

文章编号: 1000-8152(2005)05-0837-06

## 用改进的差分式 Hopfield 网络实现线性二次型最优控制

李明爱, 乔俊飞, 阮晓钢

(北京工业大学 电子信息与控制工程学院, 北京 100022)

**摘要:** 为解决差分式 Hopfield 网络能量函数的局部极小问题, 本文对之改进得到一种具有迭代学习功能的线性差分式 Hopfield 网络. 理论分析表明, 该网络具有稳定性, 且稳定状态使其能量函数达到唯一极小值. 基于线性差分式 Hopfield 网络稳定性与其能量函数收敛特性的关系, 本文将该网络用于求解多变量时变系统的线性二次型最优控制问题. 网络的理论设计方法表明, 网络的稳态输出就是欲求的最优控制向量. 数字仿真取得了与理论分析一致的实验结果.

**关键词:** 多变量时变系统; 线性二次型最优控制问题; 动态优化; 差分式 Hopfield 网络

**中图分类号:** TP183      **文献标识码:** A

## Linear quadratic optimal control with a modified difference Hopfield neural network

LI Ming-ai, QIAO Jun-fei, RUAN Xiao-gang

(School of Electronic Information & Control Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

**Abstract:** A linear difference Hopfield neural network which has the function of iterative learning is proposed to overcome the local minimum problem of its energy function. Theoretical analysis shows that the linear Hopfield neural network is stable, and the stable state makes its energy function reach its unique minimum. On the basis of the relation between the stability of the linear difference Hopfield network and its energy function's convergence, the linear Hopfield network is applied to solve linear quadratic optimization control problems for multivariable time-varying systems. The theoretical design method of linear Hopfield neural network shows that its stable outputs are the desired optimal control inputs. The simulation results are in accord with theoretical analysis.

**Key words:** multi-varying time-varying system; linear quadratic optimal control problem; dynamic optimization; difference Hopfield neural network

### 1 引言(Introduction)

线性二次型调节器(Linear Quadratic Regulator, LQR)设计问题是现代控制理论中经典的最优控制问题, 已在航空、汽车、建筑等诸多领域得到了广泛应用<sup>[1-3]</sup>. 就目前的研究现状而言, 求解 LQR 问题的方法大体上有以下 3 种:

1) 利用数字计算的方法直接求解 Riccati 方程获得最优控制量.

2) 通过计算哈密尔顿(Hamiltonian)矩阵的特征值和特征向量从而获得最优控制量.

3) 以神经网络为最优控制器, 通过设计网络结构和参数, 使其运行后的输出直接产生最优控制量.

利用方法 1) 和 2) 可以得到 LQ 最优控制问题

的精确控制量, 但都难免矩阵求逆的复杂计算. 由于神经网络的高度并行计算能力, 特别是 Hopfield 网络, 不仅为反馈网络, 而且有着自己的能量函数, 其良好的动态性能使其更适于解决最优控制问题, 因而, 方法 3) 已日益成为研究的热点. 例如: 1990 年, Lan 和 Chand<sup>[4]</sup>将连续 Hopfield 网络用于求解线性定常系统的 LQR 问题. 他们采用罚函数法将有等式约束的优化问题转化为无约束的优化问题, 由 Hopfield 网络一次性产生控制时域内的全部控制量. 该方法所求的解与惩罚因子的取值有关, 因而与基于 Riccati 方程的理论解间常有一定误差. 1997 年, Ruan X<sup>[5]</sup>提出一种基于离散 Hopfield 网络求解线性时变系统的 LQR 问题的方法. 2003 年, Li M 和 Ruan X<sup>[6]</sup>

收稿日期: 2004-09-22; 收修改稿日期: 2005-06-15.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60375017); 国家自然科学基金与宝钢集团联合资助项目(50274003); 教育部科学技术研究重点资助项目(203002); 北京市教委资助项目(KM200510005026).

提出了基于连续 Hopfield 网络解决多变量时变系统线性二次型动态最优控制问题的设计方法. 这些设计方法能够保证网络运行有稳定解, 但不能有效解决能量函数的局部极小问题, 所以利用这些方法难以获得真正的最优控制量.

