第23卷第1期 2006年2月 控制理论与应用 Control Theory & Applications Vol.23 No.1 Feb. 2006

文章编号：1000－8152(2006)01－0007－07

一个新型充要指数稳定性定理及其初步应用

胥布工

(华南理工大学 自动化科学与工程学院，广东 广州 510640)

摘要：针对一般滞后型动态系统，本文建立了一种新型的充分必要指数稳定性定理以及新的稳定性分析方法，进一步扩展了李雅普诺夫函数的概念。初步地探讨了将新方法用于多时变时滞线性系统和线性定常系统的稳定性分析。和文献中已有的结果不同，所建立的稳定性判据不依赖于时变时滞的变化率。因此，所提方法适合具有非常快变的时变时滞的系统。文中也指出了进一步改进应用结果的研究方向。

关键词：指数稳定性；稳定性定理；滞后型动态系统

中图分类号：TP13 **文献标识码**：A

A new-type exponential necessary and sufficient stability theorem and its simple applications

XU Bu-gong

(College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: A new-type necessary and sufficient exponential stability theorem for general retarded dynamical systems, together with new stability analysis techniques is established, the concept of Lyapunov function is further extended. Linear systems with multiple time-varying delays and linear time-invariant systems are considered to show the applications of the new stability theorem and the new stability analysis techniques. Unlike some results in the literature, all of the established results do not depend on the derivatives of the time-varying delays. Therefore, the results are suitable to the cases with very fast time-varying delays. In addition, the research direction for improving the obtained results for linear systems with multiple time-varying delays has been also pointed out.

Key words: exponential stability; stability theorem; retarded dynamical systems

1 引言(Introduction)

我们知道，对于线性时滞系统，主要的时域稳定性分析方法是李雅普诺夫泛函法和李雅普诺夫函数法，见文献[1～29]。对于变时滞线性系统，李雅普诺夫泛函法一般要求对时变时滞的导数加以限制，见文献[1,2,5～7,12,13,17～19]，故不适合具有非常快变的变时滞系统。此外，对时滞导数的限制条件往往会导致结果的保守性，见文献[21,23,24]所给的一些说明。另一方面，采用Razumikhin技巧的李雅普诺夫函数法可以用来处理没有时滞导数限制条件的时滞系统。不幸的是，现存的Razumikhin型方法[4,8,11,14,15]也常导致保守性的稳定性条件，见文献[20～28]。近年来，基于李雅普诺夫函数法的新型稳定性定理以及新的稳定性分析方法在文献[21～29]中逐步得到发展，本文是这些工作的继续。

本文下面的内容安排如下。第2节中，给出一些必要的准备。在第3节，在作者近年工作的基础上，提出了一种新型的稳定性定理以及新的稳定性分析方法。在第4节，探讨了新的稳定性定理以及新的稳定性分析方法对于多时变时滞线性系统及线性定常系统的初步应用。最后，第5节给出结论。

2 准备(Preliminaries)

符号：$\mathbb{R}^n$为n维实向量空间，$\mathbb{R}^{n\times n}$为$n\times n$维实矩阵空间；$\mathbb{R}_+$为非负实数集；$J=[r,\infty]$，其中$r\in\mathbb{R}$；$\mathbb{C}^n$为n维复向量空间，$\mathbb{C}^{n\times n}$为$n\times n$维复矩阵空间；C_n为从$[-\tau,0]$到$\mathbb{R}^n$的连续函数所构成的巴拿赫空间，其中$\tau>0$为一个常数；对$t\in\mathbb{R}$和$\theta\in\mathbb{R}$，定义$y_t(\theta)\in\mathbb{R}^n$表示$y(t+\theta)\in\mathbb{R}^n$，故有$y(t)=y_t(0)$；

收稿日期：2004－11－09；收修改稿日期：2005－07－12。

基金项目：国家自然科学基金重点资助项目(60334010)；国家自然科学基金资助项目(60474047)；高等学校博士学科点专项基金资助项目(20030561013)；广东省自然科学基金资助项目(31406)。

$\|\cdot\|$为$\mathbb{R}^n$上的欧氏模；对$\phi\in C_n$，定义$\|\phi\|_\tau=\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\|\phi(\theta)\|$，其中$\phi(\theta)\in\mathbb{R}^n$；$A^{\mathrm{T}}$为$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$的转置；$A^*$为$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$的共轭转置；$\lambda_{\min}(\cdot)$和$\lambda_{\max}(\cdot)$分别为矩阵的最小和最大特征值；对$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，定义$\|A\|=\max_i\{\lambda_i^{1/2}(A^{\mathrm{T}}A)\}$；$A>0$表示一个正定矩阵；$A\leqslant B$意味着$A-B\leqslant 0$；$|\cdot|$表示模或绝对值；而$\mathrm{j}^2=-1$.

