文章编号：1000-8152(2005)04-0649-04

# 线性时滞广义系统的时滞相关 $H_\infty$ 控制

张先明[1,2]，吴　敏[1]，何　勇[1,2]
(1. 中南大学 信息科学与工程学院,湖南 长沙 410083; 2. 中南大学 数学科学与计算技术学院,湖南 长沙 410083)

**摘要**：讨论线性时滞广义系统的时滞相关 $H_\infty$ 控制. 首先利用Park不等式建立了一个基于二次型项的积分不等式,然后利用Lyapunov-Krasovskii泛函方法,获得了系统经慢子系统的无记忆状态反馈后不仅内部稳定,而且具有给定的 $H_\infty$ 性能的,基于LMI的时滞相关充分条件. 数值例子表明本文方法所得结论较已有文献具有较小的保守性.

**关键词**：广义系统；时滞相关；$H_\infty$ 性能；积分不等式；线性矩阵不等式

**中图分类号**：TP13　　　**文献标识码**：A

# Delay-dependent H-infinity control for linear descriptor systems with time-delay

ZHANG Xian-ming[1,2], WU Min[1], HE Yong[1,2]
(1. Schoole of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410083, China;
2. Schoole of Mathematical Science and Computing Technology, Central South University, Changsha Hunan 410083, China)

**Abstract**: The delay-dependent H-infinity control for the descriptor systems with time-delay is discussed. First, a new integral inequality for quadratic terms is established by using the Park inequality. Next, the integral inequality in combination with the Lyapunov-Krasovskii functional method is used to derive a new delay dependent sufficient condition based on LMI which can guarantee that the closed-loop system is not only internal asymptotically stable but also with the prescribed H-infinity performance via the slow subsystem's memoryless state feedback. Finally, an example is given to illustrate that the derived results are of less conservativeness than the existing ones.

**Key words**: descriptor system; delay-dependent; H-infinity performance; integral inequality; linear matrix inequality (LMI)

## 1 引言(Introduction)

考虑如下线性时滞广义系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{01}x_1(t) + A_{11}x_1(t-h) + A_{12}x_2(t-h) + B_{11}w(t) + B_{21}u(t), \\ \dot{x}_2(t) = A_{02}x_1(t) + A_{21}x_1(t-h) + A_{22}x_2(t-h) + B_{12}w(t) + B_{22}u(t), \\ z(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_1(t) \in \mathbb{R}^r$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$ 为系统状态, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入, $w(t) \in \mathbb{R}^l$ 为扰动输入,且 $w(t) \in L_2[0,\infty)$, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ 为受控输出,时滞 $h \in [0,\bar{h}]$, $\bar{h} > 0$ 为常数, $A_{0j}, A_{ij}, B_{ij}, C_j, D_{1j}(i,j=1,2)$ 为具有适当维数的常数实矩阵. 假设系统(1)的初始条件为 $x(t) = 0, \forall t \in [-\bar{h}, 0]$.

对于系统(1),文献[1]讨论了慢子系统无扰动($B_{11}=0$)以及输出 $z(t)$ 不带控制项($D_{12}=0$)时的时滞无关 $H_\infty$ 控制,文献[2]采用广义模型变换方法讨论了系统(1)的时滞相关 $H_\infty$ 控制.

本文的主要目的是引入一种新的方法——积分不等式方法,设计慢子系统的状态反馈

$$u(t) = Kx_1(t), \tag{2}$$

使得系统(1)在零初始条件下不仅内部稳定并且具有给定的 $H_\infty$ 性能 $\gamma$ 的时滞相关充分条件. 为此首先利用Park不等式[3]建立一个基于二次型项的积分不等式.

