文章编号: 1000-8152(2005)03-0499-04

多时滞Lurie控制系统的时滞相关鲁棒稳定性

陈东彦, 刘伟华

(哈尔滨理工大学 信息与计算科学系,黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 时滞Lurie控制系统的稳定性条件与Lyapunov函数的选取有关.本文对多时滞Lurie控制系统进行了变换,然后选择一个适当的Lyapunov函数,利用Lyapunov稳定性方法并结合Moon引理,得到了多时滞Lurie控制系统的时滞相关鲁棒稳定性判别条件,该条件是以线性矩阵不等式(LMI)给出的,可用Matlab求解.最后用一个算例验证了所得方法的有效性.

关键词: 多时滞Lurie控制系统; Lyapunov函数;时滞相关鲁棒稳定性;线性矩阵不等式

中图分类号: TP13　　**文献标识码:** A

Delay-dependent robust stability for Lurie control systems with multiple time-delays

CHEN Dong-yan, LIU Wei-hua

(Department of Information and Computation Science, Harbin University of Science and Technology, Heilongjiang Harbin 150080, China)

Abstract: The stability condition of Lurie control systems with time-delay relates to the choice of Lyapunov function. In this paper, the system with multiple time-delays is transformed, then a suitable Lyapunov function is selected, the delay-dependent robust stability condition for Lurie control systems with multiple time-delays is obtained by applying Lyapunov stability method and associating with Moon's lemma, and the condition is given by a linear matrix inequality (LMI). Finally, the effectiveness of the condition is illustrated by an example.

Key words: Lurie control systems with multiple time-delays; Lyapunov function; delay-dependent robust stability; linear matrix inequality (LMI)

1 引言(Introduction)

Lurie控制系统是一类重要的非线性系统,关于Lurie控制系统稳定性的研究已获得了很多成果[1~3].由于时滞和不确定性的广泛存在,不确定时滞Lurie控制系统在实际中也经常遇到,其鲁棒稳定性研究也得到了的重视,Lyapunov方法是研究Lurie控制系统的主要方法,目前的研究结果包含时滞无关鲁棒稳定性[4~6]和时滞相关鲁棒稳定性[8~10].文献[4]根据Lyapunov稳定性理论,提出了不确定时滞Lurie控制系统鲁棒稳定的充分条件;文献[5]讨论了具有时滞反馈的Lurie控制系统,分别给出了一个和多个滞后反馈的系统鲁棒稳定的充分条件;文献[6]利用Lyapunov泛函方法,讨论了具有结构参数扰动的滞后型Lurie控制系统,得到以LMI给出的鲁棒稳定性充分条件;文献[7]利用Razumikhin方法,给出具有时滞的Lurie控制系统鲁棒稳定的时滞相关条件;文献[8]利用Bellman-Gronwell不等式和Lyapunov泛函方法,给出了不确定时滞Lurie控制系统时滞相关鲁棒稳定性条件;文献[9]通过选择适当的Lyapunov函数,给出时滞Lurie控制系统基于LMI的鲁棒稳定性条件.

本文讨论多时滞Lurie控制系统的鲁棒稳定性,通过系统变换,构造一个适当的Lyapunov函数,应用Lyapunov方法并结合Moon引理,给出了系统时滞相关鲁棒稳定性判别条件,且所得条件是以线性矩阵不等式给出的,可用Matlab求解.最后给出一个算例来验证研究结果的有效性.

2 主要结果(Main results)

考虑多时滞Lurie控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum\limits_{i=0}^{m} A_i x(t-\tau_i) + bf(\sigma(t)), \\ \sigma(t) = c^{\mathrm{T}} x(t), \\ f(\cdot) \in K[0,\infty) = \\ \{f(\cdot) \mid f(0)=0,\ 0 < \sigma f(\sigma), \sigma \neq 0, f \text{ 连续}\}. \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期:2003-05-06; 收修改稿日期:2004-09-17.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10471031).

