文章编号：1000-8152(2005)05-0799-03

随机时滞神经网络的全局指数稳定性

赵碧蓉[1]，江明辉[2]，沈　轶[2]
（1. 广州大学 数学与信息科学学院，广东 广州 510405；2. 华中科技大学 系统工程研究所，湖北 武汉 430074）

摘要：首先对一般随机系统的渐近特性进行了讨论．然后结合神经网络的特点，应用李雅普诺夫第二方法对一类随机时滞神经网络系统的全局指数稳定性进行了分析，给出了易于判定随机时滞神经网络几乎必然指数稳定性新的代数判据，并给出实例进行仿真实验．

关键词：神经网络；时滞；李雅普诺夫函数
中图分类号：O175.13　　**文献标识码**：A

Globally exponential stability of stochastic neural networks with delay

ZHAO Bi-rong[1], JIANG Ming-hui[2], SHEN Yi[2]
(1. School of Mathmatic and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou Guangdong 510405, China;
2. Institute of System Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan Hubei 430074, China)

Abstract: Firstly, the asymptotic property of general stochastic system is discussed, and then the global exponential stability of a class of stochastic neural networks with delay is analyzed by making use of the characteristic of neural network and the Lyapunov second method. New algebraic criteria that can be easily used to verify the almost exponential stability of the stochastic neural networks with delay are proposed. An example is given for illustration.

Key words: neural network; delay; Lyapunov function

1　引言(Introduction)

神经网络是一种特殊结构的动力系统，它已成功地应用到很多领域，如信号处理、非线性代数微分方程的求解．由于系统常常受到随机因素的干扰以及系统本身存在延时，而应用又必须建立在神经网络系统的稳定性之上，因此对随机时滞神经网络稳定性的研究从理论和应用上都是很重要的．而对随机时滞神经网络全局稳定性的研究已取得了一些有益的成果如文献[1～4]，但判定实现几乎指数稳定的条件很难验证．本文对文献[1]中随机时滞神经网络系统进行了扩充，并采用与文献[1]完全不同的方法，给出了易于判定的代数判据，用两个实例进行了验证．

本文采用以下记号：记$(\Omega, F, \{F_t\}_{t\geqslant 0}, P)$为一个带有自然流$\{F_t\}_{t\geqslant 0}$的完备概率空间，$W(t) = (W_1(t), W_2(t), \cdots, W_m(t))^{\mathrm{T}}$是定义于该空间上的$m$维标准布朗运动．$\|\cdot\|$为定义于$\mathbb{R}^n$上的 Euclidean 范数．设$\tau > 0$，$\varphi: [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$为连续函数，具有上确界范数$\|\varphi\| = \sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}|\varphi(\theta)|$，$C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$记为连续$\varphi$函数族．$C^b_{F_0}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$表示$F_0$可测的有界的$C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$-值随机变量$\xi$族且有$\xi = \{\xi(\theta): -\tau \leqslant \theta \leqslant 0\}$．

现考虑以下随机时滞神经网络系统

$$\mathrm{d}x_i = (-c_ix_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}h_j(x_j(t-\tau)))\mathrm{d}t + g_i(t, x_i(t), x_i(t-\tau))\mathrm{d}W(t),\ i = 1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

这里我们记$x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$是神经元状态变量，$d_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$表示自反馈强度．$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$分别是不带和带时滞的神经元之间的连接权重矩阵，时滞$\tau > 0$，神经元的激活函数z_j, h_j及随机干扰强度函数g_j满足下列条件：

A1) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \exists k_j, l_j > 0$，使

$$0 \leqslant \frac{z_j(x_1) - z_j(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant k_j,$$

$$0 \leqslant \frac{h_j(x_1) - h_j(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant l_j,\ j = 1,\cdots,n.$$

收稿日期：2004-01-02；收修改稿日期：2004-12-28.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60074008, 60274007)；湖北省自然科学基金资助项目(2004ABA055).

A2) $\forall (t,x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\exists\, m_i, n_i > 0$, $i = 1,2,\cdots,n$, 有

$$\mathrm{tr}[g_i^{\mathrm{T}}(t,x,y)g_i(t,x,y)] \leqslant m_i|x_i|^2 + n_i|y_i|^2,\ i = 1,2,\cdots,n.$$

其中 $g(t,x,y) = (g_1(t,x,y),\cdots,g_n(t,x,y))^{\mathrm{T}}$, $g_i:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{1\times m}, i = 1,2,\cdots$.

