文章编号：1000-8152(2005)05-0783-07

时滞依赖型中立系统的观测器设计与镇定

张　友[1]，翟　丁[2]，刘　满[3]，张嗣瀛[1]
（1.东北大学 信息科学与工程学院，辽宁 沈阳 110004；2.东北大学 理学院数学系，辽宁 沈阳 110004；
3.大连民族学院 应用数理系，辽宁 大连，116600）

摘要：研究了一类时滞依赖型线性中立系统的观测器的设计与镇定问题，首先建立了一个时滞依赖型稳定性准则，基于LMI正定解的存在性，给出确保误差动力系统渐近稳定的充分条件及经状态反馈而达到镇定的设计方案．最后通过数值仿真来说明本文所得结论的正确性和有效性．

关键词：中立时滞系统；线性矩阵不等式；观测器；镇定性
中图分类号：TP273　　**文献标识码**：A

Delay-dependent observer design and observer-based stabilization of linear neutral delay system

ZHANG You[1]，ZHAI Ding[2]，LIU Man[3]，ZHANG Si-ying[1]
（1.School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China;
2.College of Science, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China;
3.Departmant of Mathematics, Dalian Nationalities University, Dalian Liaoning 116600, China）

Abstract: The delay-dependent stability criterion, the state observers design and observer-based stabilization are dealt with for linear neutral delay systems. Firstly, a delay-dependent stability criterion is developed based on a method of linear matrix inequality(LMI). Secondly, an LMI-based observer design for the error dynamics is presented. Thirdly, the observer-based stabilization problem of the neutral delay systems is solved by means of the solvability of two LMIs. Finally, two numerical examples are used to demonstrate the validity and effectiveness of the proposed approaches.

Key words: neutral delay systems; linear matrix-inequality; observer; stability

1　引言(Introduction)

众所周知，在许多动力系统中时滞是导致系统不稳定的根源，因此时滞系统的稳定性分析与控制器综合引起人们的极大关注，如文献[1～5]．

另外，在一些控制系统中，不仅状态中有时滞，同时其状态导数中也有时滞，这样一类动态系统通常称为中立时滞系统，参见文献[2,6]．在过去的20年里，许多学者致力于中立时滞系统的稳定性分析与反馈控制问题的研究，通过矩阵测度，代数Riccati方程，线性矩阵不等式方法建立了许多关于中立时滞系统时滞独立型与时滞依赖型的稳定性准则．

近来，Park和Won[6]给出了确保依赖型中立时滞系统稳定性的充分条件．通过模型变换技术，Han[7]得到时滞依赖型稳定性准则．Xu等[8]解决了线性中立时滞系统的H_∞和正实控制问题，并发展了相应的控制器设计方案．Mahmoud[9]考虑了线性不确定性中立时滞系统的鲁棒H_∞控制，并得出一些可解性的充分条件．

从实践观点来看，系统的状态通常是未知或部分已知，因而在应用中设计一个观测器来估计中立时滞系统的状态就显得尤为重要．然而，与中立时滞系统的稳定性的研究相比，关于观测器设计的研究却是少之以少．Wang等[10]最近通过奇异值分解和广义逆原理来研究了中立时滞系统的观测器设计问题，依据一个代数Riccati方程正定解的存在性提出了一个中立时滞系统观测器的设计方案，而基于观测器的镇定问题却没有考虑．

文中，$\mathbb{R}^n$表示n维欧氏空间，并且对任意实对称阵X，$X>0(X\geqslant 0)$表示X是一个正定(半正定)矩阵．$\|\cdot\|$表示向量的欧氏范数或相应的导出2-范数．$\lambda_M(A)$和$\lambda_m(A)$分别表示矩阵A的最大和最小特征值．

收稿日期：2003-08-14；收修改稿日期：2004-11-25．
基金项目：中国博士后科学基金资助项目(2005037758)；东北师范大学自然科学青年基金资助项目(20050104)．

2 预备知识(Preliminaries)

考虑如下线性时滞系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+A_hx(t-h)+A_d\dot{x}(t-h)+Bu(t),\\ x(t)=\varphi(t),\ t\in[-h,0],\\ y(t)=Cx(t),\end{cases}\tag{1}$$

其中: $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 是状态向量, $u(t)\in\mathbb{R}^m$ 是控制输入向量, $y(t)\in\mathbb{R}^q$ 是量测输出向量. 标量 $h>0$ 表示状态及其导数的时滞. $\varphi(t)\in\mathbb{R}^n$ 是一个连续初始向量值函数. A,A_h,A_d,B 和 C 是已知且具有适当维数的常量矩阵.

系统(1)通常称为中立时滞系统,而系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+A_hx(t-h)+A_d\dot{x}(t-h),\\ x(t)=\varphi(t),\ t\in[-h,0],\end{cases}\tag{2}$$

称为系统(1)的非受迫标称系统.

由 Newton-Leibniz 公式

$$x(t-h)=x(t)-\int_{-h}^{0}\dot{x}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha.$$

把上式代入式(2),我们得到

$$\dot{x}(t)=(A+A_h)x(t)-A_h\int_{-h}^{0}\dot{x}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha+A_d\dot{x}(t-h).\tag{3}$$

显而易见方程(2) 和(3) 是相互等价的,即它们有共的解.

