

文章编号: 1000-8152(2005)05-0687-07

## 一类非线性系统的微分平滑反步自适应输出反馈控制

于占东, 王庆超

(哈尔滨工业大学 航天学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要:** 研究了一类含不确定参数且存在未知扰动的严反馈非线性系统输出反馈控制问题, 设计了一种新型的反步递推 (Backstepping) 自适应控制器. 为实现输出反馈, 设计过程引入了虚拟的全维状态观测器. 由于 Backstepping 的虚拟控制量与未知参数逼近值及其高阶导数有关, 为此通过微分平滑算法对原系统进行相应的动态扩展. 在稳定性分析中, 利用 Lyapunov 定理, 得到了系统全局一致有界稳定的条件, 并求出系统的稳态跟踪误差. 最后给出的仿真算例验证了本文方法的有效性和可行性.

**关键词:** 非线性系统; 反步递推; 微分平滑算法; 输出反馈; 不确定性

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Differential flatness adaptive backstepping output feedback control for a class of nonlinear systems

YU Zhan-dong, WANG Qing-chao

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

**Abstract:** A novel adaptive backstepping output feedback control approach is presented for a class of strict-feedback nonlinear systems with uncertain parameters and unknown disturbances. In order to realize the output feedback control, the virtual full-dimensions state observer is introduced in the design. Given the fact that the virtual controllers in backstepping procedure are the functions of the parameter estimates and their higher derivatives, the differential flatness algorithm is used to expand the dynamics of original systems. In the stability analysis, based on the Lyapunov theory, some conditions are derived for global uniform ultimate boundedness of systems, while the stable tracking error is provided. Finally, the simulation example is given to demonstrate the feasibility and effectiveness of the proposed method.

**Key words:** nonlinear system; backstepping; differential flatness algorithm; output feedback; uncertainty

### 1 引言 (Introduction)

不确定非线性系统的控制问题是目前控制理论界的一个研究热点. 近年来的研究表明, 如果系统满足一定的链式结构 (多个非线性子系统通过积分器串联的形式), 就可以用反步递推 (Backstepping) 设计方法逐步构造出理想的 Lyapunov 函数. 而利用基于微分几何的非线性系统理论则可以判定一个系统本质上是否具有上述链式结构的几何条件, 同时给出适当的微分同胚进行坐标变换, 将系统数学模型化为显式链式结构. 文献 [1] 首次提出 Backstepping 自适应控制设计方法, 并使用该方法解决了闭环系统全局稳定和跟踪问题. 文献 [2~6] 提供了处理各类非线性对象的控制问题的方法, 从一个侧面说明该方法的灵活性. 微分平滑的思想是: 针对一类不可完全反馈线性化的非线性系统, 在微分同胚

意义上, 通过引入适当的积分, 对系统动态扩展, 提高其相对阶, 使系统更多分量线性化. 另一方面, 正如线性系统跟踪有关给定信号会存在误差, 此时往往需要通过适当的积分或动态扩展才能使跟踪达到满意的效果. 本文将微分平滑算法与 Backstepping 方法相结合, 处理含不确定参数且存在有界扰动的一类严反馈非线性系统的输出反馈自适应控制问题.

### 2 问题描述 (Problem formulation)

#### 2.1 非线性系统模型 (Model of the nonlinear system)

考虑如下不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + \Delta_i(x_1, \dots, x_i), & 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{x}_n = g(x_1, \dots, x_n)u + \Delta_n(x_1, \dots, x_n), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $u, y \in \mathbb{R}$  分别为系统的输入输出;  $\Delta_i$  是系统未知非线性项, 光滑函数  $g(g \neq 0)$  为已知的控制增益项. 系统满足如下假设.

**假设 1**  $y_r$  为系统的期望输出轨迹,  $y_r^{(i)} (i = 1, \dots, n)$  存在且处于已知有界集上. 系统的非线性成分仅依赖于系统可测输出信号  $y$ , 而且不确定因素也可仅由系统可测输出  $y$  来描述.

**假设 2** 非线性系统(1)中, 未知非线性项  $\Delta_i, 1 \leq i \leq n$  可分为两部分, 即  $\Delta_i = \varphi_i^T \theta + \delta_i$ . 第1项为已知非线性函数与未知参数的线性组合的形式, 其中  $\varphi_i$  为已知向量场,  $\theta \in \mathbb{R}^q$  为未知线性化参数向量,  $\theta^*$  为最佳逼近时的线性化参数向量, 其表达式为

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in \Omega} [\sup_{x \in S} \|\text{col}(\varphi_i^T(y)\theta - \delta_i)\|].$$

第2项  $\delta$  为有界的未知扰动或未建模动态. 记

$$\text{col}\{a_i\} \triangleq [a_1, a_2, \dots, a_n]^T, i = 1, \dots, n.$$

综上所述, 系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + \varphi_i^T(y)\theta^* + \delta_i, & 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{x}_n = g(y)u + \varphi_n^T(y)\theta^* + \delta_n, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (2)$$

系统输出反馈控制问题可表述为: 在输出反馈条件下, 闭环系统的输出, 按一定的精度要求跟踪期望输出信号  $y_r$ , 同时闭环系统的所有状态要保证一定的稳定性.

