文章编号：1000-8152(2005)05-0834-03

微分代数系统的无源性

张秀华，张庆灵
(东北大学 理学院，辽宁 沈阳 110004)

摘要：考察了微分代数系统的无源性的控制问题.提出了微分代数系统无源的定义以及KYP特性的定义.利用类似微分几何理论的方法，通过引入微分代数系统的M导数，推出了微分代数系统无源与KYP特性等价的定理和微分代数系统无源性的充分必要条件.最后给出了无源控制器存在的条件.M导数的方法可以看作是L导数方法的延伸.本文所获得的一系列结果，使来自于物理系统的无源概念与控制理论有机结合起来.

关键词：微分代数系统；无源性；M导数；存储函数
中图分类号：TP13；O231 **文献标识码**：A

Passivity for differential-algebraic systems

ZHANG Xiu-hua, ZHANG Qing-ling
(College of Science, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: The passive control problem for differential-algebraic systems is investigated. The passive definition of differential-algebraic systems and KYP property definition are proposed. Similar to methods of differential geometry theory, equivalent theorem between differential-algebraic systems' passivation and KYP property was given, the necessary and sufficient passive condition for differential-algebraic systems is given by introducing M derivative. In the end, the condition of passive controller existence is presented. M derivative method can be considered as extension of L derivative method. A series of results are obtained, which combines passive concept coming from physical systems with control theory.

Key words: differential-algebraic system; passivity; M derivative; storage function

1 引言(Introduction)

由常微分系统和代数系统而构成的系统为微分代数系统.单纯的常微分方程不足以对某些复杂系统进行精确的描述，而具有一般代表性的微分代数系统却能用来描述复杂系统.该系统是常微分系统对复杂系统描述的推广.近年来，电网络分析、生态工程、计算机辅助设计与建模及经济学等领域提出了各种类型的微分代数系统，许多学者发表了有关微分代数系统的研究论文[1~3].无源性和存储函数的概念是来自物理系统的概念，最初被引入到非线性系统中，用于系统的镇定[4~6]，并得到了进一步的发展.本文给出微分代数系统无源性的概念，同时，利用类似微分几何理论的方法，引入微分代数系统的M导数，推导出微分代数系统无源的充分必要条件及无源控制器存在的条件.

2 微分代数系统的无源性(Passivity for differential-algebraic systems)

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w}, \\ \boldsymbol{0} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w}, \end{cases} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_m]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^p$ 和 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^p$ 分别是 n 维状态向量，m 维约束向量，系统输入和系统输出. $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 是光滑向量场，$\boldsymbol{k}$ 是 m 维向量，且 $\mathrm{rank}(\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \boldsymbol{y}}) = m$.

设 $M_f(\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$[7] 和 $M_g(\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ 分别代表向量场 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 关于函数 $\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 的M导数，定义为

$$\begin{aligned} M_f\mu &= \left[\frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \boldsymbol{x}}\right]\boldsymbol{f}, \\ M_g\mu &= \left[\frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \boldsymbol{x}}\right]\boldsymbol{g}. \end{aligned} \tag{2}$$

定义1 若存在非负定函数 $V = V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，$V(0,0) = 0$，使得微分代数系统(1)，满足

$$V(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t)) - V(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{y}(0)) \leqslant \int_0^t \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{w}(s)\mathrm{d}s. \tag{3}$$

收稿日期：2004-04-15；收修改稿日期：2004-11-22.
基金项目：辽宁省普通高校学科带头人基金资助项目(124210)；辽宁省科技基金资助项目(2001401041).

或

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}t} \leqslant \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t) \tag{4}$$

对于任意的输入函数成立,则称微分代数系统(1)无源的,上述不等式(3)或(4)称为无源不等式.

如果将"$\leqslant$"改为"$<$",则称微分代数系统(1)严格无源的. $V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 为连续可微的函数,称为存储函数.这里的 $\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}t}$ 表示沿系统(1)的轨迹 $V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 对时间 t 的导数.

对存储函数求导数,再将式(1)中的第二个式取导数的 $\dot{\boldsymbol{y}}$ 代入可得

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \boldsymbol{x}}\right]\dot{\boldsymbol{x}} = M_fV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + M_gV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w}. \tag{5}$$

定义 2　对于系统(1),若存在半正定函数 $V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,向量函数 $l(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 及 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 使得

$$\begin{aligned} &M_fV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant -\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\\ &M_gV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - 2\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\\ &\frac{1}{2}[\varphi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] = \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{aligned} \tag{6}$$

成立,则称系统(1)是具有 KYP 特性的.

定理 1　如果系统(1)存在光滑可微的半正定存储函数 $V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,则使得系统(1)无源的充分必要条件是系统(1)具有式(6)的 KYP 特性.

证　充分性.

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}t} \leqslant \\ &-\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + [\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - 2\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\boldsymbol{w} = \\ &\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w} - [\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})][\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w} + \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] \leqslant \\ &\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w} + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}[\varphi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\boldsymbol{w} = \\ &\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}. \end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}t} \leqslant \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t). \tag{7}$$

必要性.假设系统(1)是无源的,且存在光滑可微的存储函数 $V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 满足

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}) = \frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{dt} - \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t) \leqslant 0,\ \forall t \geqslant 0. \tag{8}$$

则沿系统(1)的任意轨迹,有

$$\begin{aligned} &F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}) = M_fV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + M_gV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w} - [\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\varphi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\boldsymbol{w} = \\ &M_fV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\varphi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w} + [M_gV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\boldsymbol{w} \leqslant 0, \end{aligned} \tag{9}$$

这里, F 是关于 $\boldsymbol{w}$ 的二次函数.因此,存在适当的函数矩阵 $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 和 $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,使得

$$\begin{aligned} &F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}) = \\ &-[\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})][\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w} + \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] \end{aligned} \tag{10}$$

成立.比较式(9)和式(10)中 F 的系数矩阵,可知 $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 和 $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 满足式(6),即系统(1)具有 KYP 特性.