3 一个时滞依赖型稳定性准则(Delay-dependent stability criterion)

在这一节里我们将对系统(1)的非受迫标称系统(2) 提出一个时滞依赖型渐近稳定条件.

由预备知识知,方程(2) 和(3) 是相互等价的,因而方程(2) 的稳定性问题可以转化为方程(3)的相同问题而解决.对系统(3), 选择如下 Lyapunov 泛函

$$\begin{aligned}&V(x_t,t)=\\ &x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\int_{t-h}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Sx(s)\mathrm{d}s+\\ &\int_{t-h}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)H\dot{x}(s)\mathrm{d}s+\int_{-h}^{0}\Big(\int_{t+\alpha}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)H\dot{x}(s)\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}\alpha,\end{aligned}\tag{4}$$

这里 $P>0,S>0,H>0$ 给定.那么,对于系统(3) 给定 Lyapunov 泛函(4),有如下定理成立.

定理 1　对于给定常数 h^*, 考虑非受迫标称系统(3). 对于 $0<h\leqslant h^*$, 系统(3) 是渐近稳定的,如果存在矩阵 $X>0,T>0,Y>0$ 使得如下的 LMI 成立

$$\begin{bmatrix}\begin{matrix}(A+A_h)X+\\ X(A+A_h)^{\mathrm{T}}\end{matrix} & 0 & A_dY & XA^{\mathrm{T}} & X & A_hY\\ * & -T & 0 & TA_h^{\mathrm{T}} & 0 & 0\\ * & * & -Y & YA_d^{\mathrm{T}} & 0 & 0\\ * & * & * & \dfrac{-1}{1+h^*}Y & 0 & 0\\ * & * & * & * & -T & 0\\ * & * & * & * & * & \dfrac{-1}{h^*}Y\end{bmatrix}<0,\tag{5}$$

其中 * 表示对称位置上的转置元素.

证　首先证明,对于系统(3)给定 Lyapunov 泛函(4),不等式

$$\|\varphi(\theta)\|^2\leqslant 2\|\varphi(0)\|^2+2h\int_{\theta}^{0}\|\dot{\varphi}(s)\|^2\mathrm{d}s,\ \theta\in[-h,0]\tag{6}$$

成立.由于 $\varphi(\theta)=\varphi(0)-\int_{\theta}^{0}\dot{\varphi}(s)\mathrm{d}s,\theta\in[-h,0]$, 因而易得下面的不等式

$$\|\varphi(\theta)\|\leqslant\|\varphi(0)\|+\int_{\theta}^{0}\|\dot{\varphi}(s)\|\mathrm{d}s,$$

从而

$$\begin{aligned}&\|\varphi(\theta)\|^2\leqslant\\ &\Big(\|\varphi(0)\|+\int_{\theta}^{0}\|\dot{\varphi}(s)\|\mathrm{d}s\Big)^2\leqslant\\ &\|\varphi(0)\|^2+2\|\varphi(0)\|\int_{\theta}^{0}\|\dot{\varphi}(s)\|\mathrm{d}s+\\ &\Big(\int_{\theta}^{0}\|\dot{\varphi}(s)\|\mathrm{d}s\Big)^2\leqslant\\ &2\|\varphi(0)\|^2+2\Big(\int_{\theta}^{0}\|\dot{\varphi}(s)\|\mathrm{d}s\Big)^2\leqslant\\ &2\|\varphi(0)\|^2+2\int_{\theta}^{0}\|\dot{\varphi}(s)\|^2\mathrm{d}s\int_{\theta}^{0}1\mathrm{d}s=\\ &2\|\varphi(0)\|^2-2\theta\int_{\theta}^{0}\|\dot{\varphi}(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\\ &2\|\varphi(0)\|^2+2h\int_{\theta}^{0}\|\dot{\varphi}(s)\|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

其次证明,对系统(3)给定 Lyapunov 泛函(4),存在常数 $\alpha_1>0$ 和 $\alpha_2>0$ 使得

$$\alpha_1\|\varphi(0)\|^2\leqslant V(\varphi(\theta),t)\leqslant\alpha_2\|\varphi(\theta)\|_W^2,$$

其中

$$\|\varphi(\theta)\|_W=[\|\varphi(0)\|^2+\int_{-h}^{0}\|\dot{\varphi}(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta]^{1/2}.$$

由式(4)可得 $V(\varphi(\theta),t)\geqslant\lambda_{\mathrm{m}}(P)\|\varphi(0)\|^2$,因而,对左边不等式可以取 $\alpha_1=\lambda_{\mathrm{m}}(P)$.

$$V(\varphi(\theta),t)=$$
$$\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)P\varphi(\theta)+\int_{-h}^{0}\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)S\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta+$$
$$\int_{-h}^{0}\dot{\varphi}^{\mathrm{T}}(\theta)H\dot{\varphi}(\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{-h}^{0}(\int_{\alpha}^{0}\dot{\varphi}^{\mathrm{T}}(\theta)H\dot{\varphi}(\theta)\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}\alpha\leqslant$$
$$\lambda_{\mathrm{M}}(P)\|\varphi(\theta)\|^2+\lambda_{\mathrm{M}}(S)\int_{-h}^{0}\|\varphi(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta+$$
$$\lambda_{\mathrm{M}}(H)\int_{-h}^{0}\|\dot{\varphi}(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta+$$
$$\lambda_{\mathrm{M}}(H)\int_{-h}^{0}(\int_{\alpha}^{0}\|\dot{\varphi}(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}\alpha\leqslant$$
$$\lambda_{\mathrm{M}}(P)\|\varphi(\theta)\|^2+\lambda_{\mathrm{M}}(S)\int_{-h}^{0}\|\varphi(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta+$$
$$(\lambda_{\mathrm{M}}(H)+h\lambda_{\mathrm{M}}(H))\int_{-h}^{0}\|\dot{\varphi}(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta. \tag{7}$$

