第 22 卷第 4 期
2005 年 8 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol.22 No.4
Aug. 2005

文章编号: 1000 - 8152(2005)04 - 0533 - 05

时滞广义区间系统的弹性保性能控制

舒伟仁[1,2], 张庆灵[1]
(1.东北大学 理学院,辽宁 沈阳 110004; 2.嘉兴学院 数学与信息科学学院,浙江 嘉兴 314001)

摘要: 研究了一类时滞广义区间系统的弹性保性能控制问题.利用线性矩阵不等式处理方法,导出了系统弹性保性能控制器存在的条件,证明了该条件等价于一个线性矩阵不等式的可行性问题,并用该线性矩阵不等式的可行解给出了弹性保性能控制器的一个参数化表示.进一步,通过求解一个凸优化问题,给出了系统的最优弹性保性能控制器的设计方法.最后的数值例子说明了所给方法的有效性.

关键词: 广义系统; 时滞系统; 区间系统; 弹性保性能控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13　　　**文献标识码**: A

Resilient guaranteed cost control for singular interval systems with time-delay

SHU Wei-ren[1,2], ZHANG Qing-ling[1]
(1. College of Science, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China;
2. Institute of Mathematics and Information Science, Jiaxing College, Jiaxing Zhejiang 314001, China)

Abstract: The problem of resilient guaranteed cost control was investigated for a class of singular interval systems with time - delay. A condition for the existence of resilient guaranteed cost controller is derived. Furthermore, it is shown that this condition is equivalent to the feasibility problem of a linear matrix inequality(LMI), and its solutions provide a parametrized representation of resilient guaranteed cost controllers. On this basis, the design problem of the optimal resilient guaranteed cost controller for the systems is formulated as a convex optimization problem, which can be solved by the existing convex optimization techniques. Finally, an example is given to illustrate the application of the proposed method.

Key words: singular systems; time-delay systems; interval systems; resilient guaranteed cost control; linear matrix inequality (LMI)

1 引言(Introduction)

近年来,对于时滞广义系统的研究引起了众多学者的广泛关注,并取得了丰硕的成果.文献[1]研究了时滞广义系统的稳定、镇定和控制问题,得到了有意义的研究结果;文献[2]研究了不确定时滞广义系统的鲁棒稳定性和鲁棒镇定问题,并通过研究系统的广义二次稳定和广义二次能稳定解决了上述问题;文献[3,4]则讨论了时滞广义系统的状态反馈 H_∞ 控制问题,给出了控制器的设计方法.最近,关于正常系统的弹性控制问题也成了人们感兴趣的课题[5~8].但对于时滞广义系统的相关研究结果还很少.本文则研究了一类时滞广义区间系统的弹性保性能控制问题.分别对控制器增益具有加法式摄动和乘法式摄动两种情形进行讨论.利用线性矩阵不等式方法,设计了状态反馈弹性控制器,设计的控制器不仅二次镇定该系统,而且保证闭环性能指标具有最小的上界.

2 问题描述与预备知识(Problem formulation and preliminaries)

考虑如下时滞广义区间系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A^I x(t) + A_d^I x(t-d) + B^I u(t), \\ x(t) = w(t),\ t \in [-d, 0]. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $d > 0$ 是滞后时间常数, $w(t)$ 是给定的初始向量值连续函数, $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是常数矩阵,且 $\operatorname{rank} E = r \leqslant n$, A^I, A_d^I 和 B^I 都是区间矩阵,即

$$A^I := [A^m, A^M] =$$

收稿日期:2003 - 12 - 23; 收修改稿日期:2004 - 08 - 18.
基金项目:辽宁省普通高校学科带头人基金资助项目(124210).

$$\{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid a_{ij}^m \leqslant a_{ij} \leqslant a_{ij}^M, i,j = 1,2,\cdots,n\}. \tag{2}$$

其中 $A^m = (a_{ij}^m)$ 和 $A^M = (a_{ij}^M)$ 都是确定矩阵.令

$$H = (h_{ij}) = \frac{A^M - A^m}{2},\ A = \frac{A^m + A^M}{2},$$

则由文献[9]知,区间矩阵(2)可等价地表示为

$$A^I := [A^m, A^M] = \{A + \Delta A, \Delta A = D_1F_1G_1 \mid F_1 \in \bar{F}_1\}. \tag{3}$$