## 2.2 虚拟状态观测器 (Virtual state observer)

因为系统(2)中仅有  $x_1$  可直接测得, 而反步递推算法需要系统的全状态反馈. 所以必须设计状态观测器. 鉴于降维观测器中输出量  $y$  连同测量噪声直接传递到观测器输出侧, 本文采用带有输出量  $y$  积分滤波功能的全维状态观测器. 首先假定系统的参数向量已知  $\theta^* = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q]^T$ , 选择系统的增益向量  $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]^T$  使由它所构成的系统矩阵是 Hurwitz 的. 则观测器系统方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} \\ \dot{\hat{x}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\beta_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\beta_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1} \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g(y)u + \begin{bmatrix} \varphi_1^T(y)\theta^* \\ \varphi_2^T(y)\theta^* \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}^T(y)\theta^* \\ \varphi_n^T(y)\theta^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} y, \quad (3)$$

设  $e = x - \hat{x}$  为状态观测误差, 则误差状态方程  $\dot{e} = Ae + \delta$ . 由于  $A$  是 Hurwitz 阵, 且未知扰动向量  $\delta$  有界, 所以状态观测误差向量  $e$  有界. 观测器表达式 (3) 是在假定各非线性项的参数向量  $\theta$  的最佳逼近已知的情况下获得的. 因此该观测器为虚拟观测器.

## 3 微分平滑反步自适应输出反馈控制 (Differential flatness adaptive backstepping output feedback control)

反步递推 (Backstepping) 方法的特点是引入虚拟控制量对系统进行反推控制. 该方法能克服传统自适应控制中的高阶不确定性. 本节将 Backstepping 方法与微分平滑自适应方法有机结合, 在 Lyapunov 稳定意义下, 实现系统的输出反馈控制.

### 3.1 反步递推过程 (Backstepping approach)

文献[1]中首次提出 Backstepping 设计方法. 该方法利用虚拟控制量定义误差向量  $z$ , 误差向量与原系统状态本质上微分同胚. 在每一步, 构造一个 Lyapunov 函数, 使每一状态分量具有适当的稳定性. 令虚拟控制量  $\alpha_i$  为  $\bar{x}_i, \bar{\theta}^{(i)}$  和  $\bar{y}^{(i)}$  的函数, 其中,  $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T, \bar{\theta}^{(i)} = [\theta, \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(i)}]^T, \bar{y}^{(i)} = [y_r, \dot{y}_r, \dots, y_r^{(i)}]^T$ , 根据系统方程(2)及系统状态观测器(3), 利用 Backstepping 进行设计. 引入如下误差坐标:

$$\begin{cases} z_1 = y - y_r, \\ z_2 = \hat{x}_2 - y_r^{(1)} - \alpha_1, \\ \vdots \\ z_n = \hat{x}_n - y_r^{(n-1)} - \alpha_{n-1}. \end{cases} \quad (4)$$

第1步 令

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} (\hat{\theta} - \theta^*)^T (\hat{\theta} - \theta^*), \quad (5)$$

将式(5)求导, 并利用式(4)得到:

$$\dot{V}_1 = z_1 [x_2 + \varphi_1^T \theta^* + \delta_1 - y_r^{(1)}] + (\hat{\theta} - \theta^*) \dot{\hat{\theta}}. \quad (6)$$

由  $x_2 = \hat{x}_2 + e_2$ , 其中  $e_2$  为有界逼近误差, 并令,  $|e_2 + \delta_1| \leq D, D$  为有界正数. 则

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & z_1 [x_2 + \varphi_1^T \theta^* + \delta_1 + e_2 - y_r^{(1)}] + (\hat{\theta} - \theta^*) \dot{\hat{\theta}} = \\ & z_1 [z_2 + \alpha_1 + \varphi_1^T \theta^* + \delta_1 + e_2] + (\hat{\theta} - \theta^*) \dot{\hat{\theta}} \leq \\ & z_1 [z_2 + \alpha_1 + \varphi_1^T \theta^*] + \epsilon_0 z_1^2 + \frac{D^2}{4\epsilon_0} + (\hat{\theta} - \theta^*) \dot{\hat{\theta}}. \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\epsilon_0 > 0$ . 令  $\alpha_1(y, \hat{\theta}, y_r) = -c_1 z_1 - \epsilon_0 z_1 -$

$\varphi_1^T(y)\hat{\theta}$ , 且  $\dot{\hat{\theta}} \triangleq \tau_1 = \varphi_1 z_1 = \omega_1 z_1$  时, 其中  $\omega_1 = \varphi_1$ , 则有

$$\dot{V}_1 \leq z_1 z_2 - c_1 z_1^2 + \frac{D^2}{4\epsilon_0} + (\hat{\theta} - \theta^*)^T(\dot{\hat{\theta}} - \tau_1). \tag{8}$$

所以, 当  $z_2 = 0$  时, 系统是有界稳定的. 由于  $z_2$  不等于 0, 在下一步我们考虑对  $z_2$  进行补偿.

