第 22 卷第 3 期
2005 年 6 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol.22 No.3
Jun. 2005

文章编号: 1000 - 8152(2005)03 - 0503 - 04

具有结构不确定性的时滞系统的最优非脆弱保性能控制

熊军林，张庆灵
(东北大学 理学院,辽宁 沈阳 110004)

摘要: 对一类具有结构不确定性的线性时滞系统的最优非脆弱保性能控制问题进行了研究.以线性矩阵不等式的形式给出了设计非脆弱保性能控制律的一个充分条件.然后给出了在使性能指标上界最小的意义下,最优非脆弱保性能控制律的设计算法.最后用例子演示了方法的有效性.

关键词: 不确定系统; 保性能控制; 时滞的; 非脆弱的; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13　　　**文献标识码**: A

Optimal non-fragile guaranteed cost control for time-delay systems with structured uncertainties

XIONG Jun-Lin, ZHANG Qing-Ling
(College of Science, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: The problem of optimal non-fragile guaranteed cost control for a class of linear time-delay systems with structured uncertainties was considered. A sufficient condition is established in terms of linear matrix inequalities for the existence of the non-fragile guaranteed cost controllers. Also, an optimization procedure is given to select the optimal controller in the sense of minimizing the upper bound of the quadratic performance index. Finally, numerical examples are used to illustrate the effectiveness of the theory.

Key words: uncertain systems; guaranteed cost control; delay; non-fragile; linear matrix inequalities(LMIs)

1 引言(Introduction)

不确定性历来是导致控制系统不稳定和性能指标恶化的根源之一,保性能控制理论的优点就在于,保证闭环系统鲁棒稳定的同时,又保证了系统不确定性引起的恶化后的性能指标小于事先估计的性能指标上界[1].该上界使人们对系统性能的恶化程度有了一定程度的了解.基于这一思想,大量的学者针对各种系统做了广泛研究[1~3].但现有结果很少考虑到不确定性的结构特点,而系统中的不确定性往往都可以表示为结构化的不确定性[4,5].因此有必要对如何利用不确定性的结构特性,来提高系统的性能做进一步的研究.

本文就是利用不确定性的结构特点,讨论了一类具有结构不确定性的线性时滞系统的最优非脆弱保性能控制问题.提出了一种解决这类问题的设计和优化方法.并通过例子说明,所提供的算法是对现有结果的一种改进.

2 问题描述(Problem fomulation)

考虑由状态方程描述的不确定线性时滞连续系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-h) + B_1 w(t) + B_2 u(t), \\ \Psi(t) = Cx(t) + C_1 x(t-h) + D_1 w(t) + D_2 u(t), \\ w(t) = \Delta(t)\Psi(t), \\ x(t) = \phi(t),\ t \in [-h, 0]. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态, $;(t) \in \mathbb{R}^m$ 是系统的控制输入; $\Psi(t) \in \mathbb{R}^p$ 和 $w(t) \in \mathbb{R}^p$ 是用来描述系统不确定性 $\Delta(t)$ 的外部信号; $h > 0$ 是系统的时滞; $\phi(\cdot)$ 是系统初始条件. $A, A_1, B_1, B_2, C, C_1, D_1$ 和 D_2 是已知的具有适当维数的定常实数矩阵.假设不确定性 $\Delta(t)$ 属于下面范数有界的时变的结构化的不确定性集合

$$BU_C: = \{\Delta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{p\times p}, \|\Delta(t)\| \leqslant 1, \Delta(t) \in U\}.$$

其中

$$U: = \{\text{block diag}(\delta_1 I_{k_1}, \cdots, \delta_s I_{k_s}, \Delta_1, \cdots, \Delta_f):$$

收稿日期:2003 - 06 - 23; 收修改稿日期:2004 - 06 - 01.
基金项目:辽宁省普通高校学科带头人基金资助项目(124210).

$\delta_i \in \mathbb{R}, i=1,2,\cdots,s, \Delta_j \in \mathbb{R}^{k_{s+j}\times k_{s+j}}, j=1,2,\cdots,f\}$.