其中

$$D_1 = [\sqrt{h_{11}}e_1,\cdots,\sqrt{h_{1n}}e_1,\cdots,\sqrt{h_{n1}}e_n,\cdots,\sqrt{h_{nn}}e_n],$$

$$G_1 = [\sqrt{h_{11}}e_1,\cdots,\sqrt{h_{1n}}e_n,\cdots,\sqrt{h_{n1}}e_1,\cdots,\sqrt{h_{nn}}e_n]^{\mathrm T},$$

$$F_1 \in \bar{F}_1 = \{F_1 \mid F_1 = \mathrm{diag}[\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1n},\cdots,\varepsilon_{n1},\cdots,\varepsilon_{nn}], |\varepsilon_{ij}| \leqslant 1, i,j = 1,2,\cdots,n\},$$

$\boldsymbol{e}_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为第 i 个元素是1其余元素是0的列矩阵.显然 $F_1^{\mathrm T}F_1 \leqslant I_{n^2}$,$I_{n^2}$ 为 n^2 阶单位矩阵.类似地,可得

$$A_d^I := [A_d^m, A_d^M] = \{A_d + \Delta A_d, \Delta A_d = D_2F_2G_2 \mid F_2 \in \bar{F}_2\}, \tag{4}$$

$$B^I := [B^m, B^M] = \{B + \Delta B, \Delta B = D_3F_3G_3 \mid F_3 \in \bar{F}_3\}. \tag{5}$$

于是,系统(1)等价地描述为下列系统

$$\begin{cases} E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + D_1F_1G_1)\boldsymbol{x}(t) + \\ \qquad (A_d + D_2F_2G_2)\boldsymbol{x}(t-d) + \\ \qquad (B + D_3F_3G_3)\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{w}(t),\ t \in [-d, 0], \end{cases} \tag{6}$$

并称广义系统

$$\begin{cases} E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + A_d\boldsymbol{x}(t-d), \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{w}(t),\ t \in [-d, 0] \end{cases} \tag{7}$$

为系统(6)的无控制标称广义系统.

用矩阵对 (E,A) 表示广义系统 $E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t)$. 在问题描述中,需要以下的定义和引理.

定义 1[10] 1) 矩阵对 (E,A) 称为是正则的,如果存在标量 s,使得 $\det(sE - A) \neq 0$;

2) 矩阵对 (E,A) 称为是无脉冲的,如果 $\deg(\det(sE - A)) = \mathrm{rank}E$.

引理 1[2] 如果矩阵对 (E,A) 是正则的且无脉冲,则时滞广义系统(7)在 $[0, +\infty)$ 上存在唯一解,且无脉冲.

定义 2[2] 1) 时滞广义系统(7)称为是正则的且无脉冲,如果 (E,A) 正则且无脉冲;

2) 时滞广义系统(7)称为是稳定的,如果对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta(\varepsilon) > 0$,使得对于满足 $\sup\limits_{-d\leqslant t\leqslant 0}\|\boldsymbol{w}(t)\| \leqslant \delta(\varepsilon)$ 的任意相容初始条件 $\boldsymbol{w}(t)$,系统(7)的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足 $\|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant \varepsilon$,且 $\boldsymbol{x}(t) \to 0(t \to \infty)$.

引理 2[2] 时滞广义系统(7)是正则的,无脉冲且稳定,如果存在矩阵 $\bar{P}$ 和对称正定矩阵 $\bar{Q}$,使得

$$E\bar{P}^{\mathrm T} = \bar{P}E^{\mathrm T} \geqslant 0, \tag{8}$$

$$A\bar{P}^{\mathrm T} + \bar{P}A^{\mathrm T} + A_d\bar{P}^{\mathrm T}\bar{Q}^{-1}\bar{P}A_d^{\mathrm T} + \bar{Q} < 0. \tag{9}$$

满足式(9)的矩阵 $\bar{P}$ 是可逆的,于是得引理2的等价结果.

引理 3 时滞广义系统(7)是正则的,无脉冲且稳定,如果存在可逆矩阵 P 和对称正定矩阵 Q,使得

$$E^{\mathrm T}P = P^{\mathrm T}E \geqslant 0, \tag{10}$$

$$A^{\mathrm T}P + P^{\mathrm T}A + P^{\mathrm T}A_dQ^{-1}A_d^{\mathrm T}P + Q < 0. \tag{11}$$

定义 3 时滞广义系统(6) $(\boldsymbol{u}(t) \equiv 0)$ 称为是鲁棒稳定的,如果对任意的 $F_i \in \bar{F}_i(i = 1,2)$,系统是正则的、无脉冲且稳定.