其中：$x(t)\in\mathbb{R}^n$ 是状态向量，$A_i\in\mathbb{R}^{n\times n}(i=0,1,\cdots,m)$ 和 $b,c\in\mathbb{R}^n$ 是系统矩阵和向量，$\tau_0=0$，$\tau_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$ 是系统的时滞.由于

$$x(t-\tau_i)=x(t)-\int_{t-\tau_i}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s,$$

将其代入系统(1)，得

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=0}^{m}A_ix(t)-\sum_{i=1}^{m}A_i\int_{t-\tau_i}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s+bf(\sigma(t)),\tag{2}$$

且系统(2)的鲁棒稳定性蕴含系统(1)的鲁棒稳定性.

引理 1[10](Moon) 设 $a(\cdot)\in\mathbb{R}^{n_a},b(\cdot)\in\mathbb{R}^{n_b}$，$N(\cdot)\in\mathbb{R}^{n_a\times n_b}$ 定义在区间 J 上，则对任意矩阵 $X\in\mathbb{R}^{n_a\times n_a},Y\in\mathbb{R}^{n_a\times n_b},Z\in\mathbb{R}^{n_b\times n_b}$，有

$$-2\int_J a^{\mathrm{T}}(s)N(s)b(s)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\int_J\begin{bmatrix}a(s)\\b(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}X & Y-N(\cdot)\\Y^{\mathrm{T}}-N^{\mathrm{T}}(\cdot) & Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a(s)\\b(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s.$$

其中 X,Y,Z 满足$\begin{bmatrix}X & Y\\Y^{\mathrm{T}} & Z\end{bmatrix}\geqslant 0$.

定理 1 时滞不确定 Lurie 控制系统(1)是鲁棒稳定的，如果存在对称正定矩阵 P,Q_i,W_i 和矩阵 X_i,Y_i,Z_i 及正数 α,β，满足线性矩阵不等式组

$$\begin{cases}M<0,\\ \begin{bmatrix}X_i & Y_i\\Y_i^{\mathrm{T}} & Z_i\end{bmatrix}\geqslant 0,\ W_i-Z_i\geqslant 0,\\ i=1,2,\cdots,m,\end{cases}\tag{3}$$

其中

$$M=(M_{i,j})_{(m+2)\times(m+2)},$$

$$M_{1,1}=A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0^{\mathrm{T}}+A_0^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{m}\tau_iW_i)A_0+\sum_{i=1}^{m}(\tau_iX_i+Q_i+Y_i+Y_i^{\mathrm{T}}),$$

$$M_{1,k}=-Y_{k-1}+PA_{k-1}+A_0^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{m}\tau_iW_i)A_{k-1},$$

$$M_{1,m+2}=Pb+\frac{1}{2}\beta A_0^{\mathrm{T}}c+A_0^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{m}\tau_iW_i)b+\frac{1}{2}\alpha c,$$

$$M_{k,k}=-Q_{k-1}+A_{k-1}^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{m}\tau_iW_i)A_{k-1},$$

$$M_{k,m+2}=\frac{1}{2}\beta A_{k-1}^{\mathrm{T}}c+A_{k-1}^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{m}\tau_iW_i)b,$$

$$k=2,3,\cdots,m+1,$$

$$M_{m+2,m+2}=\beta c^{\mathrm{T}}b+b^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{m}\tau_iW_i)b,$$

$$M_{i,j}=A_{i-1}^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{m}\tau_iW_i)A_{j-1},$$

$$i,j=2,3,\cdots,m+1,i<j.$$

证 对系统(2)，取 Lyapunov 函数

$$V=V_1+V_2+V_3,$$

$$V_1=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\beta\int_0^{\sigma}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

$$V_2=\sum_{i=1}^{m}\int_{-\tau_i}^{0}\mathrm{d}\theta\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)W_i\dot{x}(s)\mathrm{d}s,$$

$$V_3=\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Q_ix(s)\mathrm{d}s,$$