特别,当 $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ 时,即如下系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w},\\ \boldsymbol{0} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{cases} \tag{11}$$

在式(6)中取 $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ 可得类似正常系统 KYP 的特性

$$\begin{aligned} &M_fV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant 0,\\ &M_gV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}). \end{aligned} \tag{12}$$

于是,有如下的推论.

推论 1　如果系统(11)存在光滑可微的半正定存储函数 $V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,则使得系统(11)无源的充分必要条件是系统(11)具有式(12)的 KYP 特性.

定理 2　系统(1)对于光滑可微的半正定存储函数是 $V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 无源的充分必要条件是 $V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 使得如下不等式

$$M_fV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \frac{1}{4}[M_gV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\varphi^{-1}[M_gV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]^{\mathrm{T}} \leqslant 0 \tag{13}$$

成立.

证　必要性.由无源定义式(4)

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}t} \leqslant \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t),$$

可得

$$\begin{aligned} &M_fV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + M_gV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w}(t) \leqslant \\ &\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w}(t) + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w}(t). \end{aligned} \tag{14}$$

即

$$\begin{aligned} &M_fV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + [M_gV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\boldsymbol{w}(t) - \\ &\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w}(t) \leqslant 0. \end{aligned} \tag{15}$$

式(15)等价于下式

$$M_fV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \frac{1}{4}[M_gV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\varphi^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$
$$[M_gV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]^{\mathrm{T}} - \{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}[M_gV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) -$$
$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\varphi^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\{\boldsymbol{w} -$$
$$\frac{1}{2}\varphi^{-\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})[M_gV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]^{\mathrm{T}}\} \leqslant 0. \quad (16)$$

在上式中取
$$w(t) = \frac{1}{2}\varphi^{-\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})[M_gV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]^{\mathrm{T}},$$
得式(13).

充分性.假设 式(13)成立,那么,对任意 $w(t) \in \mathbb{R}^p$ 式(16)成立.上述步骤逆推得式(4)成立,即系统(1)是无源的.

通过该定理,可得如下推论:
$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w} + \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{0} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\\ z = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w}.\end{cases} \quad (17)$$

推论 2 系统(17)是无源的充分必要条件是存在 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})$, 使得
$$M_fV(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + M_{g_2}V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}^* +$$
$$\frac{1}{4}[M_{g_1}V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\varphi^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$
$$[M_{g_1}V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]^{\mathrm{T}} \leqslant 0 \quad (18)$$
成立.

3 结论(Conclusion)

本文给出微分代数系统无源性的概念,同时,利用类似微分几何理论的方法,引入微分代数系统的M导数,推导出微分代数系统无源的充分必要条件及无源控制器存在的条件.本文的结论拓广了非线性系统的几何理论,使源于物理的无源性概念在微分代数系统中得以深化理解,有利于进一步研究微分代数系统的其他问题.

参考文献(References):

[1] CAMPBELL S L. *Singular Systems of Different Equations*[M]. San Francisco: Pitman Advanced publishing program, 1980.

[2] SAUER P WAND PAN M A. Power systems steady-state stability and the load-flow jacobian [J]. *IEEE Trans on Power systems*, 1990, 5(4): 1374 - 1383.

[3] 陈伯山,刘永清.非线性微分代数系统的稳定性[J].控制理论与应用,2000,17(1):40 - 44.
(CHEN Boshan, LIU Yongqing. The stability of nonlinear differential-algebraic systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(1): 40 - 44.)

[4] BYMES C J, ISIDORI A, WILLEMS J C. Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(11): 1228 - 1240.

[5] 冯纯伯.应用无源性研究时变非线性系统的稳定性[J].自动化学报,1997,23(6):775 - 781.
(FENG Chunbo. Stability analysis for time-varying nonlinear systems via passive analysis [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1997, 23(6): 775 - 781.)

[6] 俞立,潘海天.具有时变不确定线性系统的鲁棒无源控制[J].自动化学报,1998,24(3):368 - 372.
(YU Li, PAN Haitian. Robust passive control of linear systems with time-varying uncertain parameters [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 24(3): 368 - 372.)

[7] 王杰,陈陈.电力系统中微分代数系统模型的非线性控制[J].中国电机工程学报,2001,21(8):15 - 18.
(WANG Jie, CHEN Chen. Nonlinear control of differential algebraic model in power systems [J]. *Proceedings of the CSEE*, 2001, 21(8): 15 - 18.)

作者简介:

张秀华 (1963—),女,副教授,博士研究生,主要研究方向为双线性广义系统、微分代数系统理论及应用等, E-mail: bmlee@mail.edu.cn;

张庆灵 (1956—),男,东北大学理学院院长、教授、博士生导师,主要研究方向为复杂大系统理论及应用、模糊控制、分散控制、H_∞控制,控制理论在电力系统、网络系统的应用, E-mail: qlzhang@mail.edu.cn.