把式(6)代入式(7),得

$$V(\varphi(\theta),t)\leqslant$$
$$2(\lambda_{\mathrm{M}}(P)+h\lambda_{\mathrm{M}}(S))\|\varphi(0)\|^2+$$
$$(2h(\lambda_{\mathrm{M}}(P)+\lambda_{\mathrm{M}}(S))+(1+h)\lambda_{\mathrm{M}}(\dot{H}))\int_{-h}^{0}\|\dot{\varphi}(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta\leqslant$$
$$\alpha_2\Big(\|\varphi(0)\|^2+\int_{-h}^{0}\|\dot{\varphi}(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta\Big),$$

这里

$$\alpha_2=\max\{2(\lambda_{\mathrm{M}}(P)+h\lambda_{\mathrm{M}}(S)),$$
$$2h(\lambda_{\mathrm{M}}(P)+\lambda_{\mathrm{M}}(S))+(1+h)\lambda_{\mathrm{M}}(H)\}>0.$$

为简单记,在下面的证明里记 $x(t)=x,x(t-h)=x_h,\dot{x}(t-h)=\dot{x}_h$. 对于 Lyapunov 泛函(4),取 $P=X^{-1},S=T^{-1}$ 和 $H=Y^{-1}$. 那么 V 沿着系统(3)的导数为

$$\dot{V}=$$
$$2\dot{x}^{\mathrm{T}}Px+x^{\mathrm{T}}Sx-x_h^{\mathrm{T}}Sx_h+\dot{x}^{\mathrm{T}}H\dot{x}-$$
$$\dot{x}_h^{\mathrm{T}}H\dot{x}_h+\int_{-h}^{0}[\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)H\dot{x}(t)-\dot{x}^{\mathrm{T}}(t+\alpha)H\dot{x}(t+\alpha)]\mathrm{d}\alpha=$$
$$2\dot{x}^{\mathrm{T}}Px+x^{\mathrm{T}}Sx-x_h^{\mathrm{T}}Sx_h+(1+h)\dot{x}^{\mathrm{T}}H\dot{x}-\dot{x}_h^{\mathrm{T}}H\dot{x}_h-$$
$$\int_{-h}^{0}\dot{x}^{\mathrm{T}}(t+\alpha)H\dot{x}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha=$$
$$x^{\mathrm{T}}(P(A+A_h)+(A+A_h)^{\mathrm{T}}P+S)x-$$
$$2x^{\mathrm{T}}P\int_{-h}^{0}A_h\dot{x}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha+2x^{\mathrm{T}}PA_d\dot{x}_h-$$
$$x_h^{\mathrm{T}}Sx_h+\dot{x}(1+h)H\dot{x}-\dot{x}_h^{\mathrm{T}}H\dot{x}_h-$$
$$\int_{-h}^{0}\dot{x}^{\mathrm{T}}(t+\alpha)H\dot{x}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha. \tag{8}$$

显然下面的不等式成立

$$-2x^{\mathrm{T}}P\int_{-h}^{0}A_h\dot{x}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha=$$
$$-\int_{-h}^{0}2x^{\mathrm{T}}PA_h\dot{x}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha\leqslant$$
$$hx^{\mathrm{T}}PA_hH^{-1}A_h^{\mathrm{T}}Px+\int_{-h}^{0}\dot{x}^{\mathrm{T}}(t+\alpha)H\dot{x}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha. \tag{9}$$

另外,由于式(2)(3)等价,我们可以用式(2)并得到

$$\dot{x}(H+hH)\dot{x}=$$
$$x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(1+h)HAx+$$
$$2x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(1+h)HA_hx_h+2x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(1+HA_d\dot{x}_h+$$
$$2x_h^{\mathrm{T}}A_h^{\mathrm{T}}(1+h)HA_d\dot{x}_h+x_h^{\mathrm{T}}A_h^{\mathrm{T}}(1+h)HA_hx_h+$$
$$\dot{x}_h^{\mathrm{T}}A_d^{\mathrm{T}}(1+h)HA_d\dot{x}_h. \tag{10}$$

把式(9)(10)代入式(8)得到

$$\dot{V}\leqslant$$
$$x^{\mathrm{T}}(P(A+A_h)+(A+A_h)^{\mathrm{T}}P+S+$$
$$A^{\mathrm{T}}(1+h)HA+hPA_hH^{-1}A_h^{\mathrm{T}}P)x+$$
$$2x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(1+h)HA_hx_h+$$
$$2x^{\mathrm{T}}(PA_d+A^{\mathrm{T}}(1+h)HA_d)\dot{x}_h+$$
$$x_h^{\mathrm{T}}(A_h^{\mathrm{T}}(1+h)HA_h-S)x_h+$$
$$2x_h^{\mathrm{T}}A_h^{\mathrm{T}}(1+h)HA_d\dot{x}_h+$$
$$\dot{x}_h^{\mathrm{T}}(A_d^{\mathrm{T}}(1+h)HA_d-H)\dot{x}_h=$$
$$\begin{bmatrix}x\\x_h\\\dot{x}_h\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\tilde{\Phi} & A^{\mathrm{T}}(1+h)HA_h & PA_d+A^{\mathrm{T}}(1+h)HA_d\\ * & A_h^{\mathrm{T}}(1+h)HA_b-S & A_h^{\mathrm{T}}(1+h)HA_d\\ * & * & A_d^{\mathrm{T}}(1+h)HA_d-H\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\x_h\\\dot{x}_h\end{bmatrix}, \tag{11}$$