本文首先对差分式 Hopfield 网络进行改进, 得到一种线性差分式 Hopfield 网络, 该网络具有迭代学习功能. 理论分析表明, 合理地选取网络学习因子, 该网络具有稳定性, 且其稳定状态使其能量函数达到唯一极小值; 其次, 将线性差分式 Hopfield 网络用于求解多变量时变系统的 LQ 最优控制问题, 网络的理论设计表明, 当该网络由任意初始状态演化到稳定状态时, 相应的 LQ 性能指标达到极小, 而且网络的稳定状态就是欲求的最优控制向量. 仿真实验取得了与理论分析一致的实验结果.

## 2 LQ 最优控制问题描述 (LQ optimization control problem)

设线性时变离散控制系统的状态方程如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{U}(k), \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{X}_0, \end{aligned} \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{X}(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  为状态向量,  $\mathbf{U}(k) = [u_1(k), u_2(k), \dots, u_r(k)]^T \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  为控制向量. 则系统(1)的 LQ 最优控制问题就是求最优控制向量序列:  $\mathbf{U}(0), \mathbf{U}(1), \dots, \mathbf{U}(N-1)$ , 使性能指标  $J$  极小.

$$J = \mathbf{X}^T(N)\mathbf{H}\mathbf{X}(N) + \sum_{k=0}^{N-1} \{ \mathbf{X}^T(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{U}^T(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{U}(k) \}, \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  和  $\mathbf{Q}(k) \in \mathbb{R}^{n \times n} (0 \leq k < N)$  为半正定矩阵,  $\mathbf{R}(k) \in \mathbb{R}^{r \times r} (0 \leq k < N)$  为正定矩阵.

若定义  $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  及对角矩阵  $\tilde{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  分别为

$$\tilde{\mathbf{U}}^T = \{ \mathbf{U}^T(0), \mathbf{U}^T(1), \dots, \mathbf{U}^T(N-1) \}, \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \text{diag}(\mathbf{R}(0), \mathbf{R}(1), \dots, \mathbf{R}(N-1)), \quad (4)$$

则式(2)所示的最优性能指标可重述如下

$$J(\tilde{\mathbf{U}}) = \mathbf{X}^T(N)\mathbf{H}\mathbf{X}(N) + \tilde{\mathbf{U}}^T\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{U}} + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{X}^T(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{X}(k), \quad (5)$$

因而, 系统(1)的 LQ 最优控制问题, 即求最优控制向量  $\tilde{\mathbf{U}}$ , 使性能指标(5)达到极小.

## 3 差分式 Hopfield 网络及其改进 (Difference Hopfield neural network and Its im-

provement)

### 3.1 差分式 Hopfield 网络 (Difference Hopfield neural network)

设联结权矩阵为  $\mathbf{W} = [w_{ij}] \in \mathbb{R}^{L \times L}$ , 网络的状态矢量及其阈值分别为

$$\mathbf{S} = [s_1, s_2, \dots, s_L]^T \in \{-1, 1\}^{L \times 1},$$

$$\Theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_L]^T \in \mathbb{R}^{L \times 1},$$

则差分式 Hopfield 网络可由下式描述<sup>[7]</sup>:

$$\begin{cases} s_i(t+1) = \text{sgn}\{v_i(t+1)\} = \\ \quad \begin{cases} 1, & \text{if } v_i(t+1) \geq 0, \\ -1, & \text{if } v_i(t+1) < 0, \end{cases} \\ v_i(t+1) - v_i(t) = \sum_{j=1}^L w_{ij}s_j(t) - \theta_i, \end{cases} \quad (6)$$

$i = 1, 2, \dots, L$ . 其能量函数为

$$E = -\frac{1}{2}\mathbf{S}^T\mathbf{W}\mathbf{S} + \mathbf{S}^T\Theta. \quad (7)$$

理论研究表明:

1) 在全并行模式下, 差分式 Hopfield 网络稳定的充分条件是权值矩阵  $\mathbf{W}$  为半正定矩阵.

2) 在串行模式下, 差分式 Hopfield 网络稳定的充分条件是权值矩阵  $\mathbf{W}$  为对角元素非负的对称矩阵.