考虑一般滞后动态系统

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t)\ , \tag{1}$$

其中"·"代表右导数，$f:J\times C_n\to\mathbb{R}^n$映射$C_n$中有界集到$\mathbb{R}^n$中有界集，$f(t,\phi)$为连续的且关于$\phi\in C_n$是Lipschitz连续的. 假设对所有$t\in J$，$f(t,0)\equiv 0$，故$x_e\equiv 0$是系统的平衡点. 当涉及局部结果时，总是假设$f:J\times C_n^\rho\to\mathbb{R}^n$，其中$C_n^\rho=\{\phi\in C_n\,|\,\|\phi\|_\tau<\rho,\rho>0\}$，$\rho>0$为一个常数. 对于$t\geqslant t_0\in J$，简记系统在$[t_0-\tau,\infty]$上的解$x(t_0,x_{t_0})(t)\in\mathbb{R}^n$为$x_t(0)=x(t)$，记在$\theta\in[-\tau,0]$上的解区间段$x_t\in C_n$为$x(t+\theta)=x_t(\theta)\in\mathbb{R}^n$，其中$\theta\in[-\tau,0]$.

本文采用如下关于常衰减度$\alpha\in\mathbb{R}_+$的指数稳定性定义.

定义1 设$\alpha\in\mathbb{R}_+$为一个非负数. 若存在一个常数$\Gamma\geqslant 1$，对任意的$\varepsilon>0$，存在一个$0<\delta\leqslant\varepsilon/\Gamma$满足$\delta<\rho$，使得对系统(1)从任意满足$\|x_{t_0}\|_\tau\leqslant\delta$的初始值$(t_0,x_{t_0})\in J\times\mathbb{C}_n^\rho$出发的解，均有$\|x_t(0)\|\leqslant\Gamma\|x_{t_0}\|_\tau\exp\{-\alpha(t-t_0)\}$对所有$t\geqslant t_0\in J$成立，则称系统(1)的平衡点$x_e\equiv 0$是关于常衰减度$\alpha\in\mathbb{R}_+$的指数稳定的. 若存在一个常数$\Gamma\geqslant 1$，对任意的$\delta>0$，系统(1)从任意满足$\|x_{t_0}\|_\tau\leqslant\delta$的初始值$(t_0,x_{t_0})\in J\times C_n$出发的解，均有$\|x_t(0)\|\leqslant\Gamma\|x_{t_0}\|_\tau\exp\{-\alpha(t-t_0)\}$对所有$t\geqslant t_0\in J$成立，则称系统(1)的平衡点$x_e\equiv 0$是关于常衰减度$\alpha\in\mathbb{R}_+$的全局指数稳定的.

注1 应该指出的是，和一般的指数稳定性定义不同，定义1中没有采用"存在一个常衰减度$\alpha\in\mathbb{R}_+$"的叙述. 换句话说，定义1中"系统(1)的平衡点$x_e\equiv 0$是关于常衰减度$\alpha\in\mathbb{R}_+$的指数稳定的"的叙述为所定义的指数稳定性指定了衰减度$\alpha\in\mathbb{R}_+$. 因此，定义1有利于建立充分必要稳定性条件，同时也有利于在指定衰减度$\alpha\in\mathbb{R}_+$的情况下，比较不同的稳定性分析方法所获得的结果.

注2 明显地，对于已知或未知的一个常数$\tau>0$，定义1中"系统(1)的平衡点$x_e\equiv 0$是关于常衰减度$\alpha>0$的指数稳定的"意味着"系统(1)的平衡点$x_e\equiv 0$是一致渐近稳定的"，而"系统(1)的平衡点$x_e\equiv 0$是关于常衰减度$\alpha=0$指数稳定的"意味着"系统(1)的平衡点$x_e\equiv 0$至少是一致稳定的".