**第2步 令**

$$V_2 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} (\hat{\theta} - \theta^*)^T (\hat{\theta} - \theta^*), \tag{9}$$

将式(9)求导, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & z_1 [z_2 + \alpha_1 + \varphi_1^T \theta^* + e_2 + \delta_1] + z_2 [z_3 + \alpha_2 + \varphi_2^T \theta^* + \\ & \beta_2(y - x_1) - \dot{\alpha}_1] + (\hat{\theta} - \theta^*)^T \dot{\hat{\theta}} \leq \\ & z_1 z_2 - c_1 z_1^2 + \frac{D^2}{4\epsilon_0} - (\hat{\theta} - \theta^*)^T \varphi_1 z_1 + z_2 [z_3 + \alpha_2 + \varphi_2^T \theta^* + \\ & \beta_2(y - x_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (x_2 + \varphi_1^T \theta^* + e_2 + \delta_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \\ & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r] + (\hat{\theta} - \theta^*)^T \dot{\hat{\theta}} \leq \\ & z_1 z_2 - c_1 z_1^2 + \frac{D^2}{4\epsilon_0} - (\hat{\theta} - \theta^*)^T \varphi_1 z_1 + z_2 [z_3 + \alpha_2 + \\ & \varphi_2^T \theta^* + \beta_2(y - x_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (x_2 + \varphi_1^T \theta^*) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \\ & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r] + \epsilon_1 [\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}]^2 z_2^2 + \frac{D^2}{4\epsilon_1} + (\hat{\theta} - \theta^*)^T \dot{\hat{\theta}}. \end{aligned} \tag{10}$$

令

$$\begin{aligned} \alpha_2(y, x_1, x_2, \hat{\theta}, \dot{\hat{\theta}}, y_r, \dot{y}_r) = & \\ & - z_1 - c_2 z_2 - \varphi_2^T \hat{\theta} - \beta_2(y - x_1) + \\ & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (x_2 + \varphi_1^T \hat{\theta}) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \epsilon_1 [\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}]^2 z_2, \end{aligned}$$

且  $\dot{\hat{\theta}} \triangleq \tau_2 = \varphi_1 z_1 + \varphi_2 z_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \varphi_1 z_2 = \omega_1 z_1 + \omega_2 z_2 -$

$$A_z = \begin{bmatrix} -c_1 - \epsilon_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -c_2 - \epsilon_1 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right)^2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -c_3 - \epsilon_2 \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial y}\right)^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -c_n - \epsilon_{n-1} \left(\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

**3.2 微分平滑算法(Differential flatness algorithm)**

我们注意到, 虚拟控制量  $\alpha$  是  $\bar{\theta}^{(i)}$  的函数, 即虚

$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \varphi_1 z_2$ , 其中  $\omega_2 = \varphi_2$ , 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 + \frac{D^2}{4\epsilon_0} + \\ & \frac{D^2}{4\epsilon_1} + (\hat{\theta} - \theta^*)^T (\dot{\hat{\theta}} - \tau_2), \end{aligned} \tag{11}$$

当  $z_3 = 0$  时, 系统有界稳定. 以此类推, 第  $i$  步 ( $i = 3, \dots, n$ ), 按照同样方法得到系统的虚拟控制律和自适应律:

$$\begin{cases} \alpha_i(y, \bar{x}_i, \bar{\theta}^{(i-1)}, \bar{y}_r^{(i-1)}) = \\ \quad - z_{i-1} - c_i z_i - \omega_i \dot{\hat{\theta}} - \beta_i(y - x_1) + \\ \quad \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} (x_2 + \varphi_1^T \hat{\theta}) - \epsilon_{i-1} \left[\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y}\right]^2 z_i + \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \right. \\ \quad \left. \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}^{(k-1)}} \hat{\theta}^{(k)} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(k-1)}} y_r^{(k)} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \beta_k(y - x_1)\right), \\ \omega_i(y, \bar{x}_i, \bar{\theta}^{(i-1)}, \bar{y}_r^{(i-2)}) = \varphi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \varphi_k, \\ \dot{\hat{\theta}} \triangleq \tau_i = \sum_{k=1}^i (\omega_k - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} \varphi_1) z_k. \end{cases} \tag{12}$$