作为非线性系统, 差分式 Hopfield 网络具有许多的稳定状态, 其能量函数因而具有许多局部极小点. 因此, 将差分式 Hopfield 网络用于优化计算时, 常常遇到局部极小问题.

### 3.2 改进的差分式 Hopfield 网络 (Improved difference Hopfield neural network)

将差分式 Hopfield 网络中的非线性变换函数  $\text{sgn}(\cdot)$  改作线性变换, 则可将差分式 Hopfield 网络改作如下线性差分式 Hopfield 网络:

$$v_i(t+1) - v_i(t) = \eta \left( \sum_{j=1}^L \mathbf{W}_{ij}v_j(t) - \theta_i \right), \quad (8)$$

$$i = 1, 2, \dots, L,$$

式中  $\eta > 0$  称为学习率. 其能量函数定义为

$$E = -\frac{1}{2}\mathbf{V}^T\mathbf{W}\mathbf{V} + \mathbf{V}^T\Theta, \quad (9)$$

$\mathbf{V} = [v_1, v_2, \dots, v_L]^T$  为网络状态向量.

线性差分式 Hopfield 网络(8), 即改进的差分式 Hopfield 网络, 具有迭代学习功能, 可用于优化计算.

引理 1<sup>[8]</sup> 设有离散系统  $\mathbf{Z}(t+1) = \mathbf{B}\mathbf{Z}(t) + \boldsymbol{\beta}$ , 若矩阵  $\mathbf{B}$  的谱半径  $\rho(\mathbf{B}) < 1$ , 则离散系统是稳定的, 即对任意初始向量  $\mathbf{Z}(0)$  与  $\boldsymbol{\beta}$ , 离散系统必将收

敛至唯一的稳定状态  $Z_s$ .

由引理 1 可推出定理 1 和定理 2.

**定理 1** 假设矩阵  $W$  是负定的,且学习率  $\eta$  足够小,则式(8)所示的线性差分式 Hopfield 网络在全并行运行模式下是稳定的.

**证** 由式(8)可得,网络在全并行模式下满足下式:

$$V(k+1) = (I + \eta W)V(k) - \eta \Theta.$$

令  $\bar{W} = I + \eta W$ ,并假设  $\lambda_i$  和  $\bar{\lambda}_i (i = 1, 2, \dots, L)$  分别表示矩阵  $W$  和  $\bar{W}$  的特征值,则

$$\det(\lambda_i I - W) = 0, \det(\bar{\lambda}_i I - \bar{W}) = 0.$$

于是,有

$$\bar{\lambda}_i = 1 + \eta \lambda_i, i = 1, 2, \dots, L. \quad (10)$$

由于  $W$  为负定矩阵,故  $\lambda_i < 0 (i = 1, 2, \dots, L)$ . 若记  $\lambda_{\min} = \min_{1 \leq i \leq L} \lambda_i$ ,则矩阵谱半径  $\rho(W) = |\lambda_{\min}|$ .

由式(10)知,若选取  $0 < \eta < 1/\rho(W)$ ,则  $0 < \bar{\lambda}_i < 1 (i = 1, 2, \dots, L)$ ,从而

$$\rho(I + \eta W) = \rho(\bar{W}) < 1.$$

于是,由引理 1 得,式(8)所示的线性差分式 Hopfield 网络在全并行模式下是稳定的.

定理 1 意味着:对任意初始网络状态  $V(0)$  和阈值向量  $\Theta$ ,式(8)所示线性差分式 Hopfield 网络在全并行模式下都将收敛至唯一稳定状态  $V_s$ .

证毕.

**定理 2** 设矩阵  $W$  是负定的,且式(8)所示的线性差分式 Hopfield 网络在全并行模式下具有稳定性,则其稳定状态  $V_s$  将使能量函数(9)达到唯一的极小值点.

**证** 式(8)所示的线性差分式 Hopfield 网络在全并行模式下可由下式描述:

$$V(t+1) - V(t) = \eta(WV(t) - \Theta).$$

设该网络的稳定状态为  $V_s$ ,则由上式得

$$V_s - V_s = \eta(WV_s - \Theta),$$

因  $W$  是负定矩阵,故  $W^{-1}$  存在.于是有

$$V_s = W^{-1}\Theta. \quad (11)$$

而由式(9)知

$$\frac{\partial E}{\partial V} = -WV + \Theta,$$

将式(11)代入上式,有

$$\frac{\partial E}{\partial V} = 0, V = V_s.$$

即网络的稳定点就是能量函数的唯一极小值点.