引理1[27] 令$X(1)=\{u\in\mathbb{C}^n\,|\,u^*Pu=1\}$，其中$P>0\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 对于$D\in\mathbb{R}^{n\times n}$和$u\in X(1)$，有

$$\begin{aligned}&u^*PDu=|u^*PDu|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}=\\&\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}(u^*Puu^*D^{\mathrm{T}}PDu)^{1/2}=|\lambda|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}=\lambda\ .\end{aligned}\tag{2}$$

当且仅当$\lambda\in\{\lambda_1(D),\lambda_2(D),\cdots,\lambda_n(D)\}$，其中$u^*PDu=|u^*PDu|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}$，$\lambda=|\lambda|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}$，$\psi\in[0,2\pi]$，$\lambda_i(D)(i=1,2,\cdots,n)$为$D\in\mathbb{R}^{n\times n}$的特征值.

证 记$v=P^{1/2}u$和$w=P^{1/2}Du$. 根据著名的Cauchy-Schwarz不等式，有$|u^*PDu|=|v^*w|\leqslant(v^*vw^*w)^{1/2}=(u^*Puu^*D^{\mathrm{T}}PDu)^{1/2}$，而等式成立当且仅当$P^{1/2}Du=\lambda P^{1/2}u$，既然$P^{1/2}>0\in\mathbb{R}^{n\times n}$，等价于当且仅当$Du=\lambda u$，其中$u\neq 0\in X(1)$和$\lambda\in\mathbb{C}$. 结论是明显的. 证毕.

3 充要指数稳定性定理(Necessary and sufficient exponential stability theorem)

定理1 令$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$，其中$x\in\mathbb{R}^n$，$P>0\in\mathbb{R}^{n\times n}$为一个常矩阵. 设$D\in\mathbb{R}^{n\times n}$为一个常矩阵满足$-\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}\in\mathbb{R}_+$且有

$$\begin{cases}2y^{\mathrm{T}}PDy\leqslant 2\rho_My^{\mathrm{T}}Py\leqslant\Pi y^{\mathrm{T}}Py,\ \forall y\in\mathbb{R}^n,\\ \Pi>2\rho_M>1\ 若\ 2\rho_M>1,\\ \Pi>1\ 若\ 2\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}<2\rho_M\leqslant 1,\\ \Pi=1\ 若\ 2\rho_M\leqslant 2\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}.\end{cases}\tag{3}$$

其中$\rho_M\in\mathbb{R}$和$\Pi\geqslant 1$为两个常数. 设系统(1)满足如下条件

$$\begin{aligned}&\sup_{s\in\mathbb{R}}\{\phi^{\mathrm{T}}(0)Pf(s,\phi)\}\leqslant\\&\phi^{\mathrm{T}}(0)PD\phi(0),\forall\phi\in S_\rho(\alpha)\ ,\end{aligned}\tag{4}$$

其中$\alpha\in\mathbb{R}_+$为一个常数，而

$$S_\rho(\alpha)=\left\{\phi\in C_n^\rho\,\middle|\,\begin{aligned}&V(\phi(\theta))\leqslant\mathrm{e}^{-2\alpha\theta}V(\phi(0)),\\&\forall\theta\in[-\tau,0].\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

A) 系统(1)的平衡点$x_e\equiv 0$是关于常衰减度$\alpha\in\mathbb{R}_+$的指数稳定的充分必要条件是：

$$\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}\leqslant-\alpha\ ;\tag{6}$$

等价地，存在一个常数$\Gamma\geqslant 1$，对任意的$\varepsilon>0$，存在一个$0<\delta\leqslant\varepsilon/\Gamma$满足$\delta<\rho$，系统(1)从任意满足$\|x_{t_0}\|_\tau\leqslant\delta$的初始值$(t_0,x_{t_0})\in J\times C_n^\rho$出发的解，当且仅当$x_t\in S(L_t(\theta))$时，有

$$\dot{V}(x_t(0))\leqslant-2\alpha V(x_t(0))\ ,\tag{7}$$

其中$0\leqslant\alpha\leqslant-\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}\in\mathbb{R}_+$，而