其中:  $i = 3, \dots, n; c_i > 0; \alpha_0 = 0$ . 在第  $n$  步, 系统控制律:

$$u = (\alpha_n + y_r^{(n)}) / g(y). \tag{13}$$

由式(4)可知,  $z$  是  $x$  的微分同胚变换, 利用各阶子系统的虚拟控制(12)以及式(13), 则有

$$\dot{z} = A_z z + W^T(\theta^* - \hat{\theta}) + M^T(e_2 + \delta_1). \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned} z &= [z_1 \quad \dots \quad z_n]^T, \\ W &= \left[ \omega_1 \quad \omega_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \varphi_1 \quad \omega_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \varphi_1 \quad \dots \quad \omega_n - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} \varphi_1 \right], \\ M &= \left[ 1 \quad -\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \quad -\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \quad \dots \quad -\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} \right], \end{aligned}$$

拟控制不但与  $\hat{\theta}$  有关, 还与其高阶导数有关. 为了引入  $\hat{\theta}$  的导数项, 在对  $\hat{\theta}$  进行逼近过程中, 引入微分平

滑算法.微分平滑是在采用微分几何理论进行精确反馈线性化过程中,在微分同胚意义上引入适当的积分,对系统动态扩展,以使系统更多分量线性化时提出的.同时,参数逼近过程中,往往需要通过适当的积分或动态扩展才能使跟踪达到满意得效果.微分平滑刻画了经适当动态反馈扩展可等价于另一系统的特征.在这里,我们利用微分平滑是为了得到  $\hat{\theta}$  的高阶导数项.以实现各子系统的虚拟控制  $\alpha$ . 扩展后的系统阶数较原系统高,但它们微分等价.

具体做法是:选择一个渐近稳定的  $n - 2$  阶首一多项式  $g(s)$ ,设计传递函数  $G(s) = g(0)/(s + l)g(s)$ , 传递函数相对阶为  $n - 1$ , 则用式(15)表示系统不确定参数逼近过程:

$$\hat{\theta}_i = \frac{g(0)}{(s + l)g(s)} \left[ \sum_{k=1}^n \left( \omega_{k,i} - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} \varphi_{1,i} \right) z_k \right]. \tag{15}$$

其中:  $i = 1, \dots, q; l > 0; \alpha_0 = 0$ . 若  $(c^T, \Lambda, b)$  是传递函数  $g(0)/g(s)$  的最小实现,即:  $c^T(sI - \Lambda)b = g(0)/g(s)$ . 则微分平滑过程为

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i = \sum_{k=1}^n \left( \omega_{k,i} - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} \varphi_{1,i} \right) z_k - l\psi_i, \\ \dot{\eta}_i = \Lambda \eta_i + b\psi_i, \\ \hat{\theta}_i = c^T \eta_i. \end{cases} \tag{16}$$

微分平滑系统是稳定的,即存在正定矩阵  $P$ , 满足  $\Lambda^T P + P\Lambda = -2I$  成立. 系统  $(c^T, \Lambda, b)$  有如下性质:

$$c^T \Lambda^{-1} b = -1, c^T \Lambda^{j-1} b = 0, j = 1, \dots, n - 3. \tag{17}$$

根据式(16),(17),可得到参数估计值的各阶导数:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_i^{(j)} = c^T \Lambda^j \eta_i, & j = 1, 2, \dots, n - 3, \\ \hat{\theta}_i^{(n-2)} = c^T \Lambda^{n-2} \eta_i + c^T \Lambda^{n-3} b\psi_i, \\ \hat{\theta}_i^{(n-1)} = c^T \Lambda^{n-1} \eta_i + c^T \Lambda^{n-2} b\psi_i + \\ \quad c^T \Lambda^{n-3} b \left[ \sum_{k=1}^n \left( \omega_{k,i} - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} \varphi_{1,i} \right) z_k - l\psi_i \right]. \end{cases} \tag{18}$$

未知参数的逼近误差为

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= (\theta^* - \hat{\theta}) = (\theta^* - \psi) - (\hat{\theta} - \psi) = \\ &= \text{col}\{(\theta_i^* - \psi_i) - (\hat{\theta}_i - \psi_i)\} = \\ &= \text{col}\{(\theta_i^* - \psi_i) - c^T(\eta_i + \Lambda^{-1}b\psi_i)\} = \\ &= \text{col}\{(\theta_i^* - \psi_i) - c^T \xi_i\}, \end{aligned} \tag{19}$$

其中  $\xi_i = \eta_i + \Lambda^{-1}b\psi_i$ . 对于  $\psi_i(z)$ , 有如下假设:

**假设 3** 非线性函数  $\psi_i(z)$  ( $i = 1, \dots, q$ ) 具有无零漂性质,即  $\psi_i(0) = 0$ , 且满足 Lipschitz 条件:

$$\|\psi_i(z) - \psi_i(z')\| \leq k_\psi \|z - z'\|. \tag{20}$$

其中  $k_\psi$  为正常数. 特别地,当  $z' = 0$  时,

$$\|\psi_i(z)\| \leq k_\psi \|z\| \leq k_\psi \sum_{k=1}^n |z_k|. \tag{21}$$

系统控制过程如图 1 所示. 对于形如式(2)的参数不确定的非线性系统,设计了基于虚拟全维状态观测器(3)的反步递推自适应控制器. 在参数估计的过程中,引入了微分平滑算法. 对系统进行动态扩展,扩展后的系统,可方便地求出  $\hat{\theta}$  的高阶导数. 引入微分平滑算法后,系统的稳定性需要保证,下面将对系统进行稳定性分析.

