

文章编号: 1000-8152(2005)06-0875-07

非线性时间序列建模的混合自回归滑动平均模型

王红军¹, 田 铮^{1,2}

(1. 西北工业大学 理学院 应用数学系, 陕西 西安 710072; 2. 中国科学院 自动化研究所 模式识别国家重点实验室, 北京 100080)

摘要: 提出了一类用于非线性时间序列建模的混合自回归滑动平均模型(MARMA). 该模型是由 K 个平稳或非平稳的 ARMA 分量经过混合得到的. 讨论了 MARMA 模型的平稳性条件和自相关函数. 给出了 MARMA 模型参数估计的期望极大化(expectation maximization)算法. 运用贝叶斯信息准则(Bayes information criterion)来选择该模型. MARMA 模型分布形式富于变化的特征使得它能够对具有多峰分布以及条件异方差的序列进行建模. 通过两个实例验证了该模型, 并和其他模型进行比较, 结果表明 MARMA 模型能够更好地描述这些数据的特征.

关键词: 混合自回归滑动平均模型; 自相关; 平稳性; 期望极大化算法; 条件异方差

中图分类号: O29, O23 **文献标识码:** A

Mixed autoregressive moving average model for modeling nonlinear time series

WANG Hong-jun¹, TIAN Zheng^{1,2}

(1. Department of Applied Mathematics, School of Science, Northwest Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710072, China;

2. National Key Laboratory of Pattern Recognition, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: A mixed autoregressive moving average (MARMA) model is proposed for modeling nonlinear time series. The model consists of K stationary or nonstationary ARMA components. The stationary conditions and autocorrelation function of the MARMA process are investigated. The estimation of parameters is easily performed via expectation maximization (EM) algorithm. The Bayes information criterion (BIC) is used as a tool for the MARMA model selection. The varied feature of conditional distributions of the MARMA model makes it capable of modeling time series with multimodal conditional distributions and with heteroscedasticity. The model is applied to two real data sets and compared with other competing models. The MARMA model appears to capture features of the data better than other competing models do.

Key words: mixed autoregressive moving average (MARMA) model; autocorrelation; stationarity; EM (expectation maximization) algorithm; heteroscedasticity

1 引言(Introduction)

时间序列模型的最佳预测与最佳控制是时序方法在工程应用中的一个重要方面. 而最佳控制是在最佳预测的基础上进行的, 因此最佳预测的获得非常重要. 线性时间序列模型(如 AR, MA, ARMA 模型等)的残差通常被假定服从 Gauss 分布. 在该假设下, 序列的边缘分布及条件分布均服从 Gauss 分布. 但在工程和金融等实际问题中, 不服从 Gauss 分布的序列却大量存在. 自然非 Gauss 分布序列在传统的线性时间序列框架下也就不可能得到更为精确的预测结果. 混合模型提供了一种可以近似任何分布形式的灵活、有效方法. 自从 Pearson 于 1894 年首次提出混合模型, 混合模型已在许多领域得到了广泛

的研究与应用. 一些学者将混合模型这一有力工具应用于时间序列分析, 得到了一类可用简单结构描述复杂非线性现象的混合时间序列模型. 例如, 为了对非线性时间序列中的奇异点、变点等现象进行描述, Le, Martin 和 Raftery^[1]于 1996 年提出 Gauss 混合转移分布(Gauss mixture transition distribution model, 简记 GMTD)模型. Wong 和 Li^[2]于 2000 年将其推广得到混合自回归(mixture autoregressive model, 简记 MAR)模型.

本文将 GMTD 和 MAR 模型做进一步推广, 提出了一类用于非线性时间序列建模的 MARMA 模型. 该模型是由 K 个平稳或非平稳的 ARMA 分量混合得到的. 文中给出了 MARMA 模型的平稳性条件

和自相关函数及建模方法:运用期望极大化(expectation maximization,简称EM)算法对模型的参数进行估计,利用BIC准则对模型定阶.通过研究和分析,得到一些结论:1)满足一定条件的几个平稳与非平稳的ARMA过程的混合是一个平稳过程;2)MARMA模型有结构类似于ARMA模型的Yule-Walker方程;3)MARMA模型的条件分布具有多峰分布的特征并能描述条件异方差.仿真及实例分析的结果都表明MARMA模型是一类有着广泛应用前景和研究价值的非线性时间序列模型.