$S(L_t(\theta))=$

$$\left\{ y_t \in C_n \left| \begin{array}{l} L_t(\theta) = L(t+\theta) = \\ \Pi V(\tilde{y}_{t_0}(0))\mathrm{e}^{-2\alpha(t+\theta-t_0)}, \\ V(\tilde{y}_{t_0}(0)) = \lambda_{\max}(P)\|x_{t_0}\|_\tau^2, \\ L_t(0) = L(t) = V(y_t(0)), \\ V(y_t(\theta)) = V(y_t(0))\cos^2(\omega\theta)\mathrm{e}^{-2\alpha\theta}, \\ \theta \in [-\tau, 0],\ \omega \in \mathbb{R},\ t \geqslant t_0 \in J. \end{array} \right. \right\} \tag{8}$$

其中 $\tilde{y}_{t_0}(0) = \tilde{y}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ 为在 $t_0 \in J$ 时刻满足 $V(\tilde{y}_{t_0}(0)) = \lambda_{\max}(P)\|x_{t_0}\|_\tau^2$ 的实向量.

B) 记 $S_\infty(\alpha)$ 为在 $S_\rho(\alpha)$ 的定义中用 C_n 代替 C_n^ρ 所得的集合. 若式(4) 中的不等式条件对所有 $\phi \in S_\infty(\alpha)$ 成立,则系统(1) 的平衡点 $x_e \equiv 0$ 是关于常衰减度 $\alpha \in \mathbb{R}_+$ 的全局指数稳定的充分必要条件是: $\max\limits_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\} \leqslant -\alpha$; 等价地, 对任意的 $\delta > 0$,系统(1) 从任意满足 $\|x_{t_0}\|_\tau \leqslant \delta$ 的初始值 $(t_0, x_{t_0}) \in J \times C_n$ 出发的解, 当且仅当 $x_t \in S(L_t(\theta))$ 时, 有条件(7) 成立, 其中 $0 \leqslant \alpha \leqslant -\max\limits_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\} \in \mathbb{R}_+$,而 $S(L_t(\theta))$ 由式(8)定义.

C) 由 A) 和 B) 可得系统(1)的解的估计为:

$$\|x_t(0)\| \leqslant \Gamma\|x_{t_0}\|_\tau \mathrm{e}^{\max\limits_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}(t-t_0)},\ \forall t \geqslant t_0 \in J, \tag{9}$$

其中 $\Gamma = \sqrt{\Pi\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)}$.

证 注意到沿系统(1) 从任意初始值 $(t_0, x_{t_0}) \in J \times C_n^\rho$ 出发的解,有 $\dot{V}(x_t(0)) = 2x_t^{\mathrm{T}}(0)Pf(t, x_t)$. 由系统(1),式(3) 和(8) 知

$$\lambda_{\min}(P)\|x_{t_0}(0)\|^2 \leqslant V(x_{t_0}(0)) \leqslant \Pi V(x_{t_0}(0)) \leqslant \Pi\lambda_{\max}(P)\|x_{t_0}\|_\tau^2. \tag{10}$$

对任意的 $(t_0, x_{t_0}) \in J \times C_n^\rho$ 成立,其中对于给定的 $P > 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$,式(3) ~ (5) 意味着 $\Pi \geqslant 1$ 依赖于系统(1). 先令 $\alpha \in \mathbb{R}_+$ 为一个任意可选的非负常数. 根据定义 1 和式(10), 可令 $\Gamma = \sqrt{\Pi\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)}$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$,存在一个 $0 < \delta \leqslant \varepsilon/\Gamma$ 满足 $\delta < \rho$,系统(1) 从任意满足 $\|x_{t_0}\|_\tau \leqslant \delta$ 的初始值 $(t_0, x_{t_0}) \in J \times C_n^\rho$ 出发的解,当 $x_s \in S(L_s(\theta))$ 时有 $V(x_s(0)) = \Pi V(\tilde{y}(t_0))\exp\{-2\alpha(s - t_0)\}$,其中 $s \geqslant t_0 \in J$. 式(5) 和(8) 意味着此时 $x_s \in S_\rho(\alpha)$, 故由式(4)得

$$\dot{V}(x_s(0)) = 2x_s^{\mathrm{T}}(0)Pf(s, x_s) \leqslant 2x_s^{\mathrm{T}}(0)PDx_s(0). \tag{11}$$