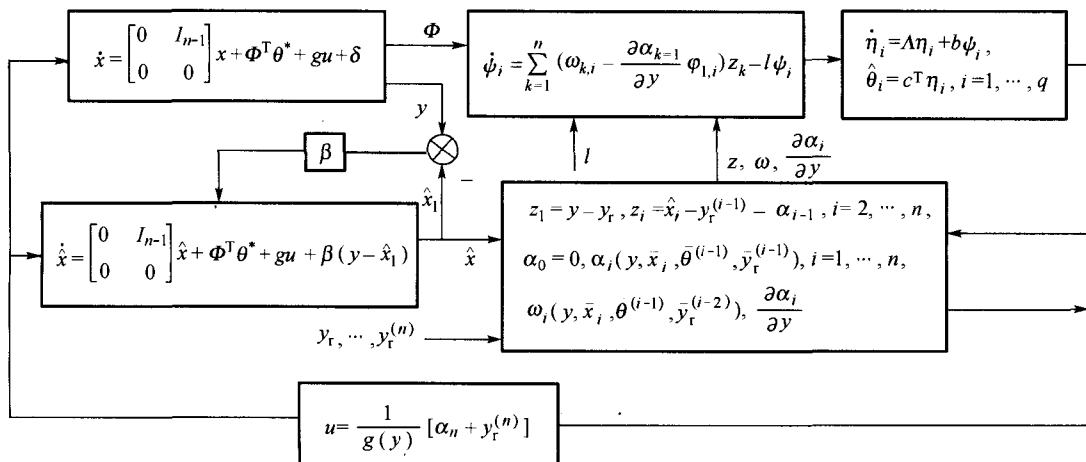


图 1 微分平滑反步自适应输出反馈控制框图

Fig.1 Block diagram of differential flatness adaptive backstepping output feedback control strategy

### 3.3 稳定性分析(Stability analysis)

设整个闭环系统的 Lyapunov 函数为

$$V(z, \bar{\xi}, \theta^* - \psi) = \frac{1}{2} z^T z + \frac{1}{2} (\theta^* - \psi)^T (\theta^* - \psi) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \xi_i^T P \xi_i. \tag{22}$$

对式(22)求导,并利用式(14),(16),(19),(21)得到:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & z^T \dot{z} + (\theta^* - \psi)^T (-\dot{\psi}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q (\xi_i^T P \dot{\xi}_i + \dot{\xi}_i^T P \xi_i) = \\ & - \sum_{k=1}^n \left( c_k + \epsilon_{k-1} \left[ \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} \right]^2 \right) z_k^2 - \epsilon_0 z_1^2 - z^T W^T \text{col} \{ c^T \xi_i \} - \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q (|\xi_i|^2 - 2 \xi_i^T P \Lambda^{-1} b \sum_{k=1}^n (\omega_{k,i} - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} \varphi_{1,i}) z_k) - l \sum_{i=1}^q (\xi_i^T P \Lambda^{-1} b \psi_i) - \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q |\xi_i|^2 + l (\theta^* - \psi)^T \psi + z^T M^T (e_2 + \delta_1) \leq \\ & - \sum_{k=1}^n \left( c_k + \epsilon_{k-1} \left[ \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} \right]^2 \right) z_k^2 - \epsilon_0 z_1^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q |\xi_i|^2 + \\ & \frac{l}{2} \|\theta^* - \psi\|^2 - \frac{l}{2} \|\theta^* - \psi\|^2 + z^T M^T (e_2 + \delta_1) - \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^n \left( \frac{|\xi_i|^2}{n} - 2 [ (|P \Lambda^{-1} b| + |c|) \left| \omega_{k,i} - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} \varphi_{1,i} \right| + |P \Lambda^{-1} b| |l k_\psi|] |z_k| |\xi_i| \right). \end{aligned} \tag{23}$$

式(23)推导过程中用到如下关系式:

$$|z^T W^T \text{col} \{ c^T \xi_i \}| \leq \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^n |c| |\omega_{k,i}| |z_k| |\xi_i|; \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \xi_i^T P \Lambda^{-1} b \sum_{k=1}^n (\omega_{k,i} - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} \varphi_{1,i}) z_k \leq \\ \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^n |P \Lambda^{-1} b| \left| \omega_{k,i} - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} \varphi_{1,i} \right| |z_k| |\xi_i|; \end{aligned} \tag{25}$$

$$2(\theta^* - \psi)^T \psi \leq \|\theta^*\|^2 - \|\theta^* - \psi\|^2. \tag{26}$$

