第 22 卷第 5 期
2005 年 10 月

控制理论与应用
Control Theory & Applications

Vol.22 No.5
Oct. 2005

文章编号：1000 - 8152(2005)05 - 0820 - 05

# 正规和奇异 $H_\infty$ 控制器的统一表达式

王进华
（福州大学 电气工程学院，福建 福州，350002）

**摘要**：给出了一种新的 $H_\infty$ 控制器设计方法，通过引入设计时可选的非奇异实数阵，取消了控制器设计时对 D 矩阵的秩限制．适用于正规的 $H_\infty$ 控制问题和奇异的 $H_\infty$ 控制问题．对状态反馈等四种典型问题和输出反馈控制问题，给出了控制器存在的充分必要条件．控制器通过 Riccati 方程的解，用参数化方法表示．输出反馈控制器，通过解两个 Riccati 方程得到．讨论了控制器的相关特性．

**关键词**：$H_\infty$ 控制；鲁棒控制；奇异系统；不确定性

**中图分类号**：TP13　　**文献标识码**：A

# Unified H-infinity controllers of regular and singular plants

Wang Jin-hua
(College of Electrical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou Fujian 350002, China)

**Abstract**: A new method for designing H-infinity controllers is given. By introducing regular real matrices, this method has no rank restrictions on matrix D of plants and is suitable for both normal H-infinity control problems and singular H-infinity control problems. The sufficient and necessary conditions of existing appropriate controllers are given for special problems, such as state-feedback control and dynamical output feedback control problem. The controllers are parameterized by the solutions of Riccati (in-)equations. Two Riccati (in)-equations need to be solved for dynamical output feedback control problems. The regular real matrices which can be chosen appropriately in the designing process give more choices in controller. The relationship between our controller and the normal H-infinity controller is discussed. The regular real matrices are chosen for several cases often used.

**Key words**: H-infinity control; robust control; singular system; uncertainty

## 1 引言(Introduction)

状态空间方法讨论 $H_\infty$ 控制问题，采用广义对象的描述形式．根据广义对象描述形式的不同，可分为正规的和奇异的 $H_\infty$ 问题．Doyle 等人[1]给出了正规的 $H_\infty$ 控制器设计问题的解，控制器可用两个 Riccati 方程参数化表示；Safanov 等人[2]讨论了将一般的 $H_\infty$ 问题简化到正规 $H_\infty$ 问题的方法．

D 矩阵不满足秩条件的奇异 $H_\infty$ 问题，一般通过摄动方法，使之满足假定[3,4]，这种方法一直沿用至今[5]．Kimura 等人[6]利用 J－无损方法，给出了 $H_\infty$ 控制器在频率域上的解释，并将其控制器设计方法扩展到了 D 矩阵不满足秩条件的奇异 $H_\infty$ 问题，只是这种奇异控制器设计相当麻烦，未得到广泛应用．Iwasaki 等人[7]将静态、动态阶次不同的 $H_\infty$ 控制器，用 LMI 的形式给出了统一的表达式；在表达式中，也未提出 D 矩阵秩条件要求，因而该表达式适用于正规的和奇异的 $H_\infty$ 问题；但该表达式的意义主要在理论方面，很难用于控制器设计方面．

本文对正规的和 D 矩阵不满足秩条件的奇异的 $H_\infty$ 问题进行探讨，试图给出一个适用范围更广的控制器设计方法．

## 2 问题引入(Problem formulation)

假定广义对象描述如下

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \\ z = C_1 x + D_1 u, \\ y = C_2 x + D_2 w. \end{cases} \tag{1}$$

其中：$x \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量；$w \in \mathbb{R}^m$ 为不确定性干扰输入；$u \in \mathbb{R}^s$ 为控制输入；$z \in \mathbb{R}^p$ 为评价输出；$y \in \mathbb{R}^q$ 为观测输出．$A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$ 是相应维数的常数矩阵．这是讨论 $H_\infty$ 控制最常用的一种描述

收稿日期：2003 - 10 - 14；收修改稿日期：2005 - 04 - 21．
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60474049)；福建省自然科学基金资助项目(A0410012)．

形式,更广泛的描述形式可通过变换转化到这种描述形式.对系统(1)我们进一步假定:

1) $(A,B_1)$ 完全可控,$(A,C_1)$ 完全可观测;

2) $(A,B_2)$ 完全可控,$(A,C_2)$ 完全可观测;

3) $D_1^TC_1=0$ 及 $D_2B_1^T=0$.