证毕.

定理 2 意味着:当  $W$  为负定矩阵,且网络(8)稳

定时,其稳定状态就是能量函数  $E$  的唯一极小点.因此,线性差分式 Hopfield 网络由初始状态运行至稳定状态的过程就是其能量函数收敛并达到极小的过程.这一特性可用于求解优化问题,包括式(5)所示的 LQ 最优控制问题.

#### 4 用线性差分式 Hopfield 网络表达 LQ 最优控制问题 (Representing LQ optimization control problem with linear difference Hopfield neural network)

若式(5)所示的 LQ 最优控制问题的性能指标能够转化为线性差分式 Hopfield 网络的能量函数,则 LQ 最优控制问题的解可通过运行相应的 Hopfield 网络来获得.因此,建立控制系统的最佳性能指标与差分式 Hopfield 网络的能量函数间的等价关系是解决问题的关键.

**定理 3** 给定线性、时变、多变量、离散控制系统(1),其 LQ 最优控制问题的性能指标如式(5)所示,则存在一个具有负定联结权矩阵的线性差分式 Hopfield 网络,其能量函数  $E$  等价于 LQ 最优控制性能指标(5).

**证** 由式(1)和(3)得,控制系统在  $k$  时刻的状态可表示为

$$X(k) = \Phi(k)X(0) + \Psi(k)\tilde{U}, 1 \leq k \leq N, \quad (12)$$

其中  $\Phi(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为控制系统(1)的状态转移矩阵,即

$$\Phi(k) = A(k-1)A(k-2)\cdots A(0). \quad (13)$$

$\Psi(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  由下式定义

$$\Psi(k) = \begin{cases} \Psi_1(k), \Psi_2(k), \dots, \Psi_N(k), \\ \Psi_i(k) = \begin{cases} A(k-1)A(k-2)\cdots A(i)B(i-1), & i < k, \\ B(i-1), & i = k, \\ 0, & i > k. \end{cases} \end{cases} \quad (14)$$

将式(12)代入式(5)得

$$\begin{aligned} J = & \tilde{U}^T \{ \tilde{R} + \Psi^T(N)H\Psi(N) \} \tilde{U} + \\ & 2X^T(0)\Phi^T(N)H\Psi(N)\tilde{U} + \\ & X^T(0)[\Phi^T(N)H\Phi(N) + Q(0)]X(0) + \\ & \sum_{k=1}^{N-1} \{ \tilde{U}^T \Psi^T(k)Q(k)\Psi(k)\tilde{U} + \\ & 2X^T(0)\Phi^T(k)Q(k)\Psi(k)\tilde{U} + \\ & X^T(0)\Phi^T(k)Q(k)\Phi(k)X(0) \}. \end{aligned} \quad (15)$$

显然,性能指标  $J$  等价于  $J_1$ :

$$\begin{aligned}
 J_1 = & \tilde{U}^T \tilde{R} + \Psi^T(N) H \Psi(N) \tilde{U} + \\
 & 2X^T(0) \Phi^T(N) H \Psi(N) \tilde{U} + \\
 & \sum_{k=1}^{N-1} \{ \tilde{U}^T \Psi^T(k) Q(k) \Psi(k) \tilde{U} + \\
 & 2X^T(0) \Phi^T(k) Q(k) \Psi(k) \tilde{U} \}, \quad (16)
 \end{aligned}$$

若矩阵  $F \in \mathbb{R}^{rN \times rN}$  和  $G \in \mathbb{R}^{rN \times 1}$  由下式计算:

$$\begin{cases}
 F = \tilde{R} + \Psi^T(N) H \Psi(N) + \\
 \sum_{k=1}^{N-1} \{ \Psi^T(k) Q(k) \Psi(k) \}, \\
 G = \{ \Psi^T(N) H \Phi(N) + \\
 \sum_{k=1}^{N-1} \{ \Psi^T(k) Q(k) \Phi(k) \} \} X(0),
 \end{cases} \quad (17)$$

