2(x_2)} [b_2(z_2) - a_{23}(x_3)]v_2 - \\ \frac{a_{12}(x_2)}{b_2(x_2)} p_1(z_1)p_2^{-1}(z_2)z_1, \end{aligned} \quad (17)$$

则第 2 个子系统可改写为

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = a_2(z_2)z_2 + b_2(z_2)v_2 + a_{23}(x_3)z_3 - \\ a_{12}(x_2)p_1(z_1)p_2^{-1}(z_2)z_1. \end{aligned} \quad (18)$$

定义第 2 个辅助子系统  $\dot{z}_2 = a_2(z_2)z_2 + b_2(z_2)v_2$ , 其目标函数为

$$J_2 = \frac{1}{2} s_2 z_2^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [q_2(z_2)z_2^2 + r_2(z_2)v_2^2] dt. \quad (19)$$

其中:  $s_2$  为正的常数;  $q_2(z_2), r_2(z_2)$  为  $z_2$  的正定函数.

$$v_2 = -b_2(z_2)r_2^{-1}(z_2)p_2(z_2)z_2, \quad (20)$$

其中

$$p_2(z_2) = r_2(z_2)b_2^{-2}(z_2)[a_2(z_2) + \sqrt{a_2^2(z_2) + q_2(z_2)b_2^2(z_2)r_2^{-1}(z_2)}].$$

对于第  $i(i = 3, \dots, n-1)$  个子系统:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i = \dot{x}_i - \dot{v}_{i-1} = \\ a_i(x_i)x_i + b_i(x_i)u_i + a_{i,i+1}(x_{i+1})(z_{i+1} + v_i) - \\ \frac{\partial v_{i-1}}{\partial z_{i-1}} [a_{i-1}(z_{i-1})z_{i-1} + b_{i-1}(z_{i-1})v_{i-1} + a_{i-1,i}(x_i)z_i - \\ a_{i-2,i-1}(x_{i-1})p_{i-2}(z_{i-2})p_{i-1}^{-1}(z_{i-1})z_{i-2}]. \end{aligned} \quad (21)$$

假设

$$\begin{aligned} u_i = \frac{1}{b_i(x_i)} \frac{\partial v_{i-1}}{\partial z_{i-1}} [a_{i-1}(z_{i-1})z_{i-1} + b_{i-1}(z_{i-1})v_{i-1} + \\ a_{i-1,i}(x_i)z_i - a_{i-2,i-1}(x_{i-1})p_{i-2}(z_{i-2})p_{i-1}^{-1}(z_{i-1})z_{i-2}] + \\ \frac{1}{b_i(x_i)} [a_i(z_i)z_i - a_i(x_i)x_i] + \frac{1}{b_i(x_i)} [b_i(z_i) - \\ a_{i,i+1}(x_{i+1})]v_i - \frac{a_{i-1,i}(x_i)}{b_i(x_i)} p_{i-1}(z_{i-1})p_i^{-1}(z_i)z_{i-1}, \end{aligned} \quad (22)$$

则第  $i$  个子系统可改写为

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= a_i(z_i)z_i + b_i(z_i)v_i + a_{i,i+1}(x_{i+1})z_{i+1} - \\ & a_{i-1,i}(x_i)p_{i-1}(z_{i-1})p_i^{-1}(z_i)z_{i-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

定义第  $i$  个辅助子系统  $\dot{z}_i = a_i(z_i)z_i + b_i(z_i)v_i$ , 其目标函数为

$$J_i = \frac{1}{2} s_i z_i^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [q_i(z_i)z_i^2 + r_i(z_i)v_i^2] dt. \quad (24)$$

其中:  $s_i$  为正的常数;  $q_i(z_i), r_i(z_i)$  为  $z_i$  的正定函数.

$$v_i = - b_i(z_i)r_i^{-1}(z_i)p_i(z_i)z_i, \quad (25)$$

其中

$$p_i(z_i) = r_i(z_i)b_i^{-2}(z_i)[a_i(z_i) + \sqrt{a_i^2(z_i) + q_i(z_i)b_i^2(z_i)r_i^{-1}(z_i)}].$$

对于第  $n$  个子系统:

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= \dot{x}_n - \dot{v}_{n-1} = a_n(x_n)x_n + b_n(x_n)u_n - \\ & \frac{\partial v_{n-1}}{\partial z_{n-1}}[a_{n-1}(z_{n-1})z_{n-1} + b_{n-1}(z_{n-1})v_{n-1} + a_{n-1,n}(x_n)z_n - \\ & a_{n-2,n-1}(x_{n-1})p_{n-2}(z_{n-2})p_{n-1}^{-1}(z_{n-1})z_{n-1}] \end{aligned} \quad (26)$$