$$P>0,\ W_i>0,\ Q_i>0,\ \beta>0.$$

V 沿系统(2)对时间的导数为

$$\dot{V}=\dot{V}_1+\dot{V}_2+\dot{V}_3,$$

$$\dot{V}_1=x^{\mathrm{T}}(t)[(\sum_{i=0}^{m}A_i)^{\mathrm{T}}P+P(\sum_{i=0}^{m}A_i)]x(t)-2x^{\mathrm{T}}(t)P(\sum_{i=1}^{m}A_i\int_{t-\tau_i}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s)+2x^{\mathrm{T}}(t)Pbf(\sigma)+\beta c^{\mathrm{T}}\cdot[\sum_{i=0}^{m}A_ix(t-\tau_i)+bf(\sigma)]f(\sigma),$$

$$\dot{V}_2=\sum_{i=1}^{m}\int_{-\tau_i}^{0}[\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)W_i\dot{x}(t)-\dot{x}^{\mathrm{T}}(t+\theta)W_i\dot{x}(t+\theta)]\mathrm{d}\theta=[\sum_{i=0}^{m}A_ix(t-\tau_i)+bf(\sigma(t))]^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{m}\tau_iW_i)\cdot[\sum_{i=0}^{m}A_ix(t-\tau_i)+bf(\sigma(t))]-\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)W_i\dot{x}(s)\mathrm{d}s,$$

$$\dot{V}_3=x^{\mathrm{T}}(t)\sum_{i=1}^{m}Q_ix(t)-\sum_{i=1}^{m}x^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)Q_ix(t-\tau_i).$$

由 Moon 引理，有

$$-2x^{\mathrm{T}}(t)P(\sum_{i=1}^{m}A_i\int_{t-\tau_i}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s)\leqslant\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i}^{t}\begin{bmatrix}x(t)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}X_i & Y_i-PA_i\\Y_i^{\mathrm{T}}-A_i^{\mathrm{T}}P & Z_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s=$$

$$x^{\mathrm{T}}(t)\sum_{i=1}^{m}(\tau_iX_i+Y_i+Y_i^{\mathrm{T}}-PA_i-A_i^{\mathrm{T}}P)x(t)-2x^{\mathrm{T}}(t)\sum_{i=1}^{m}(Y_i-PA_i)x(t-\tau_i)+\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z_i\dot{x}(s)\mathrm{d}s.$$

这里 $X_i,Y_i,Z_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$，满足式(3).所以

$$\dot{V}\leqslant$$

$$x^{\mathrm{T}}(t)[(\sum_{i=0}^{m}A_i)^{\mathrm{T}}P + P(\sum_{i=0}^{m}A_i) +$$

$$A_0^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{m}\tau_iW_i)A_0 + \sum_{i=1}^{m}(\tau_iX_i + Y_i + Y_i^{\mathrm{T}} - PA_i -$$

$$A_i^{\mathrm{T}}P + Q_i)]x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)[Pb + \frac{1}{2}\beta A_0^{\mathrm{T}}c +$$

$$A_0^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{m}\tau_iW_i)b + \frac{1}{2}\alpha c]f(\sigma) - 2x^{\mathrm{T}}(t)\sum_{i=1}^{m}(Y_i - PA_i)\cdot$$

$$x(t-\tau_i) + 2x^{\mathrm{T}}(t)A_0^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{m}\tau_iW_i)\sum_{i=1}^{m}A_ix(t-\tau_i) +$$

$$2\sum_{i=1}^{m}[x^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)A_i^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{m}\tau_iW_i)b]f(\sigma) +$$

$$\sum_{i=1}^{m}x^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)\beta A_i^{\mathrm{T}}cf(\sigma)+\sum_{i=1}^{m}x^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)A_i^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{m}\tau_iW_i)\cdot$$

$$\sum_{i=1}^{m}A_ix(t-\tau_i) + [\beta c^{\mathrm{T}}b + b^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{m}\tau_iW_i)b]f^2(\sigma) -$$

$$\alpha\sigma f(\sigma) - \sum_{i=1}^{m}x(t-\tau_i)Q_ix(t-\tau_i) -$$

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)(W_i - Z_i)\dot{x}(s)\mathrm{d}s.$$