考虑二次性能指标函数

$$J=\int_0^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t)+u^{\mathrm{T}}(t)R_2u(t)]\mathrm{d}t. \quad (2)$$

其中矩阵 $R_1>0, R_2>0$.

考虑非脆弱无记忆状态反馈控制律

$$u^*(t)=Gx(t). \quad (3)$$

其中矩阵 $G\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 是待定的控制矩阵,并假设控制律(3)具有如下的扰动

$$\begin{cases} u(t)=Gx(t)+B_Gw_G(t),\\ \Psi_G(t)=C_Gx(t)+D_Gw_G(t),\\ w_G(t)=\Delta_Gx(t)+\Psi_G(t). \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\Psi_G(t)\in\mathbb{R}^q$ 和 $w_G(t)\in\mathbb{R}^q$ 是用来描述控制律扰动 $\Delta_G(t)$ 的外部信号. B_G, C_G 和 D_G 是已知的具有适当维数的定常实数矩阵. 假设 $\Delta_G(t)$ 属于下面范数有界的时变的结构化的不确定性集合

$BU_G:=\{\Delta_G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{q\times q}, \|\Delta_G(t)\|\leqslant 1, \Delta_G(t)\in U_G\}$.

其中

$U_G:=$

$\{\text{block-diag}(\delta_1I_{g_1},\cdots,\delta_vI_{g_v},\Delta_1,\cdots,\Delta_h):$

$\delta_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\cdots,v, \Delta_j\in\mathbb{R}^{g_{v+j}\times g_{v+j}}, j=1,2,\cdots,h.\}$.

通常称式(3)是具有扰动的状态反馈控制律(4)的标称控制律.

联合式(1)和式(4),得到闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=(A+B_2G)x(t)+A_1x(t-h)+[B_1\quad B_2B_G]\begin{bmatrix} w(t)\\ w_G(t)\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix}\Psi(t)\\ \Psi_G(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C+D_2G\\ C_G\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix} C_1\\ 0\end{bmatrix}x(t-h)+\begin{bmatrix} D_1 & D_2B_G\\ 0 & D_G\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w(t)\\ w_G(t)\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix} w(t)\\ w_G(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta & 0\\ 0 & \Delta_G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi(t)\\ \Psi_G(t)\end{bmatrix},\\ x(t)=\phi(t),\ t\in[-h,0]. \end{cases} \quad (5)$$

定义 1 考虑不确定时滞连续系统(1)和性能函数(2),如果对所有的系统不确定性 $\Delta\in BU_C$ 和控制律扰动 $\Delta_G\in BU_G$,存在一个标称控制律(3)和一个正数 J^* 使得闭环系统(5)鲁棒稳定,且性能函数(2)的闭环值满足 $J\leqslant J^*$,那么就称控制律(3)是不确定时滞连续系统(1)的一个非脆弱保性能控制律,并称 J^* 为闭环系统的性能函数上界.

为了利用不确定性的结构特点,引入如下的两个实对称正定矩阵集合[5]

$\Omega:=\{\text{block-diag}(S_1,\cdots,S_s,s_1I_{k_{s+1}},\cdots,s_fI_{k_{s+f}}):$

$S_i\in\mathbb{R}^{k_i\times k_i}, S_i>0, i=1,2,\cdots,s,$

$s_j\in\mathbb{R}, s_j>0, j=1,2,\cdots,f.\}$;

$\Omega_G:=\{\text{block-diag}(S_1,\cdots,S_v,s_1I_{g_{v+1}},\cdots,s_hI_{g_{v+h}}):$

$S_i\in\mathbb{R}^{g_i\times g_i}, S_i>0, i=1,2,\cdots,v,$

$s_j\in\mathbb{R}, s_j>0, j=1,2,\cdots,h.\}$.

3 保性能控制器的设计和优化(Design and optimization of guaranteed cost controllers)

下面的定理1给出了设计非脆弱保性能控制律(3)的一个充分条件.