不失一般性,以下假设矩阵 E 具有下列形式

$$E = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

其中 I_r 是 r 阶单位矩阵.

定义系统(6)的性能指标为

$$J = \int_0^{+\infty}[\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)S\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm T}(t)R\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t. \tag{13}$$

其中 S 和 R 是给定的对称正定矩阵.

假定系统的状态可测.对于系统(6),设计如下形式的状态反馈弹性控制器

$$\boldsymbol{u}(t) = (K + \Delta K)\boldsymbol{x}(t). \tag{14}$$

式中:K 表示控制器增益,ΔK 表示增益的摄动.考虑以下两种形式的摄动:

i) 加法式摄动

$$\Delta K = D_4F_4G_4,\ F_4^{\mathrm T}F_4 \leqslant I; \tag{15}$$

ii) 乘法式摄动

$$\Delta K = D_5F_5G_5K,\ F_5^{\mathrm T}F_5 \leqslant I. \tag{16}$$

其中:D_4, D_5, G_4 和 G_5 是常数矩阵,F_4 和 F_5 是未知的扰动矩阵.

系统(6)与控制器(14)构成如下闭环系统

$$\begin{cases} E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A_K - \Delta A_K)\boldsymbol{x}(t) + (A_d + D_2F_2G_2)\boldsymbol{x}(t-d), \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{w}(t),\ t \in [-d, 0]. \end{cases} \tag{17}$$

其中: $A_K = A + B(K + \Delta K), \Delta A_K = D_1F_1G_1 + D_3F_3G_3(K + \Delta K)$.

本文的目的是设计系统(6)的弹性抠制器(14),使得闭环系统(17)是鲁棒稳定的,同时,使得闭环性能指标

$$J = \int_0^{+\infty} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[S + (K + \Delta K)^{\mathrm{T}}R(K + \Delta K)]\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t \tag{18}$$

是有界的,且给出它的最小上界.具有这样性质的控制器(14)称为是系统(6)的一个状态反馈最优弹性保性能控制器.

3 主要结果(Main results)

矩阵 E 具有式(12)结构时,相应的设矩阵 P 有下列分块形式

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}.$$

则根据式(10),可得矩阵 P 具有下列结构:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

其中: $P_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ 是对称正定矩阵, $P_4 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ 是可逆矩阵.于是,引理 3 重新叙述为

定理 1　矩阵 E 具有式(12)形式的时滞广义系统(7)是正则的,无脉冲且稳定,如果存在形如式(19)的可逆矩阵 P 和对称正定矩阵 Q,使得式(11)成立.

考虑到定理 1,给出以下定义:

定义 4　闭环系统(17)称为是广义二次稳定的,如果存在形如式(19)的可逆矩阵 P 和对称正定矩阵 Q,使得对所有的 $F_i(i = 1,\cdots,5)$,满足不等式

$$(A_K + \Delta A_K)^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}(A_K + \Delta A_K) + P^{\mathrm{T}}(A_d + D_2F_2G_2)Q^{-1}(A_d + D_2F_2G_2)^{\mathrm{T}}P + Q < 0, \tag{20}$$

此时称控制器(14)为系统(6)的状态反馈二次弹性控制器.

显然,系统的二次稳定性保证了系统的鲁棒稳定性.

定理 2　如果存在矩阵 K,形如式(19)的可逆矩阵 P 和对称正定矩阵 Q,使得对所有的 $F_i(i = 1,\cdots,5)$,满足以下不等式

$$\begin{bmatrix} \Omega + S + (K+\Delta K)^{\mathrm{T}}R(K+\Delta K) & P^{\mathrm{T}}(A_d + D_2F_2G_2) \\ (A_d + D_2F_2G_2)^{\mathrm{T}}P & -Q \end{bmatrix} < 0. \tag{21}$$

其中 $\Omega = (A_K + \Delta A_K)^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}(A_K + \Delta A_K) + Q$,则闭环系统(17)是广义二次稳定的,且闭环性能指标(18)满足以下条件

$$J \leqslant \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(0)E^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{w}(0) + \int_{-d}^{0} \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(\tau)Q\boldsymbol{w}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{22}$$

也就是控制器 $\boldsymbol{u}(t) = (K + \Delta K)\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(6)的状态反馈二次弹性保性能控制器.