上述对象的 $H_\infty$ 控制问题得到广泛的讨论,且有很多的结论,如 $D_2^TC_2=0, C_2=I$ 的情形,可通过状态反馈控制器使其内部稳定,且使得 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$,反馈控制律可通过如下的 *Riccati* 方程参数化表示[1].

$$A^TX+XA+\gamma^{-2}XB_1B_1^TX-XB_2(D_1^TD_1)^{-1}B_2^TX+C_1^TC_1<0. \tag{2}$$

若上述方程有正定解,则状态反馈增益阵可表示为

$$K=-(D_1^TD_1)^{-1}B_2^TX.$$

在某些情况下,这种方法设计的控制器是很保守的.如当 $D_1=\varepsilon I$,而 $\varepsilon$ 很小时,按这种方法设计的控制器增益将变得很大;可以证明,当 $\varepsilon\to0$ 时,$X/\varepsilon^2\to\infty$,即这时的控制器增益将趋于无穷.另一方面,若有两个评价函数 $z_1=C_1x+u, z_2=C_1x$,则显然有 $\|T_{z_1w}(s)\|_\infty>\|T_{z_2w}(s)\|$.但在同样的干扰抑制水平下,采用上述设计方法设计的控制器有 $K_1>K_2$,这显然是不尽合理的.

正是由于现有方法在处理这类问题的不足,需要寻求其它的设计方法.我们讨论的也是式(1)描述的对象,设计控制器使其内部稳定,且使得 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$.若存在这样的控制器,称之为可行的控制器.

## 3 状态反馈控制(State-feedback control)

我们从简单的问题入手,先讨论状态反馈控制器的设计问题.即对如下系统,设计状态反馈控制器,使其内部稳定,且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$.

$$G_{FI}:\begin{cases}\dot{x}=Ax+B_1w+B_2u,\\ z=C_1x+D_1u,\\ y=\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\I\end{bmatrix}w.\end{cases} \tag{3}$$

**定理1** 设 $\gamma>0$ 给定,广义对象(3)存在状态反馈控制器,使得闭环系统内部稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$ 成立的充分必要条件是存在适当的实数方阵 $M$ 使得 Riccati 方程

$$A^TX+XA-4XB_2(M^TM+D_1^TD_1)^{-1}M^TM(M^TM+D_1^TD_1)^{-1}B_2^TX+\gamma^{-2}XB_1B_1^TX+C_1^TC_1<0. \tag{4}$$

有解 $X\geqslant0$.若如此,则使得闭环系统鲁棒稳定的状态反馈增益阵为

$$F=-2(M^TM+D_1^TD_1)^{-1}B_2^TX. \tag{5}$$

**证** 设状态反馈控制器为 $u=Fx$,则广义对象(3)在此控制律作用下的闭环系统为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_F & B_1\\C_{1F} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A+B_2F & B_1\\C_2+D_1F & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\w\end{bmatrix}.$$

闭环系统内部稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$ 成立的充分必要条件是下述 Riccati 方程有正半定解

$$A_F^TX+XA_F+\gamma^{-2}XB_1B_1^TX+C_{1F}^TC_{1F}<0. \tag{6}$$

直接验证就可得到充分性条件,下面给出必要性的证明.若有状态反馈控制器使得广义对象(3)内部稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$,记控制器为 $u=Fx$,则有式(6)成立.记 $Q=A^TX+XA+\gamma^{-2}XB_1B_1^TX+C_1^TC_1$,则式(6)可改写为

$$Q+XB_2F+F^TB_2^TX+F^TD_1^TD_1F<0. \tag{7}$$

显然对任意实数阵 $M$ 有

$$Q-F^TM^TMF+XB_2F+F^TB_2^TX+F^TD_1^TD_1F+F^TM^TMF<0.$$

对任意的 $D_1$ 阵,只要适当选取 $M$,使 $M^TM+D_1^TD_1$ 的逆存在,由上式即可得所求的控制器如式(5)所示.