这里 $\tilde{\Phi}=P(A+A_h)+(A+A_h)^{\mathrm{T}}P+S+A^{\mathrm{T}}(1+h)HA+hPA_hH^{-1}A_h^{\mathrm{T}}P$.

显而易见,不等式(11) 蕴含着 $\dot{V}<0$, 如果

$$\begin{bmatrix}\tilde{\Phi} & A^{\mathrm{T}}(1+h)HA_h & PA_d+A^{\mathrm{T}}(1+h)HA_d\\ * & A_h^{\mathrm{T}}(1+h)HA_h-S & A_h^{\mathrm{T}}(1+h)HA_d\\ * & * & A_d^{\mathrm{T}}(1+h)HA_d-H\end{bmatrix}<0. \tag{12}$$

注意到式(12)中的矩阵是正定性的意义上是关于 $h>0$ 单调递增的. 从而,对于 $0<h\leqslant h^*$, 如果

$$\begin{bmatrix}\tilde{\Phi}^* & A^{\mathrm{T}}(1+h^*)HA_h & PA_d+A^{\mathrm{T}}(1+h^*)HA_d\\ * & A_h^{\mathrm{T}}(1+h^*)HA_h-S & A_h^{\mathrm{T}}(1+h^*)HA_d\\ * & * & A_d^{\mathrm{T}}(1+h^*)HA_d-H\end{bmatrix}<0 \tag{13}$$

成立,那么式(12)成立. 其中 $\tilde{\Phi}^*=P(A+A_h)+(A+A_h)^{\mathrm{T}}P+S+A^{\mathrm{T}}(1+h^*)HA+h^*PA_hH^{-1}A_h^{\mathrm{T}}P$. 由 Schur 补引理[12],式(13)成立当且仅当

$$\begin{bmatrix} P(A+A_h)+(A+A_h)^{\mathrm{T}}P+S & 0 & PA_d & A^{\mathrm{T}} & PA_h \\ * & -S & 0 & A_h^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & -H & A_d^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & * & \dfrac{-1}{1+h^*}H^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & \dfrac{-1}{h^*}H \end{bmatrix} < 0. \tag{14}$$

(14)两边同乘 diag(X,T,Y,I,Y)，再应用 Schur 补引理，我们得到

$$\begin{bmatrix} (A+A_h)X+X(A+A_h)^{\mathrm{T}} & 0 & A_dY & XA^{\mathrm{T}} & X & A_hY \\ * & -T & 0 & TA_h^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & -Y & YA_d^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & * & \dfrac{-1}{1+h^*}Y & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -T & 0 \\ * & * & * & * & * & \dfrac{-1}{h^*}Y \end{bmatrix} < 0. \tag{15}$$

因而，当定理 1 的条件满足时，式(15)成立. 从而，式(12)成立. 进而有 $\dot V<0$ 对 $0<h\leqslant h^*$. 令

$$w_1(\|\varphi(0)\|)=\alpha_1\|\varphi(0)\|^2,$$

$$w_2(\|\varphi(\theta)\|_w)=\alpha_2\|\varphi(\theta)\|_W^2,$$

其中 $\|\varphi(\theta)\|_W$ 应用定理 1.6[11]，系统(3) 是渐近稳定的，进而系统(2) 也是渐近稳定的. 证毕.

4 基于观测器的镇定问题(Observer-based stabilization problem)

4.1 观测器的设计(Oberver design)

在这一节中，我们将对系统(1)设计一个时滞依赖型状态观测器，并使估计误差渐近趋向于 0. 为此，下面的状态观测器用来估计系统(1)的状态.

$$\begin{cases} \dot{\hat x}(t)=A\hat x(t)+A_h\hat x(t-h)+A_d\dot{\hat x}(t-h)+\\ \qquad L(y(t)-\hat y(t))+Bu(t), \\ \hat y(t)=C\hat x(t). \end{cases} \tag{16}$$

定义状态估计误差为 $e(t)=x(t)-\hat x(t)$，相应的误差动态系统为

$$\dot e(t)=(A-LC)e(t)+A_he(t-h)+A_d\dot e(t-h). \tag{17}$$

下面的定理指出如何确定一个观测器增益矩阵 L 使得系统(17)渐近稳定.

定理 2 给定常数 $h^*>0$. 考虑系统(17)，如果存在矩阵 $X>0,T>0,Y>0$ 和 F 满足如下的 LMI:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \Psi & 0 & A_d^{\mathrm{T}}Y & XA-FC & X & A_h^{\mathrm{T}}Y \\ * & -T & 0 & TA_h & 0 & 0 \\ * & * & -Y & YA_d & 0 & 0 \\ * & * & * & \dfrac{-1}{1+h^*}Y & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -T & 0 \\ * & * & * & * & * & \dfrac{-1}{h^*}Y \end{bmatrix} < 0, \\ \Psi=(A+A_h)^{\mathrm{T}}X+X(A+A_h)-FC-C^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}, \end{cases} \tag{18}$$

那么误差系统(17) 是渐近稳定的，对任意的 $0<h\leqslant h^*$，且观测增益矩阵为 $L=X^{-1}F$.