证　由于 $S > 0, R > 0$,不等式(21)蕴含下式成立:

$$\begin{bmatrix} \Omega & P^{\mathrm{T}}(A_d + D_2F_2G_2) \\ (A_d + D_2F_2G_2)^{\mathrm{T}}P & -Q \end{bmatrix} < 0. \tag{23}$$

利用 Schur 补,式(23)与下式等价:

$$\Omega + P^{\mathrm{T}}(A_d + D_2F_2G_2)Q^{-1}(A_d + D_2F_2G_2)^{\mathrm{T}}P < 0. \tag{24}$$

由定义 4,闭环系统(17)是广义二次稳定的.

令

$$v(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(t) + \int_{t-d}^{t} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\tau)Q\boldsymbol{x}(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

则 $v(\boldsymbol{x}(t))$ 沿系统(17)的解的导数满足

$$\begin{aligned} &\dot{v}(\boldsymbol{x}(t)) = \\ &[E\dot{\boldsymbol{x}}(t)]^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P^{\mathrm{T}}[E\dot{\boldsymbol{x}}(t)] + \\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d)Q\boldsymbol{x}(t-d) \leqslant \\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[-S-(K+\Delta K)^{\mathrm{T}}R(K + \Delta K)]\boldsymbol{x}(t). \end{aligned} \tag{25}$$

式(25)从 0 到 T 积分得

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(T)E^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(T) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)E^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(0) + \\ &\int_{T-d}^{T} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\tau)Q\boldsymbol{x}(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_{-d}^{0} \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(\tau)Q\boldsymbol{w}(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \\ &-\int_0^{T} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[S + (K + \Delta K)^{\mathrm{T}}R(K + \Delta K)]\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

由于已证得闭环系统是二次稳定的,因此令 $T \to +\infty$,得

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[S + (K + \Delta K)^{\mathrm{T}}R(K + \Delta K)]\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t \leqslant \\ &\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(0)E^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{w}(0) + \int_{-d}^{0} \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(\tau)Q\boldsymbol{w}(\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

证毕.

现在给出系统(6)的二次弹性保性能控制器的设计方法.限于篇幅,以下所有定理的证明从略.

定理 3　当控制器增益的摄动为式(15)时,具有性能指标(13)的时滞广义系统(6)存在二次弹性保性能控制器(14),当且仅当存在标量 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$、矩阵 Z、可逆矩阵 X 和对称正定矩阵 V,使得

$$\begin{bmatrix} H_{11} & A_dV & (H_{31})^{\mathrm{T}} & XG_1^{\mathrm{T}} & (H_{51})^{\mathrm{T}} & 0 & XG_4^{\mathrm{T}} & X & X \\ VA_d^{\mathrm{T}} & -V & 0 & 0 & 0 & VG_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ H_{31} & 0 & -R^{-1}+\lambda_2D_4D_4^{\mathrm{T}} & 0 & (\lambda_2G_3D_4D_4^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_1X^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\lambda_1I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{51} & 0 & \lambda_2G_3D_4D_4^{\mathrm{T}} & 0 & H_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2V & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1I & 0 & 0 & 0 \\ G_4X^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2I & 0 & 0 \\ X^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -V & 0 \\ X^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (26)$$

其中：I 表示阶数不同的单位矩阵，

$H_{11}=AX^{\mathrm{T}}+BZ+(AX^{\mathrm{T}}+BZ)^{\mathrm{T}}+\lambda_1(D_1D_1^{\mathrm{T}}+D_2D_2^{\mathrm{T}}+D_3D_3^{\mathrm{T}})+\lambda_2BD_4D_4^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$,

$H_{31}=Z+\lambda_2D_4D_4^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$, $H_{51}=G_3Z+\lambda_2G_3D_4D_4^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$,

$H_{55}=-\lambda_1I+\lambda_2G_3D_4D_4^{\mathrm{T}}G_3^{\mathrm{T}}$, $X=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & X_4 \end{bmatrix}$,

$X_1\in\mathbb{R}^{r\times r}$ 是对称正定矩阵，$X_4\in\mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ 是可逆矩阵. 并且，如果不等式(26)有一可行解 $\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2,\hat{Z},\hat{X}$ 和 $\hat{V}$，则状态反馈控制器

$$u^*(t)=(\hat{Z}\hat{X}^{-\mathrm{T}}+D_4F_4G_4)x(t) \quad (27)$$

是系统(6)的一个二次弹性保性能控制器，且

$$J^*=w_1^{\mathrm{T}}(0)\hat{X}_1^{-\mathrm{T}}w_1(0)+\int_{-d}^{0}w^{\mathrm{T}}(\tau)\hat{V}^{-1}w(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (28)$$

是相应的闭环性能指标的一个上界. 这里：$w(0)=\begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \end{bmatrix}$, $w_1(0)\in\mathbb{R}^r$, $w_2(0)\in\mathbb{R}^{n-r}$.