## 4 典型问题的控制器(Controllers of typical systems)

在 $H_\infty$ 控制中,有几个典型问题[1],在最终解决输出反馈控制器设计中起着重要的作用.与文献[1]相似,我们也讨论几个典型问题.前节讨论的状态反馈问题是其中的一个,称为完整信息问题(FI problem).下面将在FI问题的基础上讨论其他几个典型问题的控制器.

1) 完整控制问题.

完整控制(FC)问题讨论FI问题的对偶问题.即设计控制器,使

$$G_{FC}:\begin{cases}\dot{x}=Ax+B_1w+[I\quad 0]u,\\ z=C_1x+[0\quad I]u,\\ y=C_1x+D_2w\end{cases}$$

内部稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$.根据对偶原理,由定理1可得.

**定理2** 设 $\gamma>0$ 给定,FC问题存在反馈控制器 $u=Ly$,使得闭环系统内部稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$ 成立的充分必要条件是存在适当的实数方阵 $N$ 使得 Riccati 方程

$$YA^{\mathrm{T}} + AY - 4YC_2^{\mathrm{T}}(NN^{\mathrm{T}} + D_2D_2^{\mathrm{T}})^{-1}NN^{\mathrm{T}}(NN^{\mathrm{T}} + D_2D_2^{\mathrm{T}})^{-1}C_2Y + \gamma^{-2}YC_1^{\mathrm{T}}C_1Y + B_1B_1^{\mathrm{T}} < 0 \tag{8}$$

有解 $Y \geqslant 0$. 若如此,则使得闭环系统鲁棒稳定的反馈增益阵为

$$L = -2YC_2^{\mathrm{T}}(NN^{\mathrm{T}} + D_2D_2^{\mathrm{T}})^{-1}. \tag{9}$$

2) 干扰顺馈问题.

干扰顺馈(DF)问题讨论下式描述的系统控制问题.即设计控制器,使

$$G_{\mathrm{DF}}:\begin{cases}\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u,\\ z = C_1x + D_1u,\\ y = C_2x + w\end{cases}$$

内部稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$,其中另假定 $A - B_1C_2$ 是稳定阵.

**定理3** 设 $\gamma > 0$ 给定,DF问题存在反馈控制器 $K(s)$,使得闭环系统内部稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$ 成立的充分必要条件是存在适当的实数方阵 $M$ 使得Riccati方程(4)有解 $X \geqslant 0$. 若如此,则使得闭环系统鲁磅稳定的反馈控制器为

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + B_2F - B_1C_2 & B_1 \\ \hline F & 0\end{array}\right].$$

其中 $F$ 如式(5)所示.

**证** 对DF问题,构造观测器 $\dot{\hat{x}} = (A - B_1C_2)\hat{x} + B_1y + B_2u$, 将定理1应用到由观测器状态 $\hat{x}$ 和观测误差 $e = x - \hat{x}$ 构成的系统,即可得到结论.

3) 输出估计问题.

输出估计(OE)问题是DF问题的对偶问题,即设计控制器,使

$$G_{\mathrm{OE}}:\begin{cases}\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u,\\ z = C_1x + u,\\ y = C_2x + D_2w\end{cases}$$

内部稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty$,其中假定 $A - B_2C_1$ 是稳定阵.根据对偶原理,由定理4可得.

**定理4** 设 $\gamma > 0$ 给定,OE问题存在反馈控制器 $K(s)$,使得闭环系统内部稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$ 成立的充分必要条件是存在适当的实数方阵 $N$ 使得Riccati方程(8)有解 $Y \geqslant 0$. 若如此,则使得闭环系统鲁棒稳定的反馈控制器为

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + B_2C_1 - LC_2 & L \\ \hline C_1 & 0\end{array}\right].$$

其中 $L$ 如式(9)所示.