若考虑 $\rho_M > \max\limits_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}$,令 $\Pi > p > 1$ 为一个适当的常数. 对于一个满足 $\tilde{\alpha} = \alpha > 0$ 或 $\tilde{\alpha} > \alpha = 0$ 的给定正常数 $\tilde{\alpha} > 0$,则 $p > 1$ 意味着当

$$pV(x_{t_1}(0)) = \Pi V(\tilde{y}(t_0))\mathrm{e}^{-2\tilde{\alpha}(t_1-t_0)}, t_1 > t_0 \in J \tag{12}$$

时,必存在一个充分小的 $h > 0$ 使得有

$$V(x_{t_1}(0)) + \int_{t_1}^{t}\dot{V}(x_t(0))\mathrm{d}t = V(x_t(0)) \leqslant \Pi V(\tilde{y}(t_0))\mathrm{e}^{-2\tilde{\alpha}(t-t_0)} \leqslant \Pi V(\tilde{y}(t_0))\mathrm{e}^{-2\alpha(t-t_0)},\ \forall t \in [t_1, t_1 + h]. \tag{13}$$

式(13) 意味着当且仅当 $V(x_s(0)) = \Pi V(\tilde{y}(t_0))\mathrm{e}^{-2\tilde{\alpha}(s-t_0)}$ 对于 $s \in (t_1, t_1 + h)$ 时,有

$$\begin{aligned} &\dot{V}(x_s(0)) = \\ &\lim_{\xi\to 0+}\frac{V(x_s(\xi)) - V(x_s(0))}{\xi} \leqslant \\ &\lim_{\xi\to 0+}\frac{\mathrm{e}^{-2\tilde{\alpha}\xi} - 1}{\xi}\Pi V(\tilde{y}(t_0))\mathrm{e}^{-2\tilde{\alpha}(s-t_0)} = \\ &\lim_{\xi\to 0+}(-2\tilde{\alpha}\mathrm{e}^{-2\tilde{\alpha}\xi})V(x_s(0)) = -2\tilde{\alpha}V(x_s(0)) \leqslant \\ &-2\alpha\Pi V(\tilde{y}(t_0))\mathrm{e}^{-2\tilde{\alpha}(s-t_0)}. \end{aligned} \tag{14}$$

若考虑 $\rho_M \leqslant \max\limits_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\} \leqslant 0$ 的情况,则明显地,式(3) ~ (5) 意味着

$$\dot{V}(x_s(0)) \leqslant 2\rho_M V(x_s(0)) \leqslant 2\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}V(x_s(0)), x_s \in S(L_s(\theta)). \tag{15}$$

现在来确定 $\alpha \in \mathbb{R}_+$ 应满足的条件. 令 $u(t) = x_t(0) + \mathrm{j}z(t) \in \mathbb{C}^n$,其中 $x_t(0) \in \mathbb{R}^n$ 为系统(1) 的解,而 $z(t) \in \mathbb{R}^n$ 为可任意选取的连续函数. 由引理 1 和 $-\max\limits_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\} \in \mathbb{R}_+$ 知,当 $x_s \in S(L_s(\theta))$ 时,当且仅当 $Du(s) = \lambda(D)u(s)$ $(\lambda(D) \in \{\lambda_1(D), \lambda_2(D), \cdots, \lambda_n(D)\})$,有

$$\begin{aligned} &u^*(s)(PD + D^{\mathrm{T}}P)u(s) = \\ &2x_s^{\mathrm{T}}(0)PDx_s(0) + 2z^{\mathrm{T}}(s)PDz(s) = \\ &2\cos(\varphi(s))(u^*(s)Pu(s)u^*(s)D^{\mathrm{T}}PDu(s))^{1/2} = \\ &2\mathrm{Re}\lambda(D)(V(x_s(0)) + z^{\mathrm{T}}(s)Pz(s)) \leqslant \\ &2\mathrm{Re}\lambda(D)V(x_s(0)) \leqslant 2\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}V(x_s(0)), \end{aligned} \tag{16}$$

其中 $u^*(s)PDu(s) = |u^*(s)PDu(s)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(s)}$, 而 $\varphi(s) \in [0, 2\pi]$. 假设

$$u^*(t)Pu(t) = \Pi V(\tilde{y}(t_0))\mathrm{e}^{-2\alpha(t-t_0)},\ \forall t \geqslant t_o \in J. \tag{17}$$