2 MARMA模型(Introduction of MARMA model)

定义1 由 K 个混合元组成的MARMA模型定义如下:

$$F(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \Phi((y_t - \phi_{k0} - \phi_{k1}y_{t-1} - \dots - \phi_{kp_k}y_{t-p_k} + \theta_{k1}\varepsilon_{k,t-1} + \dots + \theta_{kq_k}\varepsilon_{k,t-q_k})/\sigma_k), \quad (1)$$

其中: $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_K = 1, \alpha_k > 0, k = 1, \dots, K$, $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots)$ 是由 $(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots)$ 生成的 σ -域, $F(y_t | \mathcal{F}_{t-1})$ 表示 y_t 的条件分布函数, $\Phi(\cdot)$ 是标准正态分布函数. 模型(1)简记为 MARMA($K; p_1, p_2, \dots, p_K; q_1, q_2, \dots, q_K$). 令 $p = \max(p_1, \dots, p_K)$, $q = \max(q_1, \dots, q_K)$. MARMA模型实际上是由 K 个残差服从Gauss分布的线性ARMA模型混合得到的.若 $K=1$,则它就是一般的ARMA模型;若 $\theta_k=0, k=1, \dots, K$,则它就是MAR模型.满足模型(1)的 y_t 的条件分布随时间 t 而变化,其条件期望为

$$E(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k (\phi_{k0} + \phi_{k1}y_{t-1} + \dots + \phi_{kp_k}y_{t-p_k} - \theta_{k1}\varepsilon_{k,t-1} - \dots - \theta_{kq_k}\varepsilon_{k,t-q_k}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{k,t}. \quad (2)$$

其中 $\mu_{k,t} = \phi_{k0} + \phi_{k1}y_{t-1} + \dots + \phi_{kp_k}y_{t-p_k} - \theta_{k1}\varepsilon_{k,t-1} - \dots - \theta_{kq_k}\varepsilon_{k,t-q_k}$. 不同于ARMA模型,由于MARMA模型产生序列的条件分布可能呈现多峰,因此 y_t 的条件期望未必是对未来值的最佳预报.

MARMA模型的另一个重要特征是它可以定量地描述变化的条件方差. y_t 的条件方差为

$$\text{Var}(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \sigma_k^2 + \sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{k,t}^2 - (\sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{k,t})^2. \quad (3)$$

MARMA模型的平稳性条件由下面定理给出.定理1给出MARMA($K; p_1, p_2, \dots, p_K; q_1, \dots, q_K$)模型一阶平稳的充分必要条件.MARMA模型二阶平稳条件的推导较为复杂,仅分别在定理2和定理3中给出MARMA($K; 1, 1, \dots, 1; q_1, q_2, \dots, q_K$)和MARMA($K; 2, 2, \dots, 2; q_1, q_2, \dots, q_K$)的二阶平稳的充分必要条件.定理的证明与文献[1]及[2]的方法类似,主要用到了Benes^[3]的结论.

定理1 MARMA($K; p_1, p_2, \dots, p_K; q_1, q_2, \dots, q_K$)过程 Y_t 为一阶平稳的充分必要条件是方程

$$1 - \sum_{i=1}^p (\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{ki}) z^{-i} = 0 \quad (4)$$

的根 z_1, \dots, z_p 在单位圆内,其中当 $i > p_k$ 时, $\phi_{ki} = 0$.

定理2 若MARMA($K; 1, 1, \dots, 1; q_1, q_2, \dots, q_K$)过程 Y_t 是一阶平稳的,则其二阶平稳的充分必要条件是方程

$$1 - (\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k1}^2) z^{-1} = 0 \quad (5)$$

的根 z 在单位圆内.

定理3 若MARMA($K; 2, 2, \dots, 2; q_1, q_2, \dots, q_K$)过程 Y_t 是一阶平稳的,则其二阶平稳的充分必要条件是

$$\beta_2 + \beta_1 < 1, \beta_2 - \beta_1 < 1, |\beta_2| < 1. \quad (6)$$

其中

$$\beta_1 = \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k1}^2, \\ \beta_2 = \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k2}^2 + \frac{2(\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k1} \phi_{k2})(\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k1})}{1 - \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k2}}.$$

类似于线性时间序列中的Yule-Walker方程,MARMA($K; p_1, p_2, \dots, p_K; q_1, q_2, \dots, q_K$)模型的自相关函数满足如下的差分方程

$$\varphi(B)\gamma_j = \begin{cases} 0, & j > q, \\ C \neq 0, & j = q, \end{cases}$$