## 5 输出反馈控制器设计(Design of output feedback controller)

我们开始讨论对象(1)的控制器设计问题.虽然与传统的 $\mathrm{H}_\infty$ 控制相似,控制器可参数化表示为(4),(8)两个Riccati方程的解,但仍有些问题需要处理.

**引理5** 设 $U$ 和 $W$ 是实对称正定阵,$V$ 是实对称正(半)定阵,若

$$W^{-1} = 4(U + V)^{-1}U(U + V)^{-1}.$$

则 $W \geqslant V$.

**证** 
$$\begin{aligned} W - V &= \\ &(U + V)U^{-1}(U + V)/4 - V = \\ &(U + VU^{-1}V - 2V)/4 = \\ &(U^{-1}V - I)^{\mathrm{T}}U(U^{-1}V - I)/4 \geqslant 0.\end{aligned}$$

**定理6** 存在控制器 $K(s)$ 使得广义对象(1)内部稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$ 成立的充分必要条件是存在适当的非奇异实矩阵 $M$,控制器 $K(s)$ 使如下对象

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \bar{z}\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & B_1 & B_2\\ C_1 & 0 & \bar{D}_1\\ C_2 & D_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ w\\ u\end{bmatrix} \tag{10}$$

内部稳定且 $\|T_{\bar{z}w}(s)\|_\infty < \gamma$. 其中 $\bar{D}_1$ 按如下方法构造:

1) $\bar{D}_1$ 与 $D_1$ 维数相同;

2) $\bar{D}_1^{\mathrm{T}}C_1 = 0$;

3) $(\bar{D}_1^{\mathrm{T}}\bar{D}_1)^{-1} = 4(M^{\mathrm{T}}M + D_1^{\mathrm{T}}D_1)^{-1}M^{\mathrm{T}}M(M^{\mathrm{T}}M + D_1^{\mathrm{T}}D_1)^{-1}$.

**证** 充分性.设 $U = M^{\mathrm{T}}M, V = D_1^{\mathrm{T}}D_1$ 及 $W = \bar{D}_1^{\mathrm{T}}\bar{D}_1$,由引理5可得 $\bar{D}_1^{\mathrm{T}}\bar{D}_1 \geqslant D_1^{\mathrm{T}}D_1$. 设控制器 $K(s)$ 使式(10)对象内部稳定且 $\|T_{\bar{z}w}(s)\|_\infty < \gamma$, 则

$$\begin{aligned}\|T_{\bar{z}w}(s)\|_\infty &= \sup_{\|w\|_2=1}\|\bar{z}\|_2 = \sup_{\|w\|_2=1}\left(\int_0^\infty \bar{z}^{\mathrm{T}}\bar{z}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \\ &\sup_{\|w\|_2=1}\left[\int_0^\infty (x^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}}C_1x + w^{\mathrm{T}}\bar{D}_1^{\mathrm{T}}\bar{D}_1w)\mathrm{d}t\right]^{1/2} \geqslant \\ &\sup_{\|w\|_2=1}\left[\int_0^\infty (x^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}}C_1x + w^{\mathrm{T}}D_1^{\mathrm{T}}D_1w)\mathrm{d}t\right]^{1/2} = \\ &\sup_{\|w\|_2=1}\left(\int_0^\infty z^{\mathrm{T}}z\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \|T_{zw}(s)\|_\infty,\end{aligned}$$

因而有 $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$,即控制器 $K(s)$ 使得广义对象(1)内部稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$.