假设

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{b_n(z_n)}{b_n(x_n)}v_n - \frac{a_{n-1,n}(x_n)}{b_n(x_n)}p_{n-1}(z_{n-1})p_n^{-1}(z_n)z_{n-1} + \\ & \frac{1}{b_n(x_n)}[a_n(z_n)z_n - a_n(x_n)x_n] + \\ & \frac{1}{b_n(x_n)}\frac{\partial v_{n-1}}{\partial z_{n-1}}[a_{n-1}(z_{n-1})z_{n-1} + b_{n-1}(z_{n-1})v_{n-1} + \\ & a_{n-1,n}(x_n)z_n - a_{n-2,n-1}(x_{n-1})p_{n-2}(z_{n-2})p_{n-1}^{-1}(z_{n-1})z_{n-1}]. \end{aligned} \quad (27)$$

则第  $n$  个子系统可改写为

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= a_n(z_n)z_n + b_n(z_n)v_n - \\ & a_{n-1,n}(x_n)p_{n-1}(z_{n-1})p_n^{-1}(z_n)z_{n-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

定义第  $n$  个辅助子系统  $\dot{z}_n = a_n(z_n)z_n + b_n(z_n)v_n$ , 其目标函数为

$$J_n = \frac{1}{2} s_n z_n^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [q_n(z_n)z_n^2 + r_n(z_n)v_n^2] dt. \quad (29)$$

其中:  $s_n$  为正的常数;  $q_n(z_n), r_n(z_n)$  为  $z_n$  的正定函数.

$$v_n = - b_n(z_n)r_n^{-1}(z_n)p_n(z_n)z_n, \quad (30)$$

其中

$$p_n(z_n) = r_n(z_n)b_n^{-2}(z_n)[a_n(z_n) +$$

$$\sqrt{a_n^2(z_n) + q_n(z_n)b_n^2(z_n)r_n^{-1}(z_n)}].$$

**定理 1** 由上面定义的控制变量  $u_i (i = 1, \dots, n)$  可镇定原系统.

**证** 对上面的辅助系统定义一个 Lyapunov 函数:

$$V(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^n \int_0^{z_i} \tau p_i(\tau) d\tau. \quad (31)$$

由  $a_i(x_i), b_i(x_i)$  连续、有界, 且  $b_i(x_i) \neq 0$  可知,  $p_i(z_i)$  为正定的有界函数, 由此可知,  $V(z_1, \dots, z_n)$  正定且径向无界. 则

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^n z_i p_i(z_i) \dot{z}_i = \\ & z_1 p_1(z_1)[a_1(z_1)z_1 + b_1(z_1)v_1 + a_{12}(x_2)z_2] + \\ & \sum_{j=2}^{n-1} z_j p_j(z_j)[a_j(z_j)z_j + b_j(z_j)v_j + a_{j,j+1}(x_{j+1})z_{j+1} - \\ & a_{j-1,j}(x_j)p_{j-1}(z_{j-1})p_j^{-1}(z_j)z_{j-1}] + \\ & z_n p_n(z_n)[a_n(z_n)z_n + b_n(z_n)v_n - \\ & a_{n-1,n}(x_n)p_{n-1}(z_{n-1})p_n^{-1}(z_n)z_{n-1}] = \\ & \sum_{i=1}^n z_i p_i(z_i)[a_i(z_i)z_i + b_i(z_i)v_i]. \end{aligned} \quad (32)$$

将

$$p_i(z_i) = r_i(z_i)b_i^{-2}(z_i)[a_i(z_i) + \sqrt{a_i^2(z_i) + q_i(z_i)b_i^2(z_i)r_i^{-1}(z_i)}]$$

和  $v_i = - b_i(z_i)r_i^{-1}(z_i)p_i(z_i)z_i$  带入上式, 进一步可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= - \sum_{i=1}^n r_i(z_i)b_i^{-2}(z_i)[a_i(z_i) + \\ & \sqrt{a_i^2(z_i) + q_i(z_i)b_i^2(z_i)r_i^{-1}(z_i)}] \cdot \\ & \sqrt{a_i^2(z_i) + q_i(z_i)b_i^2(z_i)r_i^{-1}(z_i)}z_i^2 < 0. \end{aligned} \quad (33)$$

由 Lyapunov 稳定性定理<sup>[8]</sup>, 上述  $n$  个辅助子系统在  $z_{ei} = 0$  处是全局渐近稳定的, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

由式(10)可知,  $x_1 = z_1$ , 故  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$ ; 由  $z_{i+1} = x_{i+1} - v_i(z_i) (i = 1, \dots, n-1)$  可知:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{i+1}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [z_{i+1}(t) + v_i(z_i(t))] =$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_i(z_i(t)), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

又由于  $v_i(z_i) = - b_i(z_i)r_i^{-1}(z_i)p_i(z_i)z_i$ , 故有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{i+1}(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

因此  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0, i = 1, \dots, n$ , 即: 原系统在  $x_{ei} = 0$  处是全局渐近稳定的, 则控制变量  $u_i$  可镇定原系统.