即

$$\gamma_j = \begin{cases} \varphi_1 \gamma_{j-1} + \dots + \varphi_p \gamma_{j-p}, & j > q, \\ \varphi_1 \gamma_{j-1} + \dots + \varphi_p \gamma_{j-p} + C, & j = q. \end{cases}$$

其中

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{ki} (i = 1, \dots, p), C = \sum_{k=1}^K \alpha_k \theta_{kq_k} \sigma_k^2.$$

3 MARMA模型的参数估计及模型的选择 (Parameter estimation of the MARMA model and the model selection)

本文中用EM算法(Dempster等,1977)对MAR-

MA 模型进行参数估计. 假定 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 是产生于 MARMA 模型的一组观测值. $Z = (z_1, \dots, z_n)$ 是不可观测的随机变量序列, $z_t (t = 1, \dots, n)$ 是

K 维随机变量, $\sum_{k=1}^K z_{k,t} = 1$. 若 y_t 来自模型(1)中第 k 个分量, 则 $z_{k,t} = 1$; 否则 $z_{k,t} = 0$. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{K-1})^T$, $\phi_k = (\phi_{k0}, \dots, \phi_{kp_k})^T$, $\theta_k = (\theta_{k0}, \dots, \theta_{kq_k})^T$, $\theta = (\alpha^T, \phi_1^T, \dots, \phi_K^T, \theta_1^T, \dots, \theta_K^T)^T, k = 1, \dots, K$. 对数似然函数为

$$l = \sum_{t=p+1}^n \left\{ \sum_{k=1}^K z_{k,t} \log \alpha_k - \sum_{k=1}^K z_{k,t} \log \sigma_k - \sum_{k=1}^K z_{k,t} \frac{\varepsilon_{k,t}^2}{2\sigma_k^2} \right\}. \quad (7)$$

其中 $\varepsilon_{k,t} = y_t - \phi_{k0} - \phi_{k1}y_{t-1} - \dots - \phi_{kp_k}y_{t-p_k} + \theta_{k1}\varepsilon_{k,t-1} + \dots + \theta_{kq_k}\varepsilon_{k,t-q_k}$. 对数似然函数关于未知参数 θ 的一阶偏导数分别为

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha_k} = \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{k,t}}{\alpha_k} - \frac{z_{k,t}}{\alpha_K} \right), \quad k = 1, \dots, K-1, \quad (8)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \phi_{ki}} = \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{k,t} \varepsilon_{k,t} \mu(y_t, i)}{\sigma_k^2}, \quad k = 1, \dots, K, \quad i = 0, 1, \dots, p_k. \quad (9)$$

其中: 若 $i = 0, \mu(y_t, i) = 1$; 若 $i > 0, \mu(y_t, i) = y_{t-i}$.

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_{ki}} = \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{k,t} \varepsilon_{k,t-i}}{\sigma_k^2} \right), \quad k = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, q_k, \quad (10)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma_k} = \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{k,t}}{\sigma_k} \left(\frac{\varepsilon_{k,t}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right), \quad k = 1, \dots, K. \quad (11)$$

EM 算法估计参数是以极大化对数似然函数(9)为准则, 该算法由 E 步与 M 步构成.

E 步 假定参数 θ 已知. 缺损数据 Z 可由其条件期望代替(条件为参数 θ 和观测数据 Y), 记 $z_{k,t}$ 的条件期望为 $\tau_{k,t}$. α_k 为 y_t 来自第 k 个混合元的先验概率. 由后验概率公式有

$$\tau_{k,t} = E(z_{k,t} | Y, \theta) = \frac{(\alpha_k/\sigma_k) \phi(\varepsilon_{k,t}/\sigma_k)}{\sum_{k=1}^K (\alpha_k/\sigma_k) \phi(\varepsilon_{k,t}/\sigma_k)}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (12)$$

M 步 假设缺损数据 Z 已知. 用极大对数似然函数(7)来估计参数 θ . 这可以通过令式(8)~(11)为 0 得到. 例如令式(8)为 0, 则可得到

$$\hat{\alpha}_k = \frac{\sum_{t=p+1}^n \tau_{k,t}}{n-p}, \quad k = 1, \dots, K.$$

将 E 步和 M 步反复迭代直到收敛, 便可得到参数 θ 的估计值.