必要性.若 $D_1^{\mathrm{T}}D_1$ 非奇异,取 $M^{\mathrm{T}}M = D_1^{\mathrm{T}}D_1$,则有 $\bar{D}_1^{\mathrm{T}}\bar{D}_1 = D_1^{\mathrm{T}}D_1$,即存在适当选取的非奇异实矩阵 $M$,使得式(10)对象等于式(1)对象.若 $D_1^{\mathrm{T}}D_1$ 奇异,

取 $M^TM=\varepsilon^2 I+D_1^TD_1$,则 $M^TM$ 可逆,当 $\varepsilon\to 0$ 时,$M^TM\to D_1^TD_1$,进而有 $\bar{D}_1^T\bar{D}_1\to D_1^TD_1$.即如此选取的 $M$,当 $\varepsilon\to 0$ 时,使式(10)对象趋近于式(1)对象.因而若存在控制器 $K(s)$ 使得广义对象(1)内部稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$,则我们可通过适当选取非奇异实矩阵 $M$,使得控制器 $K(s)$ 使得广义对象(10)内部稳定且 $\|T_{\bar{z}w}(s)\|_\infty<\gamma$.

若设 $V^{-1}=2M(M^TM+D_1^TD_1)^{-1}$,作输入变换 $u_V=Vu$,记 $D_V=\bar{D}_1V^{-1}$ 和 $B_V=B_2V^{-1}$ 则对象(10)变换为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \bar{z}\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B_1 & B_V\\ C_1 & 0 & D_V\\ C_1 & D_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ w\\ u_V\end{bmatrix}. \tag{11}$$

**定理7**　控制器 $K(s)$ 使得广义对象(10)内部稳定且 $\|T_{\bar{z}w}(s)\|_\infty<\gamma$ 成立的充分必要条件是控制器 $K_V(s)=VK(s)$ 使得广义对象(11)内部稳定且 $\|T_{\bar{z}w}(s)\|_\infty<\gamma$.

容易验证,对象(11)的评价函数满足正交性条件,即有 $D_V^T[C_1\quad D_V]=[0\quad I]$.下面我们通过讨论(11)式对象的控制器,给出(1)式对象的控制器.

**引理8**　(文献[1]引理8):若存在一个控制器使对象(11)内部稳定且 $\|T_{\bar{z}w}(s)\|_\infty<\gamma$,则下述Riccati方程有正半定解.

$$A^TX+XA+\gamma^{-2}XB_1B_1^TX-XB_VB_V^TX+C_1^TC_1=0, \tag{12}$$

且 $A+\gamma^{-2}B_1B_1^TX-B_VB_V^TX$ 是稳定阵.

**引理9**　(文献[1]引理9):若Riccati方程(12)有正半定解,则控制器 $K_V(s)$ 使得广义对象(11)内部稳定且 $\|T_{\bar{z}w}(s)\|_\infty<\gamma$ 的充分必要条件是 $K_V(s)$ 使得下式对象内部稳定且 $\|T_{vr}(s)\|_\infty<\gamma$.

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}\\ v\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{tmp} & B_1 & B_V\\ -F_\infty & 0 & I\\ C_2 & D_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}\\ r\\ u_V\end{bmatrix}. \tag{13}$$

其中 $F_\infty=-B_V^TX,A_{tmp}=A+\gamma^{-2}B_1B_1^TX$.

**定理10**　存在一个控制器使对象(1)内部稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$,的充分必要条件是以下条件成立:

1) 存在适当的非奇异实数阵 $M$,使得Riccati方程

$$A^TX+XA+\gamma^{-2}XB_1B_1^TX-XB_2(VV^T)^{-1}B_2^TX+C_1^TC_1=0 \tag{14}$$

有解 $X\geqslant 0$,且 $A+\gamma^{-2}B_1B_1^TX-B_2(VV^T)B_2^TX$ 是稳定阵.其中

$$V^{-1}=2M(M^TM+D_1^TD_1)^{-1};$$

2) 存在适当的非奇异实数阵 $N$,使得Riccati方程

$$YA^T+AY+\gamma^{-2}YC_1^TC_1Y-YC_2^T(U^TU)^{-1}C_2Y+B_1B_1^T<0 \tag{15}$$

有解 $Y\geqslant 0$.其中 $U^{-1}=2(NN^T+D_2D_2^T)^{-1}N$;

3) $\rho(XY)<\gamma^2$.