为了研究系统(1)的稳定性,有必要先讨论下列一般随机系统的渐近特性.

$$\mathrm{d}x(t) = f(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}t + g(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}W(t), \tag{2}$$

初始条件 $\{x(\theta): -\tau \leqslant \theta \leqslant 0\} = \xi \in C_{F_0}^b([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$, $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $g:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times m}$. 若 f,g 满足下列基本假设:

H) f 和 g 满足局部 Lipschitz 条件及线性增长条件,即对 $t\geqslant 0, l = 1,2,\cdots$,存在 $c_l > 0$ 满足

$$|f(t,x,y)-f(t,\bar{x},\bar{y})| \vee |g(t,x,y)-g(t,\bar{x},\bar{y})| \leqslant c_l(|x-\bar{x}|-|y-\bar{y}|).$$

其中 $x,\bar{x},y,\bar{y}\in\mathbb{R}^n$ 满足 $|x|\vee|\bar{x}|\vee|y|\vee|\bar{y}|\leqslant l, t\geqslant 0$,并且还存在常数 $c > 0$ 使得对任意 $(t,x,y)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 有下式成立

$$|f(t,x,y)|\vee|g(t,x,y)|\leqslant c(1+|x|+|y|).$$

由文献[5]知,满足假设 H)的系统(2)在 $t\geqslant -\tau$ 上存在由 $x(t;\xi)$ 确定的全局唯一连续解,且对任意 $p > 0$,在 $t\geqslant 0$ 满足 $\mathrm{E}[\sup\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant t}|x(s;\xi)|^p] < \infty$. 令 $C^{1,2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+)$ 表示 t 对一次连续可微对 x 二次连续可微的非负函数 $V(t,x)$ 的全体. 对任意 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+)$, 定义

$$V_t(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t},$$

$$V_x(t,x) = \left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_1},\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_n}\right),$$

$$V_{xx}(t,x) = \left(\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}.$$

进一步定义微分算子 $LV(t,x,y)\in C[\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}]$ 如下:

$$LV(t,x,y) = V_t(t,x) + V_x(t,x)f(t,x,y) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(g(t,x,y)^{\mathrm{T}}V_{xx}(t,x)g(t,x,y)).$$

当 $f_i(t,x(t),x(t-\tau)) = -c_ix_i + \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}z_j(x_j(t)) + \sum\limits_{j=1}^n b_{ij}h_j(x_j(t-\tau))$, $g_i(t,x(t),x(t-\tau)) = g_i(t,x_i(t),x_i(t-\tau))$ 时,系统(2)演变为随机神经网络系统(1),其中 $f_i(t,x(t),x(t-\tau))$, $g_i(t,x(t),x(t-\tau))$ 分别是 f,g 的第 i 个分量函数.

显然随机时滞神经网络系统(1)满足条件 A1),A2)则一定满足条件 H),故而此时系统(1)有唯一解.下面讨论的前提是系统(1)满足条件 A1),A2),不再声明.

2 主要结论(Main results)

定理 1 假如 H)成立,且存在 $V\in C^{2,1}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+)$,及正数 $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$,使 $\forall (t,x,y)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 有

$$|LV(t,x,y)|_{(2)} \leqslant -\lambda_1 V(t,x) + \lambda_2 V(t,y), \tag{3}$$

则,对任意 $\xi\in C_{F_0}^b([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ 对系统(2)的解 $x(t;\xi)$ 存在 $M > 0$ 满足

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{rt}V(t,x(t;\xi)) \leqslant M, \text{a.s.}$$

其中 r 是代数方程 $\frac{(c-1)\lambda_1+\lambda_2}{c} - r - \lambda_2\mathrm{e}^{r\tau} = 0\ (c > 1)$ 的唯一正根.

证 利用文献[5]中定理2.1及构造适当的李雅普诺夫函数可以证明.

注 1 定理1中参数 $\lambda_2 < 0$ 时可以得到类似结果.关于随机系统指数稳定的经典结果通常需 LV 负定,但是从定理1的结论可以看出本文的结果不需 LV 负定(当然 LV 负定,本文的条件一定满足,反之则不一定),它可以取正值.

将定理1结论应用到随机时滞神经网络系统(1)中可以得到系统(1)几乎必然指数稳定的代数判据.

定理 2 如果随机时滞神经网络系统(1)的参数满足下列条件:

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{2c_i - 2k_ia_{ii} - m_i - \sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^n(k_j|a_{ij}| + k_i|a_{ji}|) - \sum_{j=1}^n l_j|b_{ij}|\} > \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(n_i + l_i\sum_{j=1}^n|b_{ji}|\right), \tag{4}$$

则对任意 $\xi\in C_{F_0}^b([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$,随机时滞神经网络系统(1)的解 $x(t;\xi)$ 是几乎必然指数稳定.

证 构造适当的李雅普偌夫函数[6],然后利用定理1可证.

注 2 由于神经网络系统中存在时滞,故而时滞神经网络系统(1)更具有实际意义.因采用了新的模型及方法得到的结论互不包含,但此结论更易判定系统的稳定性.

我们由定理2不难得到下面推论:

推论 1 若确定型的时滞神经网络系统

$$\mathrm{d}x_i = -c_ix_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}z_j(x_j(t)) +$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}h_j(x_j(t-\tau))\mathrm{d}t, i = 1,2,\cdots,n$$

的参数满足下列条件:

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{2c_i - 2k_ia_{ii} - \sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n}(k_j|a_{ij}| + k_i|a_{ji}| - \sum_{j=1}^{n}l_j|b_{ij}|\} >$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(l_i\sum_{j=1}^{n}|b_{ji}|\right), \tag{5}$$

则对任意初始值时滞神经网络系统(1)的解都是指数稳定的.