**引理 1**　设 $x(t)$ 为 $\mathbb{R}^r$ 上具有连续一阶导数的向量函数,则对 $\forall M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\forall R = R^T > 0$, $\forall h \geq 0$, 满足不等式

$$-\int_{t-h}^{t} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)\mathrm{d}s \leq$$

收稿日期：2003-06-09；收修改稿日期：2004-03-02.
基金项目：教育部青年教师奖励计划资助项目(教人[2002]5号)；国家博士点基金资助项目(2000053303).

$$\xi^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix} M_1^{\mathrm{T}}+M_1 & -M_1^{\mathrm{T}}+M_2 \\ * & -M_2^{\mathrm{T}}-M_2 \end{bmatrix}\xi(t)+$$

$$h\xi^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix} M_1^{\mathrm{T}} \\ M_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}R^{-1}[M_1 \quad M_2]\xi(t). \tag{3}$$

其中 $\xi^{\mathrm{T}}(t)=[x^{\mathrm{T}}(t) \quad x^{\mathrm{T}}(t-h)]$；“$*$”表示对称矩阵的对称项，下同.

**证** 由 Leibniz-Newton 公式

$$x(t)-x(t-h)=\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s,$$

对 $\forall N_1, N_2 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ 有

$$0=2[x^{\mathrm{T}}(t)N_1^{\mathrm{T}}+x^{\mathrm{T}}(t-h)N_2^{\mathrm{T}}]\times$$
$$[x(t)-x(t-h)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s]$$

成立，利用 Park 不等式[3]即可证得，在此从略.

## 2 主要结果(Main results)

这一节，陈述本文的主要结果.首先利用引理1给出系统(1)不仅内部稳定，而且具有给定的 $\mathrm{H}_\infty$ 性能 $\gamma$ 的时滞相关充分条件.为此设 $u(t)=0$.

**定理 1** 给定 $\bar{h}>0, \gamma>0$. 如果存在 $P=P^{\mathrm{T}}>0, R=R^{\mathrm{T}}>0, Q=Q^{\mathrm{T}}>0$ 以及 $M_i \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $i=1,2$, 使得 LMI 成立:

$$\begin{bmatrix}
\varphi_{11} & \varphi_{12} & PA_{12}+Q_{12}A_{22} & PB_{11}+Q_{12}B_{12} & A_{02}^{\mathrm{T}}Q_{22} & \bar{h}A_{01}^{\mathrm{T}}R & \bar{h}M_1^{\mathrm{T}} & C_1^{\mathrm{T}}+A_{02}^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}} \\
* & \varphi_{22} & -Q_{12} & 0 & A_{21}^{\mathrm{T}}Q_{22} & \bar{h}A_{11}^{\mathrm{T}}R & \bar{h}M_2^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}} \\
* & * & -Q_{22} & 0 & A_{22}^{\mathrm{T}}Q_{22} & \bar{h}A_{12}^{\mathrm{T}}R & 0 & A_{22}^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}} \\
* & * & * & -\gamma^2 I & B_{12}^{\mathrm{T}}Q_{22} & \bar{h}B_{11}^{\mathrm{T}}R & 0 & D_{11}^{\mathrm{T}}+B_{12}^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}} \\
* & * & * & * & -Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\bar{h}R & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -\bar{h}R & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & -I
\end{bmatrix}<0. \tag{4}$$

其中

$$\varphi_{11}=PA_{01}+A_{01}^{\mathrm{T}}P+Q_{12}A_{02}+A_{02}^{\mathrm{T}}Q_{12}^{\mathrm{T}}+M_1^{\mathrm{T}}+M_1+Q_{11},$$
$$\varphi_{12}=PA_{11}+Q_{12}A_{21}-M_1^{\mathrm{T}}+M_2,$$
$$\varphi_{22}=-Q_{11}-M_2^{\mathrm{T}}-M_2,$$
$$Q=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}} & Q_{22} \end{bmatrix},$$
$$Q_{11}\in\mathbb{R}^{r\times r},\ Q_{22}\in\mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)},$$

则系统(1)对 $\forall h\in[0,\bar{h}]$ 内部稳定，并且具有给定的 $\mathrm{H}_\infty$ 性能 $\gamma$.