若上述条件满足,则控制器可表示为

$$K(s)=\left[\begin{array}{c:c}A+\gamma^{-2}B_1B_1^TX+B_2F-Z^{-1}LC_2 & Z^{-1}L\\ \hdashline -F & 0\end{array}\right].$$

其中:$F=-(V^TV)^{-1}B_2^TX,L-2YC_2^T(NN^T+D_2D_2^T)^{-1},Z=I-\gamma^{-2}XY$.

**证**　由定理6与定理7知,存在一个控制器 $K(s)$ 使对象(1)内部稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$ 的充要条件是存在适当选取的非奇异实数阵 $M$,使得 $K_V(s)=V^{-1}K(s)$ 使式(11)对象内部稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$.

由引理8和引理9又可得,式(11)对象存在可行控制器的充分必要条件是:Riccati方程(12)有解 $X\geqslant 0,A+\gamma^{-2}B_1B_1^TX-B_VB_V^TX$ 是稳定阵,控制器 $K_V(s)$ 使得式(13)对象内部稳定且 $\|T_{vr}(s)\|_\infty<\gamma$.

根据式(11)对象的构造方法,Riccati方程(12)有解 $X\geqslant 0$,且 $A+\gamma^{-2}B_1B_1^TX-B_VB_V^TX$ 是稳定阵,就是定理条件1).

式(13)对象,就是上节讨论的OE问题,根据定理4知,它存在可行控制器的充分必要条件是存在适当的实数方阵 $N$,使得Riccati方程

$$\bar{Y}A_{tmp}^T+A_{tmp}\bar{Y}+\gamma^{-2}\bar{Y}F_\infty^TF_\infty\bar{Y}-\bar{Y}C_2^T(U^TU)^{-1}C_2\bar{Y}+B_1B_1^T<0. \tag{16}$$

将式(14)分别左和右乘 $\gamma^{-1}\bar{Y}$,并将结果与式(16)相加,记 $\bar{Z}=1+\gamma^{-2}\bar{Y}X$,可得

$$\bar{Z}^{-1}\bar{Y}A_{tmp}^T+A_{tmp}\overline{YZ}^{-1}+\gamma^{-2}\bar{Z}^{-1}\bar{Y}[C_1^TC_1-C_2^T(U^TU)^{-1}C_2]\overline{YZ}^{-1}+B_1B_1^T<0.$$

记 $Y=\bar{Z}^{-1}\bar{Y}$ 即可得到式(15).

由 $Y=\bar{Z}^{-1}\bar{Y}$,可得到 $\bar{Y}=Z^{-1}Y$.因 $Y\geqslant 0$ 及 $\bar{Y}\geqslant 0$,且它们都有界,得 $Z>0$,即条件3).上述推导说明,若(14)(16)式有正半定解,则条件2),3)成立.同样,若条件2)、3)成立,则式(16)必有解 $\bar{Y}=Z^{-1}Y\geqslant 0$.

根据定理4,若式(16)有解 $\bar{Y}\geqslant 0$,式(11)对象的控制器为

$$K_V(s)=\left[\begin{array}{c:c} A_{\mathrm{tmp}}+B_V F_\infty-2\bar{Y}C_2^{\mathrm{T}}(NN^{\mathrm{T}}+D_2D_2^{\mathrm{T}})^{-1}C_2 & -2\bar{Y}C_2^{\mathrm{T}}(NN^{\mathrm{T}}+D_2D_2^{\mathrm{T}})^{-1} \\ \hdashline -F_\infty & \mathbf{0} \end{array}\right].$$

将 $K_V(s)=VK(s)$, $F_\infty=-B_V^{\mathrm{T}}X$, $A_{\mathrm{tmp}}=A+\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}}X$, $B_V=B_2V^{-1}$, $Y=Z^{-1}Y$, $L=-2YC_2^{\mathrm{T}}(NN^{\mathrm{T}}+D_2D_2^{\mathrm{T}})^{-1}$ 代入上式,即可得到定理的控制器表达式.