运用下面由 Louis 给出的方法(见文献[4,5])计算参数估计值的标准差:

$$I = I_c - I_m = E \left(- \frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} | \theta, Y \right)_{\hat{\theta}} - \text{Var} \left(\frac{\partial l}{\partial \theta} | \theta, Y \right)_{\hat{\theta}}. \quad (13)$$

其中: I 是观测信息矩阵, I_c 和 I_m 分别是完全信息和缺损信息.

MARMA 模型的选择包含两个方面的问题: 一方面是确定模型的混合元个数 K ; 另一方面是确定每个混合元自身的阶数 $p_1, \dots, p_K, q_1, \dots, q_K$. 文中运用 BIC 准则选择模型. MARMA 模型(1)中混合元数目 K 及模型阶数 $p_1, \dots, p_K, q_1, \dots, q_K$ 可由使如下 BIC 值达到最小而得到

$$-BIC = -2l + (3K - 1 + \sum_{k=1}^K p_k + \sum_{k=1}^K q_k) \log(n-p). \quad (14)$$

4 仿真与实例分析 (Simulation and example analysis)

4.1 仿真分析 (Simulation analysis)

由前面的定理可知, 平稳性条件既要依赖于混合元的权重系数 α_k , 又要依赖于各 ARMA 分量自回归部分的系数. 几个平稳线性 ARMA 过程的混合仍然为平稳过程, 但几个平稳与非平稳线性 ARMA 过程的混合也可能为平稳过程. 对于这个性质, 本文将通过下面 MARMA 模型(15)模拟产生的数据进行说明. 由式(15)易见, 第一个分量对应的是一个平稳的 ARMA(1,1)过程, 第二个分量对应的是一个非平稳的 ARMA(1,1)过程, 但经检验这两个 ARMA 模型混合后模拟产生的序列(见图 1)却是平稳的.

$$F(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0.7 \Phi \left(\frac{y_t - 0.3y_{t-1} - 0.5\varepsilon_{1,t-1}}{4} \right) + 0.3 \Phi \left(\frac{y_t - 1.6y_{t-1} - 0.6\varepsilon_{2,t-1}}{1} \right). \quad (15)$$

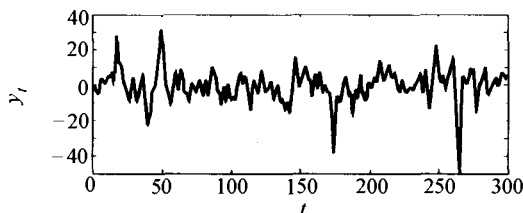


图 1 模型(15)产生的随机数序列

Fig. 1 Simulated time series of model (15)

下面运用 EM 算法通过 MARMA 模型模拟产生数据对其参数进行估计.实验共进行 500 次,每次模拟产生 500 个样本点.表 1 给出模型(15)模拟产生数据的估计结果,其中估计值标准方差由式(13)算得.由表 1 中的估计结果可知 EM 算法对 MARMA 模型参数估计的结果精度较高.

表 1 模型(15)模拟产生数据的估计结果

Table 1 Results of the simulation study with model (15)

k	α_k	ϕ_{k1}	θ_{k1}	σ_k
真值	0.7000	0.3000	0.5000	4.0000
估计均值	0.6944	0.3315	0.4398	3.7142
估计值标准差	0.0317	0.0105	0.0165	0.4061
真值	0.3000	1.6000	0.6000	1.0000
估计均值	0.3056	1.5985	0.6029	1.0462
估计值标准差	0.0317	0.0213	0.0014	0.2304

4.2 实例分析(Example analysis)

4.2.1 武汉市月平均气温数据 (Monthly average temperature series for Wuhan city)

用 MARMA 模型对武汉市月平均气温数据(从 1978 年 1 月到 1987 年 12 月,共 144 个观测值^[6])进行建模和分析.原数据的直方图(histogram)见图 2 (P 为频率),由图可见该序列的边缘分布具有多峰特征;原序列 Y_t 见图 3,显然 Y_t 是季节性非平稳序列;季节差分序列 $Y_t - Y_{t-12}$ 见图 4,该差分序列经检验是平稳的.