若取

$$\begin{aligned} c_k = & \kappa_k + \frac{n}{2} [ (|P \Lambda^{-1} b| + \\ & |c|) \left| \omega_k - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} \varphi_1 \right| + |P \Lambda^{-1} b| |l k_\psi| ]^2, \end{aligned}$$

并利用等式

$$\sum_{k=1}^n \left| \omega_k - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} \varphi_1 \right|^2 z_k^2 = \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^n (\omega_{k,i} - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} \varphi_{1,i})^2 z_k^2, \tag{27}$$

则有:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \sum_{k=1}^n \left( \kappa_k + \epsilon_{k-1} \left[ \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} \right]^2 \right) z_k^2 - \epsilon_0 z_1^2 - \frac{l}{2} \|\theta^* - \psi\|^2 + \\ & \frac{l}{2} \|\theta^*\|^2 + z^T M^T (e_2 + \delta_1) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q |\xi_i|^2 - \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^n \left( \frac{|\xi_i|}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} [ (|P \Lambda^{-1} b| + |c|) |\omega_{k,i} - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} \varphi_{1,i}| + |P \Lambda^{-1} b| |l k_\psi|] |z_k| \right)^2 \leq \\ & - \sum_{k=1}^n \kappa_k z_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q |\xi_i|^2 - \sum_{k=2}^n \epsilon_{k-1} \left[ \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} \right]^2 z_k^2 - \epsilon_0 z_1^2 + \\ & \sum_{k=2}^n \left| \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} z_k \right| \left( D + |z_1| D - \frac{l}{2} \|\theta^* - \psi\|^2 + \frac{l}{2} \|\theta^*\|^2 \right) \leq \\ & - \sum_{k=1}^n \kappa_k z_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q |\xi_i|^2 - \sum_{k=2}^n \left( \sqrt{\epsilon_{k-1}} \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} z_k - \frac{D}{2 \sqrt{\epsilon_{k-1}}} \right)^2 - \\ & \left( \sqrt{\epsilon_0} z_1 - \frac{D}{2 \sqrt{\epsilon_0}} \right)^2 + \sum_{k=1}^n \frac{D^2}{4 \epsilon_{k-1}} - \frac{1}{2} \|\theta^* - \psi\|^2 + \frac{l}{2} \|\theta^*\|^2 \leq \\ & - \sum_{k=1}^n \kappa_k z_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q |\xi_i|^2 - \frac{l}{2} \|\theta^* - \psi\|^2 + \frac{l}{2} \|\theta^*\|^2 + \frac{n D^2}{4 \epsilon_{\min}}. \end{aligned} \tag{28}$$

其中  $\epsilon_{\min} = \min \{ \epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1} \}$ . 现定义

$$\Omega_z \triangleq \left\{ (z, \bar{\xi}, \theta^* - \psi) \mid \sum_{k=1}^n \kappa_k z_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q |\xi_i|^2 + \frac{l}{2} \|\theta^* - \psi\|^2 \leq \frac{n D^2}{4 \epsilon_{\min}} + \frac{l}{2} \|\theta^*\|^2 \right\}. \tag{29}$$

由于  $\epsilon_{\min}, \kappa, D, l$  都是正常数,因此  $\Omega_z$  为紧集. 所以,只要  $V$  在  $\Omega_z$  之外,就有  $\dot{V} \leq 0$ . 由 Lyapunov 定理可知  $z, \bar{\xi}, (\theta^* - \psi)$  是有界的. 且当  $(z, \bar{\xi}, \theta^* - \psi)$  位于  $\Omega_z$  之外时,  $\dot{V}$  严格为负. 因此存在一个常数  $T_0 > 0$ , 当  $t > T_0$  时系统状态收敛于  $\Omega_z$ . 根据式(29),系统的收敛域  $\Omega_z$  取决于  $D, \theta^*$  以及  $\epsilon_{\min}, l, D$  与系统受到的不确定扰动有关,  $\theta^*$  与系统本身的性质有关. 通过增大  $\epsilon_{\min}$  和减小  $l$  的值可以缩小系统的收敛域. 但是  $\epsilon_{\min}$  和  $l$  还与收敛速度有关,在系统设计时还应综合考虑.