**证** 取 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V(t)=x_1^{\mathrm{T}}(t)Px_1(t)+\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}_1^{\mathrm{T}}(s)R\dot{x}_1(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+$$
$$\int_{t-h}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $x(t)=[x_1^{\mathrm{T}}(t) \quad x_2^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$. 引入性能指标

$$J=\int_{0}^{\infty}[z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t)]\mathrm{d}t,$$

利用引理1、Schur 补[4]，以及 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理[5]，即可证得，限于篇幅，在此从略.

下面讨论系统(1)经慢子系统的状态反馈后具有给定的 $\mathrm{H}_\infty$ 性能的时滞相关充分条件以及控制器的设计方法.

**定理 2** 给定 $\bar{h}>0. \gamma>0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\in\mathbb{R}$.如果存在 $\bar{P}=\bar{P}^{\mathrm{T}}>0, \bar{R}=\bar{R}^{\mathrm{T}}>0, \bar{Q}_{11}=\bar{Q}_{11}^{\mathrm{T}}>0, \bar{Q}_{22}=\bar{Q}_{22}^{\mathrm{T}}>0$，具有适当维数的矩阵 $Y$，使得以下 LMI 成立:

$$\begin{bmatrix}
\Xi_{11} & \Xi_{12} & A_{12}\bar{Q}_{22} & B_{11} & \Xi_{15} & \Xi_{16} & 0 & \Xi_{18} & \bar{P} \\
* & \Xi_{22} & 0 & 0 & \Xi_{25} & \Xi_{26} & \bar{h}\bar{R} & \Xi_{28} & 0 \\
* & * & -\bar{Q}_{22} & 0 & A_{22}^{\mathrm{T}} & \bar{h}A_{12}^{\mathrm{T}} & 0 & A_{22}^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}} & 0 \\
* & * & * & -\gamma^2 I & B_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{h}B_{11}^{\mathrm{T}} & 0 & D_{11}^{\mathrm{T}}+B_{12}^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}} & 0 \\
* & * & * & * & -\bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\bar{h}\bar{R} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -\bar{h}\bar{R} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & -I & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\bar{Q}_{11}
\end{bmatrix}<0. \tag{5}$$

其中

$$\Xi_{11}=A_{01}\bar{P}+\bar{P}A_{01}^{\mathrm{T}}+B_{21}Y+Y^{\mathrm{T}}B_{21}^{\mathrm{T}}-\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}(A_{11}\bar{Q}_{11}+\bar{Q}_{11}A_{11}^{\mathrm{T}})-\varepsilon_1^2\varepsilon_2^{-2}\bar{Q}_{11},$$

$$\Xi_{12}=\bar{P}+\varepsilon_2^{-1}A_{11}\bar{Q}_{11}+\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\bar{Q}_{11}+\varepsilon_1\varepsilon_2^{-2}\bar{Q}_{11},$$

$$\Xi_{22}=-2\varepsilon_2^{-1}\bar{Q}_{11}-\varepsilon_2^{-2}\bar{Q}_{11},$$

$$\Xi_{15}=\bar{P}A_{02}^{\mathrm{T}}+Y^{\mathrm{T}}B_{22}^{\mathrm{T}}-\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\bar{Q}_{11}A_{21}^{\mathrm{T}},$$

$$\Xi_{16}=\bar{h}\bar{P}A_{01}^{\mathrm{T}}+\bar{h}Y^{\mathrm{T}}B_{21}^{\mathrm{T}}-\bar{h}\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\bar{Q}_{11}A_{11}^{\mathrm{T}},$$

$$\Xi_{18}=\bar{P}C_1^{\mathrm{T}}+Y^{\mathrm{T}}D_{12}^{\mathrm{T}}+\bar{P}A_{02}^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}}+Y^{\mathrm{T}}B_{22}^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}}-\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\bar{Q}_{11}A_{21}^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}},$$

$$\Xi_{25}=\varepsilon_2^{-1}\bar{Q}_{11}A_{21}^{\mathrm{T}},$$

$$\Xi_{26}=\bar{h}\varepsilon_2^{-1}\bar{Q}_{11}A_{11}^{\mathrm{T}},$$

$$\Xi_{28}=\varepsilon_2^{-1}\bar{Q}_{11}A_{21}^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}},$$