证 由 $L=X^{-1}F$，得 $F=XL$. 因而式(18)可变为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega & 0 & A_d^{\mathrm{T}}Y & XA-FC & X & A_h^{\mathrm{T}}Y \\ * & -T & 0 & TA_h & 0 & 0 \\ * & * & -Y & YA_d & 0 & 0 \\ * & * & * & \dfrac{-1}{1+h^*}Y & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -T & 0 \\ * & * & * & * & * & \dfrac{-1}{h^*}Y \end{bmatrix} < 0, \\ \Omega=(A-LC+A_h)^{\mathrm{T}}X+X(A-LC+A_h), \end{cases} \tag{19}$$

由定理 1，式(19)蕴含着系统

$$\dot\eta(t)=(A-LC)^{\mathrm{T}}\eta(t)+A_h^{\mathrm{T}}\eta(t-h)+A_d^{\mathrm{T}}\dot\eta(t-h) \tag{20}$$

是渐近稳定的对任意的 $0 < h \leqslant h^*$. 既然系统(17)和(20)具有相同的极点,因而系统(17)也是渐近稳定的对任意的 $0 < h \leqslant h^*$.　　证毕.

4.2 基于观测器的镇定问题(Oberver-based stabilization problem)

这一节我们将讨论中立时滞系统基于观测器的镇定问题.

考虑系统(1)的扩张系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & -BK \\ 0 & A_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_h & 0 \\ 0 & A_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h) \\ e(t-h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & A_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t-h) \\ \dot{e}(t-h) \end{bmatrix}, \tag{21}$$

其中: $A_c = A + BK, A_l = A - LC$, 那么对于系统(21),基于观测器的状态反馈镇定问题,我们有如下结论.

定理 3　给定 $h^* > 0$ 和矩阵 Q,若总存在 $X_i > 0, T_i > 0, Y_i > 0, i = 1,2$ 和矩阵 N 满足下面两个 LMI,则系统(21)是渐近镇定的,且 $K = -B^{\mathrm{T}}X_1, L = X_2^{-1}N$,

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & X_1A & 0 & A_h^{\mathrm{T}}Y_1 & A_d^{\mathrm{T}}Y_1 & X_1 & 0 \\ A^{\mathrm{T}}X_1 & -\frac{1}{1+h^*}Y_1 & A_h^{\mathrm{T}}T_1 & 0 & A_d^{\mathrm{T}}Y_1 & 0 & B^{\mathrm{T}}X_1 \\ 0 & T_1A_h & -T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_1A_h & 0 & 0 & -\frac{1}{h^*}Y_1 & 0 & 0 & 0 \\ Y_1A_d & Y_1A_d & 0 & 0 & -Y_1 & 0 & 0 \\ X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_1 & 0 \\ 0 & B^{\mathrm{T}}X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_2 & X_2A - NC & A_d^{\mathrm{T}}Y_2 & X_2 & 0 & A_h^{\mathrm{T}}Y_2 \\ A^{\mathrm{T}}X_2 - C^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}} & -\frac{1}{1+h^*}Y_2 & A_d^{\mathrm{T}}Y_2 & 0 & A_h^{\mathrm{T}}T_2 & 0 \\ Y_2A_d & Y_2A_d & -Y_2 & 0 & 0 & 0 \\ X_2 & 0 & 0 & -T_2 & 0 & 0 \\ 0 & T_2A_h & 0 & 0 & -T_2 & 0 \\ Y_2A_h & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h^*}Y_2 \end{bmatrix} < 0, \tag{23}$$

其中:

$$\Sigma_1 = (A + A_h)^{\mathrm{T}}X_1 + X_1(A + A_h) + QBB^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}} - QBB^{\mathrm{T}}X - XBB^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}},$$

$$\Sigma_2 = (A + A_h)^{\mathrm{T}}X_2 + X_2(A + A_h) - NC - C^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}.$$

证　设

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_c & -BK \\ 0 & A_l \end{bmatrix}, \bar{A}_h = \begin{bmatrix} A_h & 0 \\ 0 & A_h \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_d = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & A_d \end{bmatrix},$$

且

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}, \bar{T} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}, \bar{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix}$$

为正定矩阵.

考虑矩阵

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} O & 0 & \bar{A}_d^{\mathrm{T}}\bar{Y} & \overline{XA} & \bar{X} & \bar{A}_h^{\mathrm{T}}\bar{Y} \\ * & -\bar{T} & 0 & \overline{TA_h} & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{Y} & \overline{YA_d} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{1+h^*}\bar{Y} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{T} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{1}{h^*}\bar{Y} \end{bmatrix}, \\ O = (\bar{A} + \bar{A}_h)^{\mathrm{T}}\bar{X} + \bar{X}(\bar{A} + \bar{A}_h), \end{cases} \tag{24}$$

把 $\bar{A}, \bar{A}_h, \bar{A}_d$ 及 $\bar{X}, \bar{T}, \bar{Y}$ 代入式(24),并进行行换和相应的列换,则得到下面的矩阵