以下定理给出了系统(6)的最优二次弹性保性能控制器的设计方法.

定理 4 对系统(6)和性能指标(13)，如果以下的优化问题

$$\min_{\lambda_1,\lambda_2,\alpha,Z,X,V,M} \alpha+\mathrm{tr}(M) \quad (29)$$

使得

i) 式(26)；

ii) $\begin{bmatrix} -\alpha & w_1^{\mathrm{T}}(0) \\ w_1(0) & -X_1 \end{bmatrix}<0$;

iii) $\begin{bmatrix} -M & N^{\mathrm{T}} \\ N & -V \end{bmatrix}<0$

有一个解 $\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2,\hat{\alpha},\hat{Z},\hat{X},\hat{V},\hat{M}$，则控制器(27)是一个使得性能指标上界(28)最小化的二次弹性保性能控制器. 其中$\int_{-d}^{0}w(\tau)w^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau=NN^{\mathrm{T}}$，$M$ 是对称正定矩阵.

问题(29)是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题，可用 LMI 求解.

定理 5 当控制器增益的摄动为式(16)时，具有性能指标(13)的时滞广义系统(6)存在二次弹性保性能控制器(14)，当且仅当存在标量 $\lambda_1>0,\lambda_2>0$，矩阵 Z，可逆矩阵 X 和对称正定矩阵 V，使得

$$\begin{bmatrix} H_{11} & A_dV & (H_{31})^{\mathrm{T}} & XG_1^{\mathrm{T}} & (H_{51})^{\mathrm{T}} & 0 & (G_5Z)^{\mathrm{T}} & X & X \\ VA_d^{\mathrm{T}} & -V & 0 & 0 & 0 & VG_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ H_{31} & 0 & -R^{-1}+\lambda_2D_5D_5^{\mathrm{T}} & 0 & (\lambda_2G_3D_5D_5^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_1X^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\lambda_1I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{51} & 0 & \lambda_2G_3D_5D_5^{\mathrm{T}} & 0 & H_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2V & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1I & 0 & 0 & 0 \\ G_5Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2I & 0 & 0 \\ X^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -V & 0 \\ X^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (30)$$

其中

$$H_{11}=AX^{\mathrm{T}}+BZ+(AX^{\mathrm{T}}+BZ)^{\mathrm{T}}+\lambda_1(D_1D_1^{\mathrm{T}}+D_2D_2^{\mathrm{T}}+D_3D_3^{\mathrm{T}})+\lambda_2BD_5D_5^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}},$$

$$H_{31}=Z+\lambda_2D_5D_5^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}},\ H_{51}=G_3Z+\lambda_2G_3D_5D_5^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}},\ H_{55}=-\lambda_1I+\lambda_2G_3D_5D_5^{\mathrm{T}}G_3^{\mathrm{T}}.$$

并且,如果不等式(30)有一可行解 $\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2,\hat{Z},\hat{X}$ 和 $\hat{V}$,则状态反馈控制器

$$u^*(t) = (\hat{Z}\hat{X}^{-T} + D_5F_5G_5\hat{Z}\hat{X}^{-T})x(t) \quad (31)$$

是系统(6)的一个二次弹性保性能控制器,且式(28)是相应的闭环性能指标的一个上界.

注 通过解与问题(29)类似的优化问题,可得最优二次弹性保性能控制器(31).