则系统(1)经状态反馈(2)作用后的闭环系统对 $\forall h\in[0,\bar{h}]$ 内部稳定,并且具有给定的 $H_\infty$ 性能 $\gamma$,且状态反馈增益 $K=Y\bar{P}^{-1}$.

**证　记**

$$A_{01K}=A_{01}+B_{21}K,$$
$$A_{02K}=A_{02}+B_{22}K,$$
$$C_{1K}=C_1+D_{12}K.$$

在定理 1 中分别用 $A_{01K},A_{02K},C_{1K}$ 代替 $A_{01},A_{02},C_1$,然后令 $Q_{12}=0$. 由定理 1,如果如下矩阵不等式成立:

$$H:=\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & PA_{12} & PB_{11} & A_{02K}^{\mathrm{T}}Q_{22} & \bar{h}A_{01K}^{\mathrm{T}}R & \bar{h}M_1^{\mathrm{T}} & C_{1K}^{\mathrm{T}}+A_{02K}^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}} \\ * & H_{22} & 0 & 0 & A_{21}^{\mathrm{T}}Q_{22} & \bar{h}A_{11}^{\mathrm{T}}R & \bar{h}M_2^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}} \\ * & * & -Q_{22} & 0 & A_{22}^{\mathrm{T}}Q_{22} & \bar{h}A_{12}^{\mathrm{T}}R & 0 & A_{22}^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & -\gamma^2 I & B_{12}^{\mathrm{T}}Q_{22} & \bar{h}B_{11}^{\mathrm{T}}R & 0 & D_{11}^{\mathrm{T}}+B_{12}^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & * & -Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{h}R & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{h}R & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}<0, \tag{6}$$

其中

$$H_{11}=PA_{01K}+A_{01K}^{\mathrm{T}}P+M_1^{\mathrm{T}}+M_1+Q_{11},$$
$$H_{12}=PA_{11}-M_1^{\mathrm{T}}+M_2,$$
$$H_{22}=-Q_{11}-M_2^{\mathrm{T}}-M_2,$$

则系统(1)的闭环系统内部稳定,并且具有给定的 $H_\infty$ 性能 $\gamma$. 为从式(6)中求出控制器,令

$$W=\begin{bmatrix} P & 0 \\ M_1 & M_2 \end{bmatrix},\ \bar{A}=\begin{bmatrix} A_{01K} & A_{11} \\ I & -I \end{bmatrix},$$

则

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ * & H_{22} \end{bmatrix}=W^{\mathrm{T}}\bar{A}+\bar{A}^{\mathrm{T}}W+\mathrm{diag}\{Q_{11},-Q_{11}\}.$$

令 $M_1=\varepsilon_1 P,M_2=\varepsilon_2 Q_{11},\varepsilon_2\neq 0,\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\mathbb{R}$,则 $W$ 可逆,且

$$W^{-1}=\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ -M_2^{-1}M_1P^{-1} & M_2^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}Q_{11}^{-1} & \varepsilon_2^{-1}Q_{11}^{-1} \end{bmatrix}.$$

再令 $T=\mathrm{diag}\{W^{-1},Q_{22}^{-1},Q_{22}^{-1},R^{-1},R^{-1}\}$. 对 $H$ 左乘 $T^{\mathrm{T}}$,右乘 $T$,记 $\bar{P}=P^{-1},\bar{Q}_{11}=Q_{11}^{-1},\bar{Q}_{22}=Q_{22}^{-1},\bar{R}=R^{-1},Y=KP^{-1}$ 经计算、整理,利用 Schur 补,如果 LMI(5)可解,则 $H<0$. 从而由定理 1 知系统(1)的闭环系统内部稳定,具有给定的 $H_\infty$ 性能 $\gamma$.