**定理 2** 当  $t_f = \infty$ , 由上面定义的控制变量  $u_i (i = 1, \dots, n)$  是系统关于目标函数  $\sum_{i=1}^n J_i$  的最优解.

**证** 由定理 1 可知, 辅助闭环系统是稳定的, 当  $t_f = \infty$ , 对于目标函数  $\sum_{i=1}^n J_i$ , 由动态规划可知最优解的充要条件<sup>[9]</sup>为

$$\min_v H(z, v, \lambda) \Big|_{\lambda = \frac{\partial V^*(z)}{\partial z}} = 0. \quad (34)$$

其中, Hamiltonian 函数为

$$H(z, v, \lambda) = \frac{1}{2} z^T Q z + \frac{1}{2} v^T R v + \lambda^T \dot{z}. \quad (35)$$

其中:  $Q = \text{diag}\{q_1, \dots, q_n\}$ ;  $R = \text{diag}\{r_1, \dots, r_n\}$ . 代入式(34)得

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (q_i z_i^2 + r_i v_i^2) + \left[ \frac{\partial V}{\partial z_1} \dots \frac{\partial V}{\partial z_n} \right] \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (q_i z_i^2 + r_i v_i^2) + [z_1 p_1, z_2 p_2, \dots, z_n p_n] \cdot \begin{bmatrix} a_1(z_1)z_1 + b_1(z_1)v_1 + a_{12}(x_2)z_2 \\ a_2(z_2)z_2 + b_2(z_2)v_2 + a_{23}(x_3)z_3 - a_{12}(x_2)p_1(z_1)p_2^{-1}(z_2)z_1 \\ \vdots \\ a_n(z_n)z_n + b_n(z_n)v_n - a_{n-1,n}(x_n)p_{n-1}(z_{n-1})p_n^{-1}(z_n)z_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

进一步可得

$$\sum_{i=1}^n [z_i p_i (a_i z_i + b_i v_i) + \frac{1}{2} q_i z_i^2 + \frac{1}{2} r_i v_i^2] = 0. \quad (37)$$

将  $v_i = -b_i(z_i)r_i^{-1}(z_i)p_i(z_i)z_i$  带入上式可得

$$\sum_{i=1}^n (2a_i p_i - b_i^2 r_i^{-1} p_i^2 + q_i) z_i^2 = 0. \quad (38)$$

则得到与式(6)相同的  $n$  个独立的最优解充要条件

$$2a_i p_i - b_i^2 r_i^{-1} p_i^2 + q_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (39)$$

由此可见, 当  $t_f = \infty$  时,  $u_i (i = 1, \dots, n)$  为原系统关于目标函数  $\sum_{i=1}^m J_i$  的最优解.

#### 4 仿真实例 (Simulation example)

以两输入的 2 阶非线性串联系统为例, 系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_1^2 + 3u_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + x_2 + u_2, \end{cases} \quad x(0) = [1 \quad 1]^T. \quad (40)$$

其非线性参数化方程为

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u. \quad (41)$$

其中

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 - x_1 & 1 \\ 0 & x_2^2 + 1 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} a_1(x_1) & a_{12} \\ 0 & a_2(x_2) \end{pmatrix},$$

$$B(x) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

优化的目标函数为

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) S x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x^T Q(x) x + u^T R(x) u] dt \quad (42)$$

其中  $t_f = 20$ , 取值足够大.

最优控制律为

$$u = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x)x. \quad (43)$$

其中  $P(x)$  满足下列方程:

$$P(x)A(x) + A^T(x)P(x) + Q(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) = 0.$$

利用第 3 部分 Backstepping 递推设计方法得到次优控制律, 设计参数为

$$q_1 = 50, \quad q_2 = 50, \quad r_1 = 5, \quad r_2 = 2.$$

则采用最优控制整体求解和本文提出的次优控制递推求解的调节仿真曲线分别如图 2 和图 3 所示.