对于平稳的季节差分序列 $Y_t - Y_{t-12}$,由 BIC 准则,选用如下的 MARMA(2;0,1;1,0)模型

$$F(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0.7758 \Phi\left(\frac{y_t - y_{t-12} - 0.3728 \epsilon_{1,t-1}}{1.7609}\right) + 0.2242 \Phi\left(\frac{y_t + 0.4427 y_{t-1} - y_{t-12} - 0.4427 y_{t-13}}{7.9846}\right). \tag{16}$$

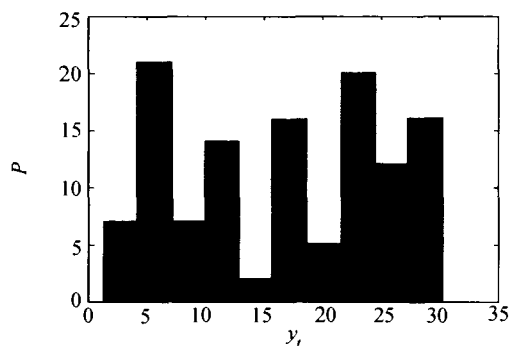


图 2 原始数据直方图
Fig. 2 Histogram of the original series

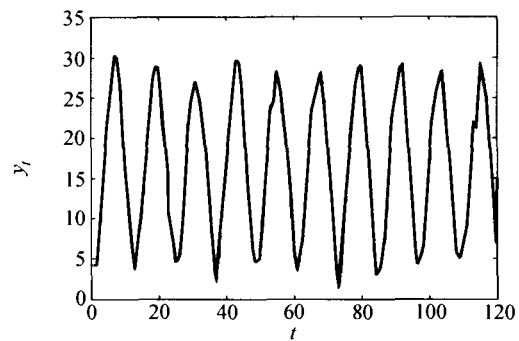


图 3 原始数据序列
Fig. 3 Original series

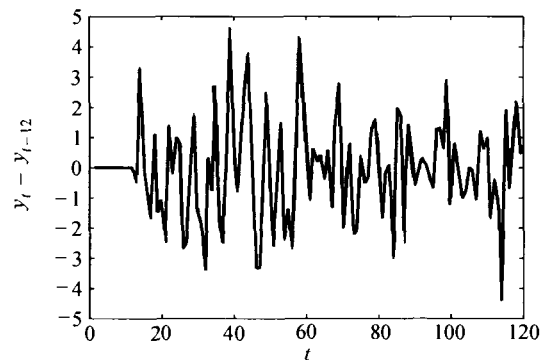


图 4 季节差分序列
Fig. 4 Seasonal differenced series

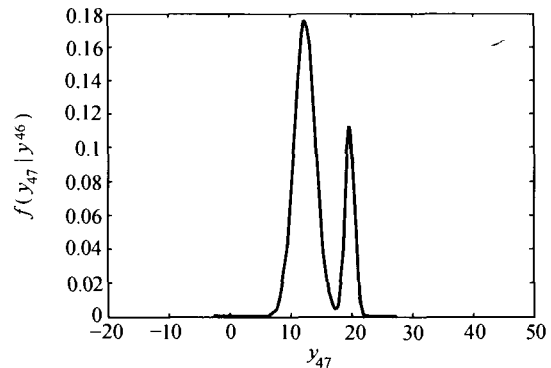


图 5 $t = 47$ 时的条件密度函数
Fig. 5 One step prediction distribution of the series at $t = 47$

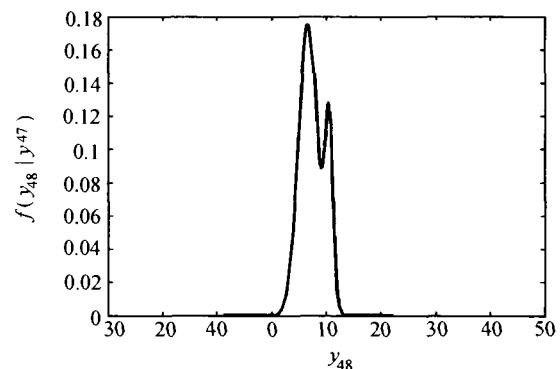


图 6 $t = 48$ 时的条件密度函数
Fig. 6 One step prediction distribution of the series at $t = 48$