记

$$y^{\mathrm{T}} = [x^{\mathrm{T}}(t)\ x^{\mathrm{T}}(t-\tau_1)\ \cdots\ x^{\mathrm{T}}(t-\tau_m)\ f(\cdot)],$$

$$M = (M_{i,j})_{(m+2)\times(m+2)},$$

则

$$\dot{V} \leqslant$$

$$y^{\mathrm{T}}My - \sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)(W_i - Z_i)\dot{x}(s)\mathrm{d}s - \alpha\sigma f(\sigma).$$

因此当定理 1 条件成立时, $\dot{V} < 0$.　　证毕.

注 1　当系统(1)中 $m = 1$ 时,定理 1 中的线性矩阵不等式组成为

$$\begin{cases} M < 0, \\ \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ Y_1^{\mathrm{T}} & Z_1 \end{bmatrix} \geqslant 0,\ W_1 - Z_1 \geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

其中 M 由下式(5)给出

$$M = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0^{\mathrm{T}}+\tau_1A_0^{\mathrm{T}}W_1A_0+ \\ \tau_1X_1+Q_1+Y_1+Y_1^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} & -Y_1+PA_1+\tau_1A_0^{\mathrm{T}}W_1A_1 & \begin{pmatrix} Pb+\frac{1}{2}\beta A_0^{\mathrm{T}}c+ \\ \tau_1A_0^{\mathrm{T}}W_1b+\frac{1}{2}\alpha c \end{pmatrix} \\ * & -Q_1+\tau_1A_1^{\mathrm{T}}W_1A_1 & \frac{1}{2}\beta A_1^{\mathrm{T}}c+\tau_1A_1^{\mathrm{T}}W_1b \\ * & * & \beta c^{\mathrm{T}}b+\tau_1b^{\mathrm{T}}W_1b \end{bmatrix}, \tag{5}$$

其中“ * ”为相应矩阵子块的转置.

3　算例(Example)

算例　设系统(1)中的系统矩阵为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.5 \\ 0.5 & -0.2 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}.$$

解　以式(4)为约束条件,以时滞 τ 为目标函数,利用 Matlab 中 mincx 命令求解得 $\tau = 0.9278$, 此时式(4)的解为

$$P = \begin{bmatrix} 2.2139 & -0.0194 \\ -0.0194 & 2.0735 \end{bmatrix},$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1.2492 & 0.0423 \\ 0.0423 & 1.2788 \end{bmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} -0.3105 & 0.0445 \\ 0.0445 & -0.1145 \end{bmatrix},$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0.6591 & -0.0671 \\ -0.0671 & 0.6144 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = 1.6956,\ \beta = 1.0565,$$

即系统对时滞 $\tau \leqslant 0.9278$ 均是鲁棒稳定的.

这较文献[8]和[10]中的时滞界 $\tau < 0.3053$ 和 $\tau < 0.3230$ 有了较大的改进,说明本文所得结果具有较小的保守性.

4　结论(Conclusions)

本文对多时滞 Lurie 控制系统通过系统变换,构造一个适当的 Lyapunov 函数,应用 Lyapunov 方法和 Moon 引理,给出了系统时滞相关鲁棒稳定性判别条件,且所得条件是以 LMI 形式给出的,可用 Matlab 软件方便地求解,最后用一个算例验证了所得结果的有效性和较小保守性.

参考文献(References):

[1] GRUJIC L J T, PETTKOVSKI D J. On robustness of Lurie systems with multi non-linearities [J]. *Automatica*, 1987, 23(3): 327 - 334.