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^{\mathrm{T}} & \Phi_{22} \end{bmatrix}. \tag{25}$$

其中

$$\Gamma_1 = (A_c + A_h)^{\mathrm{T}}X_1(A_c + A_h),$$

$$\Gamma_2 = (A_l + A_h)^{\mathrm{T}}X_2 + X_2(A_l + A_h),$$

$$\Phi_{11}=\begin{bmatrix}\Gamma_1 & X_1A_c & 0 & A_h^{\mathrm T}Y_1 & A_d^{\mathrm T}Y_1 & X_1\\ A_c^{\mathrm T}X_1 & -\frac{1}{1+h^*}Y_1 & A_h^{\mathrm T}T_1 & 0 & A_d^{\mathrm T}Y_1 & 0\\ 0 & T_1A_h & -T_1 & 0 & 0 & 0\\ Y_1A_h & 0 & 0 & -\frac{1}{h^*}Y_1 & 0 & 0\\ Y_1A_d & Y_1A_d & 0 & 0 & -Y_1 & 0\\ X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_1\end{bmatrix},$$

$$\Phi_{12}=\begin{bmatrix}-X_1BK & -X_1BK & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\Phi_{22}=\begin{bmatrix}\Gamma_2 & X_2A_l & A_d^{\mathrm T}Y_2 & X_2 & 0 & A_h^{\mathrm T}Y_2\\ A_l^{\mathrm T}X_2 & -\frac{1}{1+h^*}Y_2 & A_d^{\mathrm T}Y_2 & 0 & A_h^{\mathrm T}T_2 & 0\\ Y_2A_d & Y_2A_d & -Y_2 & 0 & 0 & 0\\ X_2 & 0 & 0 & -T_2 & 0 & 0\\ 0 & T_2A_h & 0 & 0 & -T_2 & 0\\ Y_2A_h & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h^*}Y_2\end{bmatrix}.$$

由 Shur 补引理[11],式(25)<0等价于

$$\begin{bmatrix}\Phi_{11} & 0\\ 0 & \Phi_{22}-\Phi_{12}^{\mathrm T}\Phi_{11}^{-1}\Phi_{12}\end{bmatrix}<0, \tag{26}$$

即式(26)有解等价于 $\Phi_{11}<0$ 和 $\Phi_{22}<0$ 有解.显然,不等式(26)的解一定满足 $\Phi_{11}<0$ 和 $\Phi_{22}<0$.另一方面,如果 $\{X_1>0,T_1>0,Y_1>0\}$ 是 $\Phi_{11}<0$ 的解,且 $\{X_2>0,T_2>0,Y_2>0\}$ 是 $\Phi_{22}<0$ 的解,那么一定存在 $\lambda>0$,使得 $\{X_1>0,\lambda X_2,T_1>0,\lambda T_2,Y_1>0,\lambda Y_2\}$ 是式(26)的解.注意到

$$\Phi_{22}(\lambda X_2,\lambda T_2,\lambda Y_2)-\Phi_{12}^{\mathrm T}\Phi_{11}^{-1}(X_1,T_1,Y_1)\Phi_{12}=\lambda\Phi_{22}(X_2,T_2,Y_2)-\Phi_{12}^{\mathrm T}\Phi_{11}^{-1}(X_1,T_1,Y_1)\Phi_{12}. \tag{27}$$

由于 $-\Phi_{12}^{\mathrm T}\Phi_{11}^{-1}(X_1,T_1,Y_1)\Phi_{12}\geqslant 0$ 且 $\Phi_{22}(X_2,T_2,Y_2)<0$,因而只要 $\lambda>0$ 充分大,那么式(27)<0成立.这意味着 $\{X_1>0,\lambda X_2,T_1>0,\lambda T_2,Y_1>0,\lambda Y_2\}$ 是不等式(26)的组解.

注意到 Φ_{22} 已经关于 X_2,T_2,Y_2,L 成为LMI,取 $K=-B^{\mathrm T}X_1$ 并代入 Φ_{11},得

$$\Phi_{11}=\begin{bmatrix}\Gamma_1-2X_1BB^{\mathrm T}X_1 & X_1A-X_1BB^{\mathrm T}X_1 & 0 & A_h^{\mathrm T}Y_1 & A_d^{\mathrm T}Y_1 & X_1\\ A^{\mathrm T}X_1-X_1BB^{\mathrm T}X_1 & -\frac{1}{1+h^*}Y_1 & A_h^{\mathrm T}T_1 & 0 & A_d^{\mathrm T}Y_1 & 0\\ 0 & T_1A_h & -T_1 & 0 & 0 & 0\\ Y_1A_h & 0 & 0 & -\frac{1}{h^*}Y_1 & 0 & 0\\ Y_1A_d & Y_1A_d & 0 & 0 & -Y_1 & 0\\ X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_1\end{bmatrix}\leqslant$$

$$\begin{bmatrix}\Sigma_1 & X_1A_c & 0 & A_h^{\mathrm T}Y_1 & A_d^{\mathrm T}Y_1 & X_1\\ A_c^{\mathrm T}X_1 & -\frac{1}{1+h^*}Y_1+X_1BB^{\mathrm T}X_1 & A_h^{\mathrm T}T_1 & 0 & A_d^{\mathrm T}Y_1 & 0\\ 0 & T_1A_h & -T_1 & 0 & 0 & 0\\ Y_1A_h & 0 & 0 & -\frac{1}{h^*}Y_1 & 0 & 0\\ Y_1A_d & Y_1A_d & 0 & 0 & -Y_1 & 0\\ X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_1\end{bmatrix}, \tag{28}$$