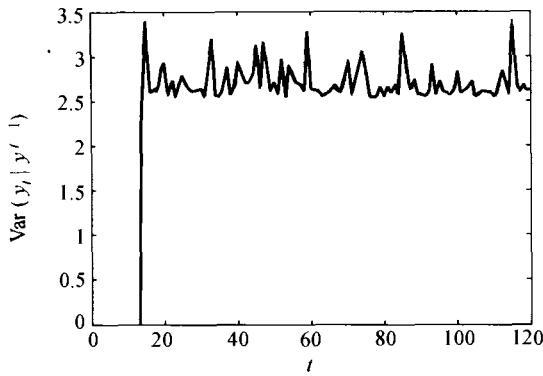


图7 由拟合模型得到 y_t 的条件方差

Fig. 7 Variance computed from the MARMA model for the series

图5和图6给出模型(16)在 $t = 47$ 和 $t = 48$ 的一步预报的条件密度函数. 由图可知 $t = 47$ 时刻和 $t = 48$ 时刻的一步预报条件密度函数是双峰的. 这表明在 $t = 47, 48$ 时刻, 月平均气温波动的可能性较大. 这与图3所反映的原数据序列周期性波动是吻合的. 由拟合模型得到的 y_t 的条件方差 $\text{Var}(y_t | \mathcal{F}_{t-1})$ 见图7. 由图可见, 该序列波动的大小是随时间周期性变化的, 与前面观测到的信息一致.

4.2.2 IBM 数据 (Common stock closing price series for IBM)

IBM(自1961年5月17日至1962年11月2日的369个观测值^[7])数据曾被许多研究者用各种不同的模型分析过. 原数据的直方图(histogram)见图8 (P 为频率), 由图可见该序列的边缘分布具有双峰特征; 原序列 Y_t 见图9, 显然 Y_t 是非平稳的, 并且从 $t = 250$ 到 $t = 280$ 时刻内波动性较大; 一阶差分序列 $Y_t - Y_{t-1}$ 见图10, 经检验该差分序列是平稳的.

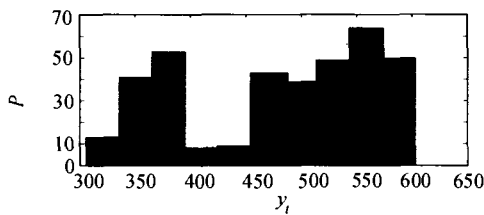


图8 原始数据直方图

Fig. 8 Histogram of the IBM stock price series

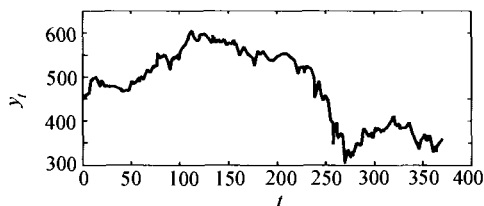


图9 原始数据序列

Fig. 9 Original series of the IBM stock price

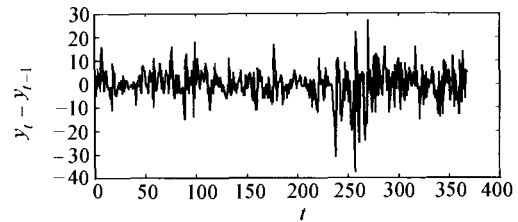


图10 一阶差分序列

Fig. 10 First order difference series of the IBM stock price

用各种不同的 MARMA 模型对于 IBM 一阶差分数据进行拟合(包括文献[1]中给出的 GMTD 模型和文献[2]中给出的 MAR 模型以及线性 ARIMA 模型). 通过分析和比较, 发现下面各 MARMA 模型都能较好地描述该序列. 表2给出各模型对应的 BIC 值.

表2 各模型对应的 BIC 值

Table. 2 BIC values of some MARMA models

模型	ARIMA (0,1,1)	GMTD (3;1,0,1)	MAR (3;1,1,0)
BIC	2506	2466	2271.6
模型	MARMA (3;1,1,0;1,1,0)	MARMA (2;0,1;1,0)	MARMA (3;1,1,1;1,1,1)
BIC	2270.3	2209.3	2284.6

由 BIC 准则, 选用如下的 MARMA(2;0,1;1,0) 模型

$$F(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0.647 \Phi\left(\frac{y_t - y_{t-1} + 0.3141 \epsilon_{1,t-1}}{5.3671}\right) + 0.353 \Phi\left(\frac{y_t - 1.697 y_{t-1} + 0.697 y_{t-2}}{7.9846}\right). \tag{17}$$