则

$$J_1 = \tilde{U}^T F \tilde{U} + 2\tilde{U}^T G.$$

显然,  $J_1$  等价于  $J_2$ :

$$J_2 = \frac{1}{2} \tilde{U}^T F \tilde{U} + \tilde{U}^T G. \quad (18)$$

对比式(18)所示的性能指标  $J_2$  和式(9)所示的能量函数  $E$  知, 当联接权矩阵  $W \in \mathbb{R}^{rN \times rN}$  和阈值  $\Theta \in \mathbb{R}^{rN \times 1}$  选取为

$$\begin{aligned}
 W &= -F, \\
 \Theta &= G
 \end{aligned} \quad (19)$$

时, 相应的线性差分式 Hopfield 网络的能量函数  $E$  与控制系统的 LQ 最优性能指标  $J$  等价.

由式(17)得

$$W = W_1 + W_2 + W_3. \quad (20)$$

其中

$$\begin{cases}
 W_1 = -\tilde{R}, \\
 W_2 = -\Psi^T(N) H \Psi(N), \\
 W_3 = -\sum_{k=1}^{N-1} \Psi^T(k) Q(k) \Psi(k),
 \end{cases} \quad (21)$$

设  $L = rN$ ,  $V_c \in \mathbb{C}^{L \times 1}$ , 且  $V_c \neq 0$ , 则

$$V_c^T W_1 V_c = -V_c^T \tilde{R} V_c \quad (22)$$

若将  $V_c$  分块为:  $V_c^T = [V_1^T \quad V_2^T \quad \cdots \quad V_N^T]$ , 其中:  $V_i \in \mathbb{R}^r (i = 1, 2, \dots, N)$ , 则至少存在一个  $i$ , 使得  $V_i \neq 0$ .

又由式(4)和(22)知,

$$V_c^T W_1 V_c = -\sum_{i=1}^N V_i^T R(i-1) V_i, \quad (23)$$

而  $R(i) (i = 0, 1, \dots, N-1)$  为正定矩阵, 于是

$$V_c^T W_1 V_c < 0, \quad (24)$$

可见,  $W_1$  为负定矩阵.

又因为矩阵  $H$  和  $Q(k)$  为半正定矩阵, 且由式(21)知  $W_2$  和  $W_3$  为对称矩阵, 故  $W_2$  和  $W_3$  为半负定矩阵是显然的. 因而, 由式(20)得,  $W$  为负定矩阵.

证毕.

定理3为一个构造性定理, 为借助于线性差分式 Hopfield 网络来求解 LQ 问题提供了理论依据. 依据定理1和定理2可得如下推论:

**推论1** 依式(19)设计的线性差分式 Hopfield 网络, 当学习率  $\eta$  足够小时, 具有稳定性, 且当网络达到稳定状态时, 其能量函数达到唯一的极小值点.

**推论2** 当依式(19)设计的线性差分式 Hopfield 网络收敛至稳定状态时, 其稳定状态  $V_s$  就是式(5)所示的 LQ 最优控制问题的解  $\tilde{U}$ .

## 5 仿真实验(Simulation experiments)

为验证本文提出的基于线性差分式 Hopfield 网络的最优控制方法的正确性和有效性, 进行了如下实验研究. 被控对象均为线性、时变、多变量、离散控制系统.

**例1** 单输入二阶控制系统状态空间方程为

$$\begin{aligned}
 X(k+1) &= \begin{bmatrix} 1-0.2e^{-\frac{k}{30}} & 0 \\ 0 & 0.5+0.1e^{-\frac{k}{40}} \end{bmatrix} X(k) + \\
 & \begin{bmatrix} 1-0.2e^{-\frac{k}{40}} \\ 2-0.1e^{-\frac{k}{35}} \end{bmatrix} u(k), \quad (25)
 \end{aligned}$$