证　令取 $\sigma_i(t, x_i(t), x_i(t-\tau)) = 0, i = 1, \cdots, n$, 由定理 2 即可得证.

注 3　推论 1 是文献[4]中的定理 2,故而文献[4]中的定理 2 是本文的定理 2 的特例.

3　仿真算例(Simulation example)

为了说明上述定理的应用,我们在这里仅举一例.

例　考虑二维随机神经网络系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_1 = (-0.5x_1 - 2.1z(x_1(t)) + 0.8z(x_2(t)) - \\ \qquad 1.2h(x_2(t-\tau)))\mathrm{d}t + 0.2x_2(t)\mathrm{d}W_1(t), \\ d_{x_2} = (-4x_2 + 0.6z(x_1(t)) + 0.3z(x_2(t)) + \\ \qquad 0.5h(x_1(t-\tau)))\mathrm{d}t + 0.3x_1(t)\mathrm{d}W_2(t). \end{cases} \tag{6}$$

取 $z(x) = 3x, h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}, \tau = 0.002, c = 2$则 $k_1 = k_2 = 3, l_1 = l_2 = 1, m_1 = 0.04, m_2 = 0.09, n_1 = n_2 = 0$.

经计算可得: $\lambda_1 = 1.4100, \lambda_2 = 1.2000, r = 0.1047$.

显然文献[1]中的结论无法应用到系统(6)的指数稳定性的判定,而满足本定理 2 的条件,故二维随机神经网络系统(6)的平衡点几乎必然指数稳定.现仿真实验如下:选择初始点为(10, −6)最终收敛于零点.见图 1.(应用文献[7]中的算法在 Matlab6.5 上实现)

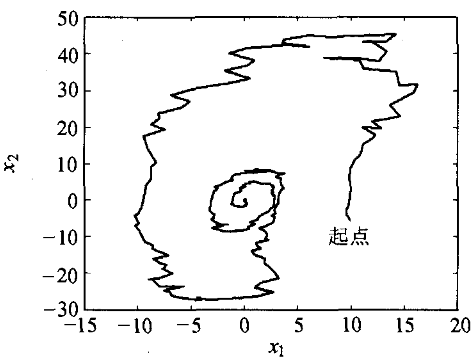

图 1　系统(6)的相图

Fig. 1　Phase graph of system (6)

4　结论(Conclusion)

利用一般随机系统的渐近特性,结合神经网络的特点,应用李雅普偌夫第二方法得到了随机时滞神经网络系统的全局指数稳定性新的代数判据,通过实例,可以看出本文不仅扩充了文献[1]的适用范围,而且判断随机时滞神经网络全局性的充分条件很容易判别和实现.

参考文献(References):

[1]　沈轶,赵勇,廖晓昕,等.具有可变时滞的 Hopfield 型随机神经网络的全局指数收敛性[J].数学物理学报,2000,20(3):400 - 404.
(SHEN Yi, ZHAO Yong, LIAO Xiaoxin, et al. Globally exponential stability of Hopfield stochastic neural network with variable delay [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2000, 20(3):400 - 404.)

[2]　梁学斌,吴立德.Hopfield 型神经网络的全局指数收敛性[J].中国科学(A 辑),1995,25(5):523 - 533.
(LIANG Xuebin, WU Lide. Globally exponential stability of Hopfield neural network[J]. *Science in China (Series A)*, 1995, 25(5):523 - 533.)

[3]　LIAO X X, WANG J. Algebraic critera for global exponential stability of cellular neural networks with multiple time delays [J]. *IEEE Trans on Circuits Systems*, 2003, 50(2):268 - 275.

[4]　ZHOU D M, CAO J D. Globally exponential stability conditions for cellular neural networks with time-varying delays [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2002, 131(3):487 - 496.

[5]　MAO, X. Lasalle-type theorems for stochastic differential delay equations [J]. *J of Mathematical Analysis Applications*, 1999, 236(1):350 - 369.

[6]　冯昭枢,邓飞其,刘永清.时变滞后随机大系统的稳定性:向量 Lyapunov 函数法[J].控制理论与应用,1996,13(3):371 - 375.
(FENG Zhaoshu, DENG Feiqi, LIU Yongqing. Stability of time-varying large scale delay stochastic systems: Vector Lyapunov function method [J]. *Control Theory & Applications*, 1996, 13(3): 371 - 375.)

[7]　TOCINO A, ARDANUY R. Runge Kutta methods for numerical solution of stochastic differential equations [J]. *J of Computational and Applied Mathematics*, 2002, 138(2):219 - 241.

作者简介:

赵碧蓉　(1971—),女,博士,2005 年博士毕业于华南理工大学,研究方向为非线性随机系统的鲁棒稳定性与镇定,E-mail: au_brzhao@sohu.com;

江明辉　(1968—),男,博士研究生,副教授,已发表论文 10 余篇,研究领域为随机系统,神经网络,E-mail: jmh1239@sina.com;

沈　轶　(1964—),男,博士,副教授,研究方向为随机系统、神经网络,E-mail: yishen64@163.com, lhfu@hust.edu.cn.