[2] GAN Z, GE W, ZHAO S, et al. Robust absolute stability of general Lurie type nonlinear control systems [J]. *Mathematics Application*, 1999, 12(1): 121 - 124.

[3] TESI A, VIEINO A. Robust absolute stability of Lurie control systems in parameter space [J]. *Automatica*, 1991, 27(1): 147 - 151.

[4] 刘祖润,张志飞.时滞控制系统鲁棒稳定性分析[J].信息与控制,2000,29(2):164 - 167.

(LIU Zurun, ZHANG Zhifei. Robust stability of Lurie control system with delay [J]. *Information and Control*, 2000, 29(2): 164 - 167.)

[5] 年晓红,黄力民.Lurie 滞后反馈控制系统绝对稳定的鲁棒扰动界[J].信息与控制,2001,30(2):155 - 158.

(NIAN Xiaohong, HUANG Limin. Absolute stability for Lurie control systems with time-delay feedback controllers [J]. *Information and Control*, 2001, 30(2): 155 - 158.)

[6] 冯俊涛,年晓红.控制系统的鲁棒绝对稳定性—LMI方法[J].长沙铁道学院学报,2002,20(2):37-42.
(FENG Juntao, NIAN Xiaohong. Robust absolute stability of uncertain time-delay Lurie control systems—LMI approach [J]. *J of Changsha Railway University*, 2002, 20(2): 37 - 42.)

[7] 年晓红.Lurie控制系统绝对稳定的时滞相关条件[J].自动化学报,1999,25(4):564-566.
(NIAN Xiaohong. Delay dependent conditions for absolute stability of Lurie type control systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(4): 564 - 566.)

[8] 年晓红,樊晓平.具有时滞的不确定鲁里叶控制系统的鲁棒稳定性[J].控制理论与应用,2001,18(6):925-928.
(NIAN Xiaohong, FAN Xiaoping. Robust stability for uncertain Lurie control systems with time-delay [J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(6): 925 - 928.)

[9] 徐炳吉,廖晓昕.Lurie控制系统的时滞相关绝对稳定性判据[J].自动化学报,2002,28(2):317-320.
(XU Bingji, LIAO Xiaoxin. Absolute stability criteria of delay-dependent for Lurie control systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(2): 317 - 320.)

[10] MOON Y S, PARK P, KWON W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems [J]. *Int J Control*, 2001, 74(14): 1447 - 1455.

作者简介:

陈东彦 (1964—),女,哈尔滨理工大学信息与计算科学系教授,1985年、1988年和2000年分别获东北师范大学理学学士学位、吉林大学理学硕士学位和哈尔滨工业大学工学博士学位,主要研究方向为时滞系统鲁棒控制,E-mail: dychen_2004@yahoo.com.cn;

刘伟华 (1971—),女,1994年、1997年分别获得哈尔滨师范大学理学学士学位和黑龙江大学理学硕士学位,现为哈尔滨理工大学信息与计算科学系讲师,研究方向为时滞系统鲁棒控制.

(上接第498页)

(ZHUANG Kaiyu, ZHANG Keqin, SU Hongye. et al. The Terminal sliding mode control of high-order nonlinear systems [J]. *J of Zhejiang University*. 2002, 36(5): 482 - 485, 439.)

作者简介:

胡剑波 (1965—),男,空军工程大学工程学院训练部副部长、空军上校、博士,主要从事装备信息化、控制理论及其应用研究,E-mail: autosys@vip.sina.com;

时满宏 (1976—),男,空军工程大学工程学院硕士研究生,上尉,主要从事航空装备技术保障和专家控制研究;

庄开宇 (1970—),男,浙江大学博士,主要从事企业信息化、控制理论及其应用研究;

褚 健 (1963—),男,浙江大学先进控制研究所所长、教授、首批国家长江学者计划特聘教授,主要从事企业综合自动化、控制理论和应用研究;

苏宏业 (1969—),男,浙江大学先进控制研究所副所长、教授,主要从事企业综合自动化、控制理论和应用研究.