图11和图12给出模型(17)在 $t = 259$ 和 $t = 269$ 的一步预报的条件密度函数, 由图可知其条件密度函数是双峰的, 这表明在 $t = 259$ 和 $t = 269$ 时刻, 股票价格波动的可能性较大. 这与图9所反映的原数据序列自 $t = 250$ 至 $t = 280$ 时刻内序列波动性较大是吻合的. 拟合模型得到的 y_t 的条件方差 $\text{Var}(y_t | \mathcal{F}_{t-1})$ 见图13. 由图可见, 该序列波动的大小是随时间而变化的, 并且在自 $t = 250$ 至 $t = 280$ 时刻内波动较大, 这与前面观测到的信息一致. 表明该模型能够描述 IBM 数据具有的条件异方差.

将 MARMA 模型同其他模型的预报能力进行比较, 观测这些模型的一步预报置信区间的经验范围(即真实数据落入预报区间的百分率). 待比较的模型分别是

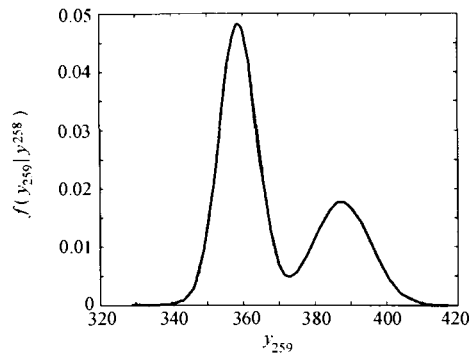


图 11 $t = 259$ 时的条件密度函数

Fig. 11 One step prediction distribution of the series at $t = 259$

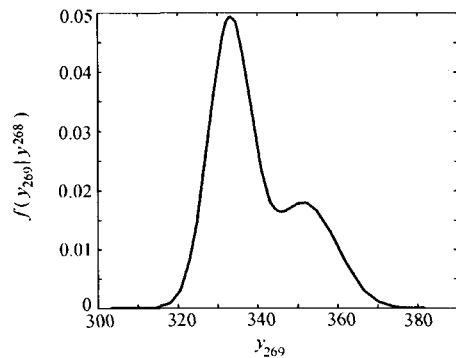


图 12 $t = 269$ 时的条件密度函数

Fig. 12 One step prediction distribution of the series at $t = 269$

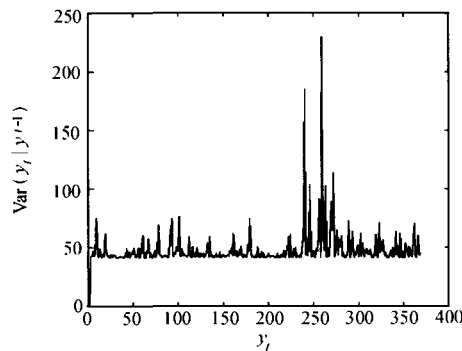


图 13 由拟合模型得到 y_t 的条件方差

Fig. 13 Variance computed from the MARMA model for the series

Box^[7]用 ARIMA 模型拟合这组 IBM 原始数据, 得到最优 ARIMA(0, 1, 1)模型为

$$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t - 0.09\epsilon_{t-1}, \epsilon_t \sim N(0, 52.2).$$

Tong^[8]用 SETAR 模型拟合这组数据, 用 BIC 准则选定的最优模型为

$$y_t = \begin{cases} 1.0452y_t - 0.0452y_{t-2} + \epsilon_t^{(1)}, & \text{当 } y_{t-1} \leq y_{t-2}, \\ 1.1467y_t - 0.1467y_{t-2} + \epsilon_t^{(2)}, & \text{当 } y_{t-1} > y_{t-2}. \end{cases}$$

其中 $\epsilon_t^{(1)} \sim N(0, 58.4319)$, $\epsilon_t^{(2)} \sim N(0, 45.0533)$.