4 数值算例(Numerical example)

考虑时滞广义区间系统(1),其系统参数为

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A^I = \begin{bmatrix} 0 \mp 0.1 & 1 \mp 0.1 \\ 0 \mp 0.1 & 0 \mp 0.1 \end{bmatrix},$$

$$A_d^I = \begin{bmatrix} 0.6 \mp 0.1 & 0.5 \mp 0.1 \\ 0.6 \mp 0.1 & 0.5 \mp 0.1 \end{bmatrix},\ B^I = \begin{bmatrix} 0.8 \mp 0.1 \\ 1 \mp 0.1 \end{bmatrix}.$$

初始值为 $w_1(t) = e^{t+1}, w_2 = 0, t \in [-1,0]$. 取 $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, R = 1$.

i) 当控制器增益具有加法式摄动时,其中 $D_4 = [\sqrt{0.6} \quad \sqrt{0.6}], G_4 = \begin{bmatrix} \sqrt{0.6} & \sqrt{0.6} \\ \sqrt{0.6} & \sqrt{0.6} \end{bmatrix}$, 用 MATLAB 软件的 LMI 工具箱,解优化问题(29),得最优二次弹性保性能控制器为

$$u^*(t) = (K + D_4F_4G_4)x(t),$$

$$K = [-8.8693 \quad -7.2366],$$

相应的系统性能指标最小上界为 $J^* = 31.5198$.

ii) 当控制器增益具有乘法式摄动时,其中 $D_5 = G_5 = \sqrt{0.6}$, 用 MATLAB 软件的 LMI 工具箱,解相应的优化问题,得最优二次弹性保性能控制器为

$$u^*(t) = (K + D_5F_5G_5K)x(t),$$

$$K = [-8.4862 \quad -6.6677],$$

相应的系统性能指标最小上界为 $J^* = 38.1255$.

5 结论(Conclusion)

本文研究了一类时滞广义区间系统的最优弹性保性能控制器的设计问题.通过求解带有线性矩阵不等式约束的优化问题,可以得到状态反馈弹性保性能控制器.设计的弹性控制器不仅使得闭环系统广义二次稳定,而且保证闭环性能指标具有最小的上界.给出的算例说明了文中方法的可用性.

参考文献(References):

[1] 刘永清,谢湘生.滞后广义系统的稳定镇定与控制[M]//大型动力系统的理论与应用——卷8:广州:华南理工大学出版社,1998.

(LIU Yongqing, XIE Xiangsheng. Stability stabilization and control for singular large-scale systems with delay [M]// *Theory and Application of Large-scale Dynamic Systems* (*Vol*. 8). Guangzhou: South China University of Technology Press, 1998.)

[2] XU S Y, DOOREN P V, STEFAN R, et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1122 - 1126.

[3] 周绍生,李洪亮,冯纯伯.一类带有时滞的广义系统的 H_∞ 控制:一种 LMI 方法[J].控制理论与应用,2002,19(3):324 - 328.

(ZHOU Shaosheng, LI Hongliang, FENG Chunbo. H_∞ suboptimal control for a class of singular systems with time-delay: an LMI approach [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(3): 324 - 328.)

[4] 冯俊娥,程兆林.线性广义时滞系统的 H_∞ 状态反馈控制器[J].控制与决策,2003,18(2):159 - 163.

(FENG June, CHENG Zhaolin. H_∞ state feedback control for linear singular systems with time-delay in state [J]. *Control and Decision*, 2003, 18(2): 159 - 163.)

[5] KEEL L H, BHATTACHARYYA S P. Robust, fragile, or optimal? [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1098 - 1105.

[6] YANG G H, WANG J L, LIN C. H_∞ control for linear systems with additive controller gain variation [J]. *Int J Control*, 2000, 73(16): 1500 - 1506.

[7] YANG G H, WANG J L, SOH Y C. Guaranteed cost control for discrete-time linear systems under controller perturbations [J]. *Linear Algebra and Its Application*, 2000, 312: 161 - 180.

[8] FANULARO D, DORATO P, ABDALLAH C T, et al. Robust non-fragile LQ controllers: the static state feedback case [J]. *Int J Control*, 2000, 73(2): 159 - 165.

[9] 吴方向,史忠科,戴冠中.区间系统的 H_∞ 鲁棒控制[J].自动化学报,1999,25(5):705 - 708.

(WU Fangxiang, SHI Zhongke, DAI Guanzhong. H_∞ robust control for interval systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(5): 705 - 708.)

[10] Dai L. *Singular Control Systems* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

作者简介:

舒伟仁 (1962—),男,嘉兴学院副教授,1993年于大连理工大学获硕士学位,2005年于东北大学获博士学位,主要研究方向为鲁棒控制、广义系统和时滞系统的分析与控制,E-mail: wrshu278@sohu.com;

张庆灵 (1956—),男,东北大学教授,博士生导师,主要研究方向为鲁棒控制、广义系统和时滞系统的分析与控制及生物控制,E-mail: qlzhang@mail.neu.edu.cn.