进一步,若令  $\zeta = \min \{ 2\kappa_1, \dots, 2\kappa_n, 1/\lambda_{\max}(P) \}$ ,

l}, 其中  $\lambda_{\max}(P)$  为矩阵  $P$  的最大特征值, 则式(28)可写为

$$\dot{V} \leq -\zeta V + \frac{l}{2} \|\theta^*\|^2 + \frac{nD^2}{4\epsilon_{\min}}. \quad (30)$$

对于闭环系统 Lyapunov 函数(22), 利用式(30), 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V \cdot e^{\zeta t}) &= \dot{V}e^{\zeta t} + \zeta V e^{\zeta t} \leq \\ &\left(-\zeta V + \frac{l}{2} \|\theta^*\|^2 + \frac{nD^2}{4\epsilon_{\min}}\right)e^{\zeta t} + \zeta V e^{\zeta t} = \\ &\left(\frac{l}{2} \|\theta^*\|^2 + \frac{nD^2}{4\epsilon_{\min}}\right)e^{\zeta t} \end{aligned} \quad (31)$$

对式(31)在  $[0, t]$  上积分, 并用  $e^{-\zeta t}$  乘以表达式的两端, 得到

$$\begin{aligned} V(t) &\leq \left(V(0) - \frac{1}{\zeta} \left(\frac{l}{2} \|\theta^*\|^2 + \frac{nD^2}{4\epsilon_{\min}}\right)\right)e^{-\zeta t} + \\ &\frac{1}{\zeta} \left(\frac{l}{2} \|\theta^*\|^2 + \frac{nD^2}{4\epsilon_{\min}}\right). \end{aligned} \quad (32)$$

由式(32)可知, 若系统的初值有界, 即  $V(0)$  有界, 则  $V(t)$  有界. 且当  $t$  足够大时, 系统的上界与  $V(0)$  无关, 而仅取决于式(32)右端第2项. 又由于

$$|y - y_r| \leq 2V(t), \quad \text{则可得到系统的稳态跟踪误差}$$

$$|y - y_r| \leq \sqrt{\frac{2}{\zeta} \left(\frac{l}{2} \|\theta^*\|^2 + \frac{nD^2}{4\epsilon_{\min}}\right)}. \quad (33)$$

由式(33)可知, 可通过调整  $l, \zeta$  和  $\epsilon_{\min}$  的值来减小闭环系统稳态跟踪误差. 根据以上分析可知: 系统控制器能保证系统的闭环信号全局有界性, 该方法对系统外来的有界扰动或未建模动态有较强的适应能力.

#### 4 仿真算例 (Simulation example)

考虑如下带有未知扰动项的不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \theta_1 \sin x_1 + \delta_1(t), \\ \dot{x}_2 = [1.5 + \sin x_1] \cdot u + \theta_2 x_1^2, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (34)$$

其中  $\theta_1, \theta_2$  为未知参数, 其真值为:  $\theta_1 = 1; \theta_2 = 0.5$ ;  $\delta_1$  为系统未知扰动,  $\delta_1 = [1 + 0.5 \times \sin t] \cdot \sin x_1$ ; 取  $\beta = [5, 4]^T$ , 则可定义如下虚拟状态观测器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \theta_1 \sin y + 5(y - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 = [1.5 + \sin x_1]u + \theta_2 y^2 + 4(y - \hat{x}_1). \end{cases} \quad (35)$$

系统状态初值设为:  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, \hat{\theta}_1(0) = 0, \hat{\theta}_2(0) = 0$ ; 观测器状态初值为:  $\hat{x}_1(0) = -0.8; \hat{x}_2(0) = -1$ . 要求设计系统的控制器使系统的输出

保持在原点附近. 根据文中提出的方法, 系统的控制律可取为

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -c_1 z_1 - \epsilon_0 z_1 - \varphi_1^T(y)\hat{\theta}, \\ u &= \\ &\frac{1}{1.5 + \sin y} [-z_1 - c_2 z_2 - \varphi_2^T \hat{\theta} - \beta_2(y - \hat{x}_1) + \\ &\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (\hat{x}_2 + \varphi_1^T \hat{\theta}) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \epsilon_1 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right)^2 z_2 + \dot{y}_r]. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} z_1 &= y - y_r, z_2 = \hat{x}_2 - \dot{y}_r - \alpha_1, \\ \omega_1 &= [\sin y, 0]^T \triangleq [\omega_{1,1}, \omega_{1,2}]^T, \\ \omega_2 &= [0, y^2]^T \triangleq [\omega_{2,1}, \omega_{2,2}]^T, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} &= -c_1 - \epsilon_0 - \theta_1 \cos y; \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} = [-\sin y, 0]; \\ c_k &= \kappa_k + [(|P\Lambda^{-1}b| + |c|) \left| \omega_k - \varphi_1 \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial y} \right| + \\ &|P\Lambda^{-1}b| |l k_\psi|^2]. \end{aligned}$$

微分平滑过程为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -l_1 & 0 \\ 0 & -l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{2,1} \\ \omega_{1,2} & \omega_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c^T & 0 \\ 0 & c^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_1 = c^T \Lambda \eta_1 + c^T b \psi_1, \dot{\theta}_2 = c^T \Lambda \eta_2 + c^T b \psi_2.$$

其它参数选为

$$\begin{aligned} \Lambda &= -6, b = 20, c = 0.3, P = 1/6, \\ \kappa_1 &= \kappa_2 = 3.5, l_1, l_2 = 0.5, \\ \epsilon_0 &= 1, \epsilon_1 = 0.05, k_\psi = 1. \end{aligned}$$

闭环系统状态, 参数估计以及系统的控制量如图2所示. 系统存在参数不确定及未知动态, 在文中控制律的作用下, 闭环系统的状态仍然稳定, 并收敛于原点. 系统的状态观测值逐渐趋近于真值. 并且系统所需的控制量也不是很大. 虽然系统的参数估计未能收敛到真值, 但是即使线性系统的自适应控制, 如果不加特殊条件也不能保证参数估计收敛到真值. 例如, Astrom-Wittenmark 自适应调节问题中, 系统参数估计只需收敛到某一值(不必是真值)便可实现最优控制. 所以参数估计未能收敛到真值, 对系统控制效果影响并不大.