Le^[1]用 GMTD 模型拟合该组数据, 得到最优模型为

$$F(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0.24\Phi\left(\frac{y_t - 1.94y_{t-1} + 0.94y_{t-2}}{6.38}\right) + 0.69\Phi\left(\frac{y_t - y_{t-1}}{5.03}\right) + 0.07\Phi\left(\frac{y_t - y_{t-2}}{11.23}\right).$$

Wong^[2]用 MAR 模型拟合这组数据, 用 BIC 准则选定最优 MAR 模型为

$$F(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0.5439\Phi\left(\frac{y_t - 0.6792y_{t-1} - 0.3208y_{t-2}}{4.8227}\right) + 0.4176\Phi\left(\frac{y_t - 1.6711y_{t-1} + 0.6711y_{t-2}}{6.0082}\right) + 0.0385\Phi\left(\frac{y_t - y_{t-1}}{18.1716}\right).$$

下面在表 3 中给出上述这些模型及 MARMA 模型所得到的一步预报置信区间的经验范围比较.

由表 3 可知 MARMA 模型、MAR 模型以及 GMTD 模型比其他两个模型的经验范围更接近标准经验范围. 这是因为它们都能描述多峰跳跃现象, 而 ARIMA 模型和 SETAR 模型仅能描述单峰分布的情况. ARIMA(0, 1, 1)模型的结构非常简单, 仅有两个参数. 由于其自身线性性的局限, 不可能对数据有进一步更为精确的描述. 尽管 MARMA 模型与 GMTD 模型及 MAR 模型的经验范围比较接近, 条件分布都具有描述多峰预报分布的能力, 但 MARMA 模型整体上预报效果比较好, 且结构简单, 参数最少.

表 3 不同模型的一步预报置信区间的经验范围比较

Table 3 $(1 - \alpha)100\%$ confidence interval of one step prediction for IBM stock price series

模型	95%	90%	80%	70%	60%	50%
MARMA	94.37%	90.27%	80.33%	71.19%	59.28%	50.97%
MAR	94.55%	89.37%	80.93%	70.30%	61.58%	51.50%
GMTD	95.10%	89.65%	79.56%	71.69%	62.13%	49.86%
ARIMA	93.48%	90.22%	83.97%	77.72%	69.84%	57.34%
SETAR	94.55%	90.47%	83.38%	76.84%	69.75%	58.86%

5 结论(Conclusion)

本文提出了用于非线性时间序列建模的 MARMA 模型,得到了 MARMA 模型的 Yule-Walker 方程和一些 MARMA 模型的平稳性条件.通过仿真分析,说明满足一定条件的几个平稳与非平稳 MARMA 过程的混合可得到一个平稳过程,以及 EM 算法对 MARMA 模型参数估计的精度.由实例分析结果可见, MARMA 模型结构简单,易于建模,条件分布具有多峰分布的特征并能描述条件异方差,能以较少的参数得到良好的预报效果.

参考文献(References):

- [1] LE N D, MARTIN R, RAFTERY A E. Modeling flat stretches, bursts, and outliers in time series using mixture transition distribution models [J]. *J of the American Statistical Association*, 1996, 91(436):1504 - 1515.
- [2] WONG C S, LI W K. On a mixture autoregressive model [J]. *J of the Royal Statistical Society*, 2000, 62, part 1:95 - 115.
- [3] BENES V E. Existence of finite invariant measures for Markov processes [J]. *Proc of the American Mathematical Society*, 1967, 18(6): 1058 - 1061.
- [4] LOUIS T A. Finding the observed information matrix when using the EM algorithm [J]. *J of the Royal Statistical Society*, 1982, 44(2): 226 - 233.
- [5] 茆诗松,王静龙,濮小龙.高等数理统计[M].北京:高等教育出版社;Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1998.
(MAO Shisong, WANG Jinglong, PU Xiaolong. *Advanced Mathematical Statistics* [M]. Beijing: China Higher Education Press; Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1998.)
- [6] 杨叔子,吴雅.时间序列分析的工程应用[M].武汉:华中理工大学出版社,1994.
(YANG Suzi, WU Ya. *Time Series Analysis in Engineering Application* [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1994.)
- [7] BOX G E P, JENKINS G M, REINSEL G C. *Time Series Analysis: Forecasting and Control* [M]. 3rd ed. Engle-wood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994.
- [8] TONG H. *Non-linear Time Series* [M]. New York: Oxford University Press, 1990.

作者简介:

王红军 (1975—),男,西北工业大学理学院应用数学系博士研究生,主要研究方向为非线性时间序列分析与信息处理, E-mail: wanghj-992000@yahoo.com.cn;

田铮 (1948—),女,教授,博士生导师,主要从事非线性时间序列分析与信息处理、多尺度非线性随机模型与图像处理等方面的研究, E-mail: zhtian@nwpu.edu.cn.