定理 1 考虑不确定时滞连续系统(1)和性能函数(2),如果存在矩阵 $0<X=X^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\times n}, Y=Y^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\times n}, V\in\Omega, V_G\in\Omega_G$ 和 $W\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 满足线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & * & * & * & * & * & * & * & *\\ (A_1Y)^{\mathrm{T}} & -Y & * & * & * & * & * & * & *\\ (B_1V)^{\mathrm{T}} & 0 & -V & * & * & * & * & * & *\\ (B_2B_GV_G)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -V_G & * & * & * & * & *\\ CX+D_2W & C_1Y & -D_1V & D_2B_GV_G & -V & * & * & * & *\\ C_GX & 0 & 0 & D_GV_G & 0 & -V_G & * & * & *\\ X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_1^{-1} & * & *\\ W & 0 & 0 & B_GV_G & 0 & 0 & 0 & -R_2^{-1} & *\\ X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y \end{bmatrix}<0. \quad (6)$$

其中 $\bar{A} = (AX + B_2W)^{\mathrm{T}} + (AX + B_2W)$, 则一个非脆弱保性能无记忆控制律由下式给出

$$u^*(t) = WX^{-1}x(t), \tag{7}$$

并且性能函数上界为

$$J^* = x_0^{\mathrm{T}}X^{-1}x_0 + \int_{-h}^{0}x^{\mathrm{T}}(\tau)Y^{-1}x(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{8}$$

证　考虑闭环系统(5),令

$$\xi(t) = [x^{\mathrm{T}}(t) \quad x^{\mathrm{T}}(t-h) \quad w^{\mathrm{T}}(t) \quad w_G^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}},$$

设存在矩阵 $P = P^{\mathrm{T}} > 0, Q = Q^{\mathrm{T}} > 0, S \in \Omega$ 和 $S_G \in \Omega_G$ 使得不等式

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix}(A+B_2G)^{\mathrm{T}}P+\\ P(A+B_2G)+Q\end{pmatrix} & PA_1 & PB_1 & PB_2B_G \\ A_1^{\mathrm{T}}P & -Q & 0 & 0 \\ B_1^{\mathrm{T}}P & 0 & -S & 0 \\ B_G^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -S_G \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} (C+D_2G)^{\mathrm{T}} & C_G^{\mathrm{T}} \\ C_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ D_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ (D_2B_G)^{\mathrm{T}} & D_G^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (C+D_2G)^{\mathrm{T}} & C_G^{\mathrm{T}} \\ C_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ D_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ (D_2B_G)^{\mathrm{T}} & D_G^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} +$$

$$\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} R_1 [I \quad 0 \quad 0 \quad 0] + \begin{bmatrix} G^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \\ B_G^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} R_2 [G \quad 0 \quad 0 \quad B_G] < 0$$

成立.令 Ξ 为上式不等号的左侧,则有

$$\xi^{\mathrm{T}}(t)\Xi\xi(t) < 0, \ \forall \xi(t) \neq 0.$$

将上式展开,并考虑到不确定性的结构特征,得到

$$\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)P\dot{x}(t) + x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) - x^{\mathrm{T}}(t-h)Qx(t-h) + x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R_2u(t) < 0.$$

利用 Lyapunov 函数

$$V(x) := x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{t-h}^{t}x^{\mathrm{T}}(\tau)Qx(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

得到

$$x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R_2u(t) + \dot{V}(x) < 0, \tag{9}$$

因此有 $V(x) > 0, \forall x \neq 0$ 和

$$\dot{V}(x) < -[x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R_2u(t)] < 0, \quad \forall x(t) \neq 0,$$

所以不确定闭环系统(5)是鲁棒稳定的,并且 $\lim\limits_{t\to\infty}V(x) = 0$. 又由式(9)得到

$$x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R_2u(t) \leqslant -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x).$$

对上面的不等式两边从 $t = 0$ 到 $t = \infty$ 积分得到

$$J = \int_0^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R_2u(t)]\mathrm{d}t \leqslant V(x_0) := J^*.$$

因此 $\Xi < 0$ 是存在非脆弱保成本控制律的一个充分条件.利用 Schur 补定理,并进行变量代换 $X := P^{-1}, Y := Q^{-1}, V := S^{-1}, V_G := S_G^{-1}$ 和 $W := GP^{-1}$,易知 $\Xi < 0$ 等价于式(6).且式(7)就是所求的非脆弱保性能控制律.最后由 $J^* = V(x_0)$ 可得到式(8).　证毕.