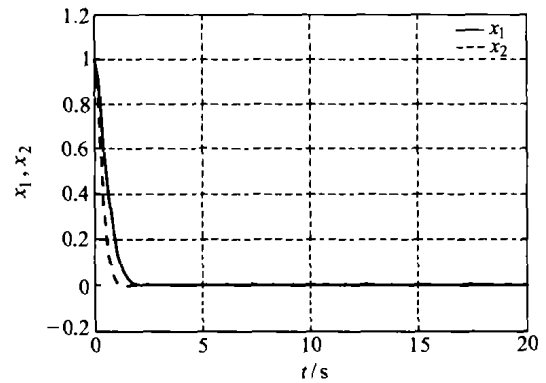


图 2 最优调节响应曲线

Fig. 2 System response under the optimal control

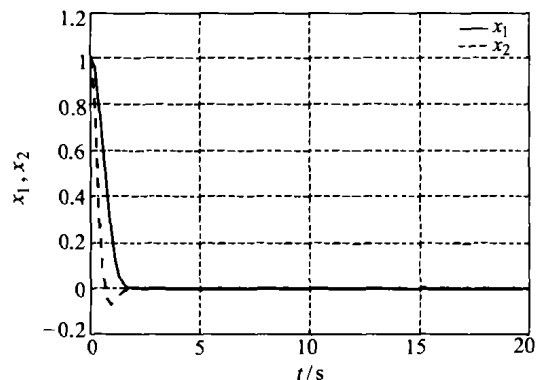


图 3 次优调节响应曲线

Fig. 3 System response under the suboptimal control

采用 Backstepping 方法递推求解和最优调节整体求解反馈控制律相比,前者在线求得次优控制律的解析解,由于避免了采用“分解-协调”控制思想中的迭代计算和两点边值问题,仿真时间大为缩短,而且由图 3 可见整个闭环系统可达到渐近稳定.

## 5 结论(Conclusions)

文中针对一类多输入非线性串联系统进行了一种次优控制的研究.基于 Backstepping 递推设计方法,结合 SDARE 技术,提出了串联系统分布式反馈控制律的设计过程,不但可在线求得控制律的解析解,而且使原闭环系统全局渐近稳定,同时证明了当  $t_f = \infty$  时,设计的反馈控制律是整个系统的最优解.通过对一个两输入的二阶串联控制系统的仿真验证了该优化设计方法的有效性.

## 参考文献(References):

- [1] SINGH M G. 大系统的动态递阶控制[M]. 北京: 科学出版社, 1983.  
(SINGH M G. *Dynamic Hierarchical Control of Large-scale Systems* [M]. Beijing: Science Press, 1983.)
- [2] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems* [M] 3rd ed. New York: Springer, 1995.
- [3] KANELLAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V, MORSE A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(11): 1241 - 1253.
- [4] 杨俊华, 吴捷, 胡跃明. 反步方法原理及在非线性和鲁棒控制中的应用[J]. *控制与决策*, 2002, 17(增): 641 - 647.  
(YANG Junhua, WU Jie, HU Yueming. Backstepping method and its applications to nonlinear robust control [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(Suppl.): 641 - 647.)
- [5] CLOUTIER J R. State-dependent Riccati equation techniques: an overview [C] // *Proc of the American Control Conference*. Albuquerque, MN, USA: [s. n.], 1997: 932 - 936.
- [6] QU Z H, CLOUTIER J R. A new suboptimal control design for cascaded non-linear systems [J]. *Optimal Control Applications & Methods*, 2002, 23(6): 303 - 328.
- [7] 李奇安, 李平, 于海斌, 等. 串联系统的多前馈-反馈广义预测控制[J]. *控制与决策*, 2002, 17(4): 402 - 406.  
(LI Qi'an, LI Ping, YU Haibin, et al. Multiple feed-forward and feedback generalized predictive control for cascade system [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(4): 402 - 406.)
- [8] SEPULCHRE R, JANKOVIC M, KOKOTOVIC P V. *Constructive Nonlinear Control* [M]. New York: Springer, 1997.
- [9] JACOBSON D H. *Extensions of Linear Quadratic Control, Optimization and Matrix Theory* [M]. New York: Academic Press, 1977.

## 作者简介:

张 艳 (1977—), 女, 现为上海交通大学自动化研究所在读博士研究生, 主要研究领域为分布式预测控制、复杂系统的优化与控制, E-mail: susan\_zy@sjtu.edu.cn;

李少远 (1965—), 男, 现为上海交通大学自动化研究所教授, 博士生导师, 1997 年南开大学计算机与系统科学系获得博士学位, 主要研究领域为自适应预测控制、满意优化控制和智能控制的理论、方法和应用, E-mail: syli@sjtu.edu.cn.