证毕.

## 3　实例(Example)

**例**　考虑广义系统[2]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=-x_1(t-h)+w(t), \\ x_2(t)= \\ -0.5x_1(t-h)+0.5x_2(t-h)-0.5w(t)-0.5u(t), \\ z(t)=x_1(t)+0.2x_2(t)+0.1u(t). \end{cases} \tag{7}$$

为使系统(7)经状态反馈后具有给定的 $H_\infty$ 性能 $\gamma$,文献[2]得出的结论为:当 $h=1.2$ 时,$\gamma$ 的最小值为 $\gamma_{\min}=11$,相应的控制器为 $u(t)=42.6854x_1(t)-0.3426x_2(t)$. 利用本文的结论(定理2),当 $h=1.2$ 时,取 $\varepsilon_1=-1,\varepsilon_2=1$,$\gamma$ 的最小值为 $\gamma_{\min}=0.5874$,相应的控制器为 $u(t)=-9.9460x_1(t)$. 这一结果表明了本文方法的有效性.

## 4　结论(Conclusion)

本文提出一种新的方法—积分不等式方法,讨论了线性时滞广义系统的时滞相关 $H_\infty$ 控制,首先利用 Park 不等式建立了一个基于二次型项的积分不等式,然后利用该不等式建立了系统经慢子系统的状态反馈后,不仅内部稳定,并且具有给定的 $H_\infty$ 性能的时滞相关充分条件,同时给出了状态反馈控制器的设计方法.数值例子表明,本文方法所得结论较已有文献具有较小的保守性.

## 参考文献(References):

[1] ZHOU Shaosheng, LI Hongliang, FENG Chunbo. H-infinte suboptimal control for a class of singular systems with time-delay: an LMI approach [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(3): 324 - 328.

[2] FRIDMAN E, SHAKED U. H-infinite control of linear state-delay descriptor systems: an LMI approach [J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2002, 351 - 352: 271 - 302.

[3] PARK P. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(4): 876 - 877.

[4] BOYD S, El GHAOUI L, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequality in Systems and Control Theory* [M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

[5] MAHMOUD M S. Robust stability and stabilization of a class of uncertain nonlinear systems with delays [J]. *J of Mathematical Problems in Engineering*, 1998, 4(2): 165 - 185.

### 作者简介:

**张先明** (1968—),男,中南大学博士研究生,主要研究方向为时滞系统、广义系统的鲁棒控制, E-mail: zhangxmy@yahoo.com.cn;

**吴 敏** (1963—),男,博士生导师,主要研究方向为鲁棒控制、智能控制和过程控制, E-mail: min@mail.csu.edu.cn;

**何 勇** (1969—),男,中南大学博士研究生,主要研究方向为鲁棒控制及其应用.

(上接第648页)

[3] PARK J H, SUNG S W, LEE I. An enhanced PID control strategy for unstable processes [J]. *Automatica*, 1998, 34(6): 751 - 756.

[4] WHITFIELD A H, WILLIAMS N G. Integral least - squares techniques for frequency-domain model reduction [J]. *Int J of Systems Science*, 1988, 19(8): 1355 - 1373.

[5] WANG Q G, ZHANG Y. A fast algorithm for reduced-order modeling [J]. *ISA Transaction*, 1999, 38(2): 225 - 230.

### 作者简介:

**任正云** (1969—),男,博士,研究方向为先进过程控制、模型预测控制等, E-mail: renzhengyun@163.com;

**张 红** (1971— ),女,讲师,研究方向为化工过程建模与优化、炼油工艺优化等, E-mail: zhanghonglindi@163.com;

**邵惠鹤** (1936—),男,教授,博士生导师,研究方向为复杂工业过程建模、优化与控制等, E-mail: hhshao@sjtu.edu.cn.