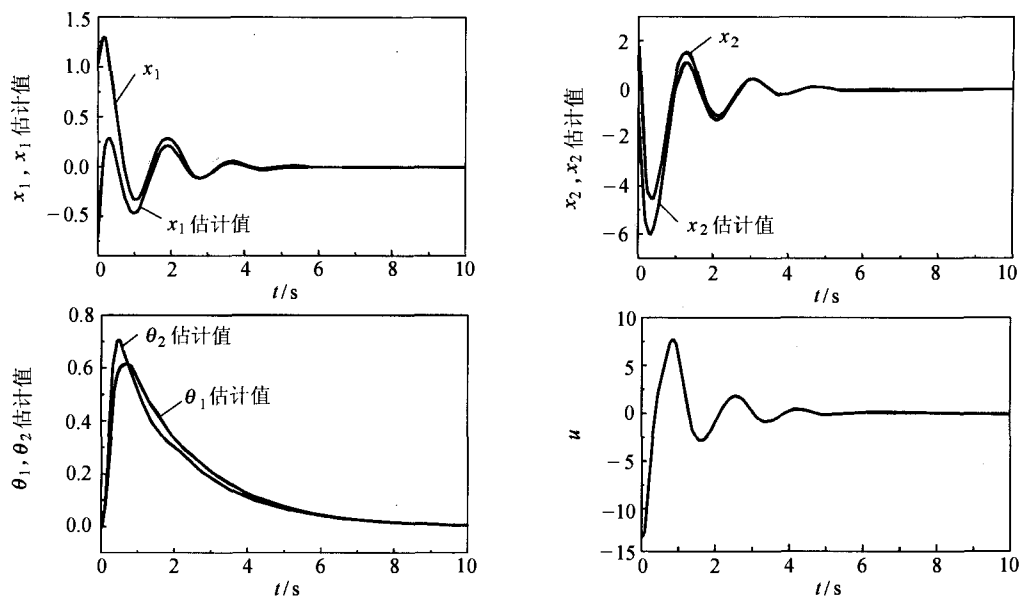


图2 系统仿真结果

Fig.2 Result of system simulation

## 5 结论(Conclusion)

本文研究了含有界扰动且参数不确定的一类非线性系统的输出反馈控制问题.给出了微分平滑反步自适应控制的设计方法.在稳定性分析中,讨论了闭环系统全局有界稳定的条件;同时分析了反馈系统稳态输出的跟踪误差,并给出了减小系统稳态输出误差的方法.采用微分平滑反步自适应方法可以处理较广泛的一类非线性系统的输出反馈自适应控制问题.该方法的不足之处是分析设计过程较为复杂,这方面的研究工作有待于进一步开展.

## 参考文献(References):

- [1] KANELAKOPOULOS L, KOKOTOVIC P V, MORSE A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(9): 1241 - 1253.
- [2] JOSE A R, RODOLFO S, AMERICA M. Cascade control for a class of uncertain nonlinear systems: a backstepping approach [J]. *Chemical Engineering Science*, 2000, 55(16): 3209 - 3221.

*cal Engineering Science*, 2000, 55(16): 3209 - 3221.

- [3] NIKIFOROV V O, VORONOV K V. Adaptive backstepping with a high-order tuner [J]. *Automatica*, 2001, 37(12): 1953 - 1960.
- [4] JIANG Zhongping. A combined backstepping and small-gain approach to adaptive output feedback control [J]. *Automatica*, 1999, 35(6): 1131 - 1139.
- [5] STOEJ J, JIN Y C, FARRELL J. Adaptive control for output feedback nonlinear systems in the presence of modeling errors [J]. *Automatica*, 2002, 38(10): 1761 - 1767.
- [6] 刘允刚, 施颂椒, 潘子刚. 随机非线性系统鲁棒自适应反馈控制器的积分反推方法设计[J]. *自动化学报*, 2001, 27(5): 613 - 620.  
(LIU Yungang, SHI Songjiao, PAN Zigang. Backstepping robust adaptive feedback control design for stochastic nonlinear systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(5): 613 - 620.)

## 作者简介:

于占东 (1976—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为非线性自适应控制、智能控制, E-mail: zhandong-yu@ds.hit.edu.cn;

王庆超 (1950—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为大系统递阶控制、过程控制等.