则对于给定的 Q,式(28)成为LMI.在 Φ_{22} 中取 $L=X_2^{-1}N$,则 Φ_{22} 成为LMI.这里用到 $-X_1BB^{\mathrm T}X_1\leqslant QBB^{\mathrm T}Q^{\mathrm T}-QBB^{\mathrm T}X-XBB^{\mathrm T}Q^{\mathrm T}$,因为对任意的具有适当维数的的矩阵 Q,有 $(Q-X)BB^{\mathrm T}(Q-X)^{\mathrm T}\geqslant 0$.由 Shur 补引理知,式(28)$<0$可得式(22),从而有 $\Phi_{11}<0$,再加上式(23),有矩阵(25)<0.这蕴含着系统

$$\dot{\tilde x}=\bar A^{\mathrm T}\tilde x+\bar A_h^{\mathrm T}\tilde x(t-h)+\bar A_d^{\mathrm T}\dot{\tilde x}(t-h) \tag{29}$$

是渐近稳定的,其中 $\tilde x=[x(t)\quad e(t)]^{\mathrm T}$.因为系统(21)和(29)具有相同的极点,从而系统(21)也是渐

近镇定的对任意的 $0 < h \leqslant h^*$.　　证毕.

5 数值例子(Numerical examples)

在这一节中我们将提供两个数值实例来说明本文所得结论的正确性与有效性.

例 1　考虑文献[10]中的例子,取 $h = 2.5$

$$A = \begin{bmatrix} 2.5 & -0.5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},\ A_h = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ 0.03 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0].$$

由定理 2,可行的 LMI(18)的解为

$$X = \begin{bmatrix} 0.3396 & -0.0511 \\ -0.0511 & 0.1492 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1.4533 & 0.0045 \\ 0.0045 & 1.4596 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.6725 & 0.0005 \\ 0.0005 & 0.6730 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 1.2461 \\ -0.1473 \end{bmatrix}.$$

由定理 2,观测器增益为 $L = [3.7119 \quad 0.2830]^{\mathrm{T}}$.取初始值 $\varphi(t) = [4 \quad -3]^{\mathrm{T}}, h = 2.5$ 进行仿真,相应的估计误差响应曲线如图 1 所示.

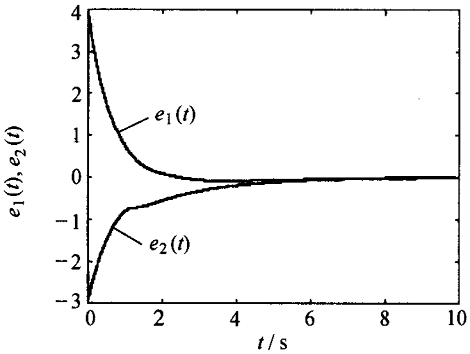

图 1　误差响应曲线

Fig. 1　Response curres of the estimations errors

例 2　考虑下面时滞 $h = 1$ 的不稳定中立时滞系统

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ A_h = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.05 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$A_d = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.02 \\ 0.01 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 1], \varphi(t) = [-2.5 \quad 1.5]^{\mathrm{T}},\ t \in [-1, 0].$$

取 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,那么由定理 3,通过解 LMI(22)和(23),我们得到

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2.6623 & 1.2668 \\ 1.2668 & 1.7750 \end{bmatrix},\ T_1 = \begin{bmatrix} 9.0650 & 0.0496 \\ 0.0496 & 8.2807 \end{bmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 11.1371 & 0.2393 \\ 0.2393 & 12.1105 \end{bmatrix},\ X_2 = \begin{bmatrix} 5.9814 & 1.3421 \\ 1.3421 & 6.0388 \end{bmatrix},$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 24.1383 & -0.1195 \\ -0.1195 & 24.4968 \end{bmatrix},\ Y_2 = \begin{bmatrix} 26.7580 & -0.0943 \\ -0.0943 & 27.2435 \end{bmatrix},$$

$$K = [-1.2668 \quad -1.7750],$$

$$L = [0.6298 \quad 0.5919]^{\mathrm{T}}.$$

取初始值 $(x_{10}(t), x_{20}(t), e_{10}(t), e_{20}(t))^{\mathrm{T}} = (-2, 2.5, -1.5, 2)^{\mathrm{T}}$,则得它们的状态轨线分别如图 2 和图 3.

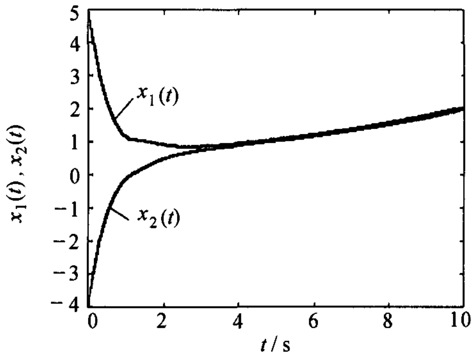

图 2　标称系统状态轨线

Fig. 2　State response cures of nominal system

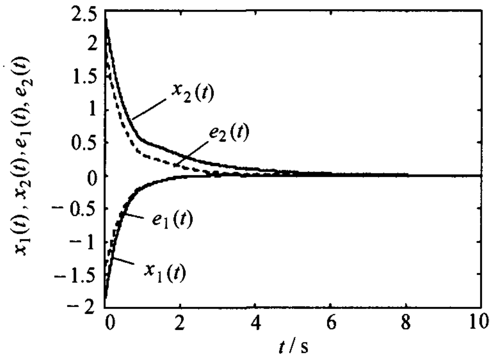

图 3　扩张系统状态轨线

Fig. 3　State response cures of augmented system

6 结束语(Conclusion)

本文建立了一个关于线性中立时滞系统的稳定性准则,设计了一个状态观测器,并讨论了基于此观测器的的镇定问题.设计方案是通过线性矩阵不等式的可解性来实现的,最后两个数值例子说明了本文所提供方法的有效性和灵活性.