其初始状态为  $X^T(0) = [1 \quad 1]$ , 相应的 LQ 最优控制性能指标为

$$\begin{aligned}
 J &= X^T(5) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X(5) + \\
 & \sum_{k=0}^4 \left\{ X^T(k) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X(k) + u^2(k) \right\}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

**例2** 两输入二阶控制系统状态空间方程为

$$\begin{aligned}
 X(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.8+0.02\sin k & 0.5 \\ 0.6 & 1-0.01\cos k \end{bmatrix} X(k) + \\
 & \begin{bmatrix} 1+0.1e^{-\frac{k}{10}} & 0.5 \\ 0.4 & 0.7+0.1e^{-\frac{k}{15}} \end{bmatrix} U(k), \quad (27)
 \end{aligned}$$

其初始状态为  $X^T(0) = [1 \quad 1]$ , 相应的 LQ 最优控制性能指标为

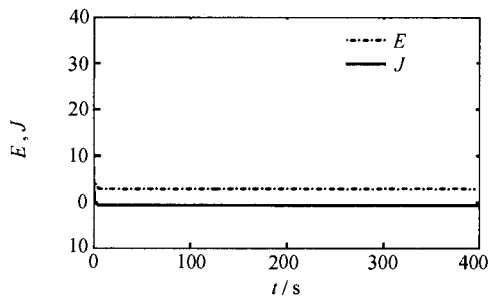
$$J = X^T(5) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X(5) +$$

$$\sum_{k=0}^4 \left\{ \mathbf{X}^T(k) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}(k) + \mathbf{U}^T(k) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{U}(k) \right\}. \quad (28)$$

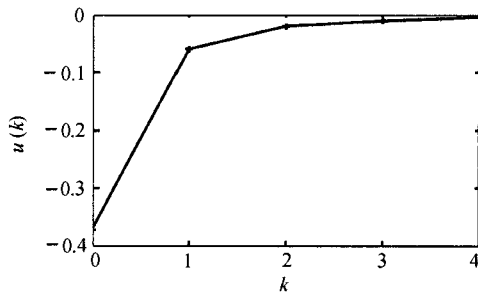
应用定理 3 所述方法,分别对例 1 和例 2 的 LQR 问题构造了  $L = 5$  和  $L = 10$  个神经元的线性差分式 Hopfield 网络,网络初始状态  $\mathbf{V}(0)$  随机产生,数字仿真结果见图 1 和图 2。

图 1(a)和图 2(a)给出了线性差分式 Hopfield 网络用于求解上述 LQR 问题时网络能量函数与控制系统性能指标的变化曲线,显然,二者是完全等价的;图 1(b)和图 2(b)显示了由线性差分式 Hopfield 网络求得的控制系统控制时域内各时刻的输入量;图 1(c)和图 2(c)进一步显示了以网络输出为控制输入时控制系统的状态转移轨迹。

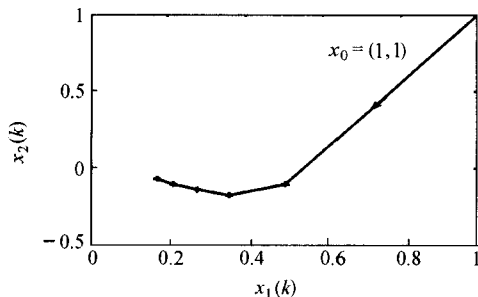
仿真结果有力说明了对差分式 Hopfield 网络改进的正确性及将之应用于求解 LQ 最优控制问题的可行性。