下面对我们给出的控制器的一些特性,作简要说明:

1) 若 $D_1^{\mathrm{T}}D_1=I$, $D_2D_2^{\mathrm{T}}=I$ 取 $M^{\mathrm{T}}M=D_1^{\mathrm{T}}D_1=I$, $NN^{\mathrm{T}}=D_2D_2^{\mathrm{T}}=I$, 则定理11给出的控制器就退化为文献[1]定理3给出的传统的H$_\infty$输出反馈控制器.因而定理10给出的控制器,包含了传统的H$_\infty$反馈控制器;

2) 若 $D_1=\mathbf{0}$,取 $M=2\varepsilon I$, 则定理1给出的控制器就成为文献[8]定理3.2.2给出的控制器.因而定理1解决了极限状态下的H$_\infty$状态反馈控制器设计问题;

3) 广义对象的描述中,我们未对 $D_1$ 作列满秩的假定;也未对 $D_2$ 作行满秩的假定.因而我们给出的控制器,适用于奇异形的控制;

4) 引入适当的非奇异实数阵 $M$ 和 $N$,为控制器设计提供了更多的灵活性;

5) 在式(11)中,当选取 $M$ 使得 $B_V$ 达到最大时,系统可以达到的不确定干扰抑制水平最高.而由 $B_V$ 的表达式,当取 $M^{\mathrm{T}}M=D_1^{\mathrm{T}}D_1$ 时, $B_V$ 最大.也就是说,仅当取 $M^{\mathrm{T}}M=D_1^{\mathrm{T}}D_1$ 和 $NN^{\mathrm{T}}=D_2D_2^{\mathrm{T}}$ 时,才能通过定理11得到H$_\infty$最优问题的解.这从另一方面也说明了奇异问题没有H$_\infty$最优解.

## 6 结论(Conclusion)

本文讨论了一种新的H$_\infty$控制器设计方法,通过引入设计时可选的非奇异实数阵,给出了适用于标准H$_\infty$控制问题和奇异H$_\infty$控制问题的统一控制器设计方法.解决了将控制器设计转化到标准H$_\infty$问题时,引起的一些附加问题.对状态反馈等4个典型问题和输出反馈控制问题,给出了控制器存在的充分必要条件.控制器通过Riccati方程的解,用参数化方法表示.输出反馈控制器,由解两个Riccati方程得到.说明了几种常见情形的非奇异实数阵选取方法,并讨论了控制器的相关特性.进一步完善了H$_\infty$控制器的设计方法.

## 参考文献(References):


[1] DOYLE J C, GLOVER K, KHARGONEKAR P P, et al. State-space solutions to standard H$_2$ and H$_\infty$ control problems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(8): 831 – 847.

[2] SAFANOV M G, LIMEBEER D J N, CHIANG R C. Simplifying the H$_\infty$ theory via loop shifting, matrix pencil and descriptor concepts [J]. *Int J Control*, 1989, 50(6): 2267 – 2288.

[3] SCHERER C. H$_\infty$ Optimization without assumptions on finite or infinite zeros [J]. *SIAM J Contr Optimiz*, 1992, 30(1): 143 – 166.

[4] STOORVOGEL A A. The singular H-infinity control problem with dynamic measurement feedback [J]. *SIAM Journal Contr Optimiz*, 1991, 29(1): 160 – 184.

[5] ARIOLA M, ALFREDO P. Reduced-order solutions for H$_\infty$ singular filtering problem [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(2): 271 – 275.

[6] KIMURA H, LU Yuefei, KAWATANI R. On the structure of H$_\infty$ control systems and related extensions [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(6): 653 – 667.

[7] IWASAKI T, SKELTON R E. All Controllers for the general H$_\infty$ control problem: LMI existence conditions and state space formulas [J]. *Automatica*, 1994, 30(8): 1307 – 1317.

[8] 申铁龙, H$_\infty$控制理论及应用[M]. 北京:清华大学出版社, 1996. (SHEN Tielong, *H$_\infty$ Control Theory and Its Application* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996.)


作者简介:


**王进华** (1963—),男,教授,2001年毕业于西北工业大学自动控制系,获工学博士学位,主要研究方向:非线性系统、H$_\infty$控制、鲁棒控制, E-mail: jinhua-wang@263.net.