下面的定理 2 给出了在最小化性能函数上界式(8)的意义下,设计最优控制律(7)的算法.

定理 2　考虑不确定时滞连续系统(1)和性能函数(2),如果下面的凸优化问题

$$\begin{cases} \min\limits_{X,Y,W,V,V_G,\alpha,M} \alpha + \mathrm{tr}(M) \\ \text{(i) 式(6) 成立}, \\ \text{(ii)} \begin{bmatrix} -\alpha & \phi^{\mathrm{T}}(0) \\ \phi(0) & -X \end{bmatrix} < 0, \\ \text{(iii)} \begin{bmatrix} -M & N^{\mathrm{T}} \\ N & -Y \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \tag{10}$$

有解 X, Y, W, V, V_G, α 和 M.那么式(7)就是在最小化性能函数上界式(8)的意义下的最优控制律,并且最优值 $\alpha + \mathrm{tr}(M)$ 就是性能函数上界的 J^* 最小值.其中 $\int_{-h}^{0}\phi(\tau)\phi^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau = NN^{\mathrm{T}}$.

证　与文献[3]定理 3 的证明类似,从略.

4　例子(Example)

例[3]　考虑如下的不确定时滞连续系统

$$\dot{x}(t) = (A + r(t)A_0)x(t) + (A_1 + s(t)A_{11})x(t-h) + (B_2 + q(t)B_{20})u(t) \tag{11}$$

和性能指标(2),其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{20} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$|r(t)| \leqslant 0.1, |s(t)| \leqslant 0.1, |q(t)| \leqslant 0.1, h = 1$, $R_1 = I, R_2 = 1, x_1(t) = \mathrm{e}^{t+1}, x_2(t) = 0, t \in [-1, 0]$.
令

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta(t) = 10 \times \begin{bmatrix} r(t) & 0 & 0 \\ 0 & q(t) & 0 \\ 0 & 0 & s(t) \end{bmatrix}, D_1 = 0,$$

那么系统(11)可以重写成式(1)的形式.应用定理2,解相应的最优化问题(10),得到最优控制律为

$$u^*(t) = [-0.7597 \quad -3.4601]x(t),$$

相应的性能函数上界为 $J^* = 33.8702$, 这是一个比文献[3]好一点的结果,文献[3]的结果为 $J^* = 45.4437$.

5 结论(Conclusion)

本文利用不确定性的结构特性,研究了一类线性时滞系统的最优非脆弱保性能控制问题.所提出的优化算法属于凸优化问题,很容易利用已有的软件得到全局最优解[6].并用例子演示了算法的有效性.

参考文献(References):

[1] CHANG S S L, PENG T K C. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1972, 17(4): 474 - 483.

[2] PETERSEN I R, DCFARLANCE D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(9): 1991 - 1997.

[3] YU L, CHU J. LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems [J]. *Automatica*, 1999, 35(6): 1155 - 1159.

[4] DOYLE J C. Analysis of feedback systems with structured uncertainties[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 1982, 129(6): 242 - 250.

[5] SKELTON R, IQASAKI T, GRIGORISDIS K M. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design* [M]. London: Taylor & Francis, 1998: 84 - 86.

[6] BOYD S P, GHAOUI L, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory* [M]. Pholadelphia: SIAM, 1994: 7 - 36.

作者简介:

熊军林 (1977—),男,现在香港大学攻读博士学位,2003年4月获得东北大学运筹学与控制论专业硕士学位,主要的研究方向为鲁棒控制,E-mail: jlxiong@hkusua.hku.hk;

张庆灵 (1956—),男,现任东北大学理学院院长,博士,教授,博士生导师,主要的研究领域为广义系统、鲁棒控制.

下 期 要 目