(a) 网络能量函数  $E$  与控制系统性能指标

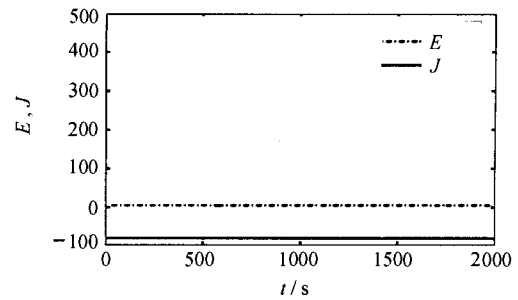


(b) 控制系统输入

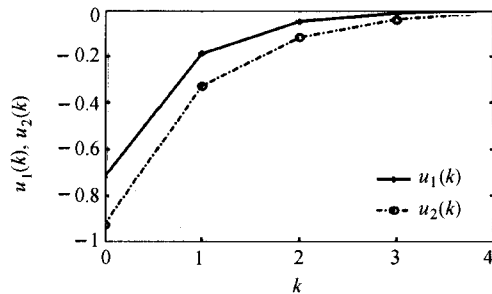


(c) 控制系统相平面曲线

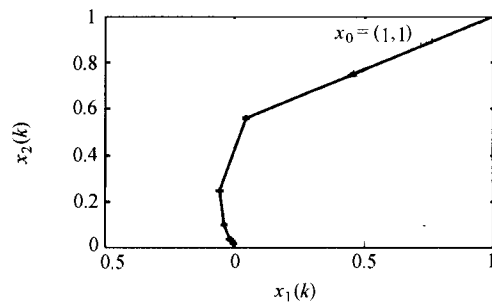
图 1 例 1 的仿真结果



(a) 网络能量函数  $E$  与控制系统性能指标



(b) 控制系统输入



(c) 控制系统相平面曲线

图 2 例 2 的仿真结果

Fig. 2 Simulation results of example 2

## 6 结论(Conclusion)

本文提出一种改进的差分式 Hopfield 网络,从理论上分析了网络的稳定性及其与能量函数收敛性的关系,并将该网络用于求解多变量时变系统的 LQ 动态最优控制问题.利用该方法不仅可以避免求解 Riccati 方程时复杂的矩阵求逆运算,而且避免了离散 Hopfield 网络、连续 Hopfield 网络等神经网络在用于求解优化问题时可能遇到的局部极小问题.数字仿真结果验证了上述设计思想的正确性,从而给解决 LQ 最优控制问题提供了一种有效途径。

## 参考文献(References):

- [1] JAE W C. LQR design with eigenstructure assignment capability and application to aircraft flight control [J]. *IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems*, 1999, 35(2): 700 - 708.
- [2] SAM, Y M. LQR controller for active car suspension [C]// *Proc of 2000 TENCON, Kuala Lumpur, Malaysia: TENCON, 2000: 441 -*

- 444.
- [3] 陈敏,常军,刘正兴.基于能量准则的梁振动控制的 LQR 方法[J].上海交通大学学报,2003,37(12):1942-1946.  
(CHEN Min, CHANG Jun, LIU Zhengxing. Linear Quadratic Regulator (LQR) method for vibration control of beams based on energy criterion [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2003, 37(12): 1942-1946.)
- [4] LAN M S. Solving Linear Quadratic discrete-Time Optimal Controls Using Neural Networks [C]// *Proc of the 29th Conf on Decision and Control*. Honolulu, Hawaii: IEEE Press, 1990: 2770-2772.
- [5] XIAOGANG R. Linear quadratic dynamic optimization with Hopfield network for discrete-time systems [C]// *Proc of the 2nd World Congress on Intelligent Control and Automation*. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1998: 1880-1883.
- [6] LI M A, RUAN X G. Optimal control with continuous Hopfield neural network [C]// *Proc of the 2003 IEEE Int Conf on Robotics, Intelligent Systems and Signal Processing*. Changsha: The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc, 2003, 2: 758-762.
- [7] 赵强福.神经网络用于二次优化存在的问题及解决方法[J].北京理工大学学报,1994,14(1):1-5.  
(ZHAO Qiangfu. Problems of neural networks in quadratic optimization and their solution [J]. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 1994, 14(1): 1-5.)
- [8] 邓建中,葛仁杰,程正兴.计算方法[M].西安:西安交通大学出版社,1987:201-208.  
(DENG Jianzhong, GE Renjie, CHENG Zhenyong. *Numerical analysis* [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1987: 201-208.)

#### 作者简介:

李明爱 (1966—),女,副教授,博士研究生,研究方向为智能控制理论及应用, E-mail: limingai@bjut.edu.cn;

乔俊飞 (1968—),男,博士,教授,研究方向为智能控制理论与应用;

阮晓钢 (1958—),男,教授,博士生导师,研究方向为智能控制理论、智能信息处理、生物信息学等。