参考文献(References):

[1] CAO Y, SUN Y. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain state delayed systems [J]. *Acta Automat Sinica*, 1999, 25(2): 230 – 235.

(下转第 793 页)

特殊性决定的.

参考文献(References):

[1] LIBERZON D, MORSE A S. Basic problems in stability and design of switched systems [J]. *IEEE Control System Magazine*, 1999, 19(1):59 - 70.

[2] DECARLO R A, BRANICKY M S, PETTERSSON S, et al. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid system [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2000, 88(7):1069 - 1082.

[3] SHORTER R, NARENDRA K S, MASON O. A result on common quadratic Lyapunov functions [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(1):110 - 113.

[4] HU B, ZHAI G, MICHE A N. Common quadratic Lyapunov-like functions with associated switching regions for two unstable second-order LTI systems [J]. *Int J Control*, 2002, 75(14):1127 - 1135.

[5] BRANICKY M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(4):475 - 482.

[6] ZHAI G, LIN H, ANTSAKLIS P. Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties [J]. *Int J Control*, 2003, 76(7):747 - 753.

[7] SKAFIDAS E, EVANS R J, SAVKIN A V, et al. Stability results for switched controller systems [J]. *Automatica*, 1999, 35(4):553 - 564.

作者简介:

孙文安 (1956—),男,东北大学博士研究生,大连大学教授,主要研究方向为混合系统、切换系统的稳定性研究,E-mail: sunwenan@tom.com;

赵　军 (1957—),男,教授,博士生导师,中国自动化学会控制理论委员会委员,主要研究方向为混杂系统、非线性控制和鲁棒控制.

(上接第 782 页)

[7] GONG Dunwei, Sun Xiaoyan. Research on a novel adaptive genetic algorithm [C]// *Proc of the 7th IEEE International Symposium on Industrial Electronics*. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2002:357 - 360.

[8] 周明,孙树栋.遗传算法原理及应用[M].北京:国防工业出版社,1999.
(ZHOU Ming, SUN Shudong. *Theory and Application of Genetic Algorithm* [M]. Beijing: The National Defence Industry Press, 1999.)

作者简介:

巩敦卫 (1970—),男,教授,博士生导师.主要研究领域为进化计算和智能控制,E-mail: dwgong@vip.163.com;

孙晓燕 (1978—),女,中国矿业大学博士研究生,主要研究领域为进化计算和网络计算,E-mail: xysun78@188.com.

(上接第 789 页)

[2] HALE J K. *Theory of Functional Differential Equations* [M]. New York: Springer-Verlag, 1977:131 - 132.

[3] CLARKSON I, GOODALL D. On the stabilizability of imperfectly known nonlinear delay systems of neutral type [J]. *IEEE Trans on Automtic Control*, 2000, 45(12):2326 - 2332.

[4] FIAGBEDZI Y. A Feedback stabilization of neutral systems via the transformation technique [J]. *Int J of Control*, 1994, 59(6):1579 - 1589.

[5] XIE L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty [J]. *Int J of Control*, 1996, 63(4):741 - 750.

[6] PARK J H, WON R. Stability analysis for neutral delay-differential systems [J]. *J of Franklin Institute*, 2000, 337(1):1 - 9.

[7] HAN Q L. Robust stability of uncertain delay-differential systems of neutral type [J]. *Automatica*, 2002, 38(4):719 - 723.

[8] XU S Y, LAM J, YANG C W. H_∞ and positive-real control for linear neutral delay systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(8):1321 - 1326.

[9] MAHMOUD M S. Robust H_∞ control of linear neutral systems [J]. *Automatica*, 2000, 36(5):757 - 764.

[10] WANG Z, LAM J, BURNHAM K J. Stability analysis and observer design for neutral delay systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 47(3):478 - 483.

[11] KOLMANOVSKII V, MYSHKIS A. *Applied Theory of Functional Differential Equations* [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992:129 - 130.

[12] BOYD S, GHAOUI L, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994:28 - 32.

作者简介:

张　友 (1971—),男,现在东北大学信息学院做博士后研究,主要研究领域为时滞系统的稳定性分析与综合及随机控制,E-mail: zhangyo97@nenu.edu.cn;

翟　丁 (1970—),男,讲师,现在东北大学博士后研究,主要研究领域为大系统的分散控制与鲁棒控制,E-mail: zhalding@etang.com;

刘　满 (1964—),男,博士,副教授,主要研究方向为复杂系统的控制理论、模糊控制;

张嗣瀛 (1925—),男,中国科学院院士,教授,博士生导师,从事复杂控制系统、微分对策等研究.