由(16) 和(17) 知,当 $x_s \in S(L_s(\theta))$ 时,必有 $\|z(s)\| = 0$. 此时(16) 意味着

$$\dot{V}(x_s(0)) \leqslant 2x_s^{\mathrm{T}}(0)PDx_s(0) \leqslant 2\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}V(x_s(0)) =$$

$$2\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}\Pi V(\tilde{y}(t_0))\mathrm{e}^{-2\alpha(t-t_0)},$$

$$x_s\in S(L_s(\theta)).\qquad(18)$$

由式(14),(15)和(18)知,假设(17)成立当且仅当 $\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}\leqslant-\alpha$. 最后,由式(10)～(18)的推导知

$$V(x_t(0))\leqslant\Pi V(\tilde{y}(t_0))\mathrm{e}^{-2\alpha(t-t_0)},\ \forall t\geqslant t_0\in J\qquad(19)$$

当且仅当 $\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}\leqslant-\alpha$;等价地,存在一个常数 $\Gamma\geqslant1$,对任意的 $\varepsilon>0$,存在一个 $0<\delta\leqslant\varepsilon/\Gamma$ 满足 $\delta<\rho$,系统(1)从任意满足 $\|x_{t_0}\|_\tau\leqslant\delta$ 的初始值 $(t_0,x_{t_0})\in J\times C_n^v$ 出发的解,当且仅当 $x_t\in S(L_t(\theta))$ 时,有

$$\dot{V}(x_t(0))\leqslant-2\alpha V(x_t(0)),\qquad(20)$$

其中 $0\leqslant\alpha\leqslant-\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}\in\mathbb{R}_+$. 由式(19)得解的估计为

$$\|x_t(0)\|\leqslant\Gamma\|x_{t_0}\|_\tau\mathrm{e}^{\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}(t-t_0)}\leqslant$$

$$\Gamma\|x_{t_0}\|_\tau\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)},\ \forall t\geqslant t_0\in J.\qquad(21)$$

其中 $\Gamma=\sqrt{\Pi\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)}\geqslant1$,而 $\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}\leqslant-\alpha\leqslant0$. 由式(21)得最少保守的估计为式(9). 根据定义1和上述证明,系统(1)的平衡点 $x_e\equiv0$ 是关于常衰减度 $\alpha\in\mathbb{R}_+$ 的指数稳定的充分必要条件是:$\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}\leqslant-\alpha$;等价地,系统(1)从任意满足 $\|x_{t_0}\|_\tau\leqslant\delta$ 的初始值 $(t_0,x_{t_0})\in J\times C_n^v$ 出发的解,当且仅当 $x_t\in S(L_t(\theta))$ 时,有式(7)成立,其中 $0\leqslant\alpha\leqslant-\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}\in\mathbb{R}_+$. 若用 $S_\infty(\alpha)$ 代替 $S_\rho(\alpha)$,则全局指数稳定性的充分必要条件可根据定义1和如上类似的推导证明. 此处从略. 证毕.

注 3 众所周知,李雅普诺夫型稳定性定理是定号到定号模式的稳定性分析方法,即:选择一个正定函数 $V>0$,确定负定的 $\dot{V}<0$ 沿系统的解成立. 对于 $\dot{V}\leqslant0$ 的情况,有定号到半定号模式的不变集原理,即:选择一个正定函数 $V>0$,确定半负定的 $\dot{V}\leqslant0$ 沿系统的解成立. 事实上,正是定号到定号模式和定号到半定号模式增加了对于复杂系统选取合适的李雅普诺夫函数的难度. 定理1中提出了一种定号到不定号模式的稳定性分析方法,即:对一个正定函数 $V>0$,确定 $\dot{V}(x_t(0))\leqslant2x_t^{\mathrm{T}}(0)PDx_t(0)\leqslant-2\alpha V(x_t(0))$ 当且仅当 $x_t\in S(L_t(\theta))$,而 $\dot{V}(x_t(0))\geqslant2x_t^{\mathrm{T}}(0)PDx_t(0)>0$ 是允许的,只要 $V(x_t(0))<\Pi V(\tilde{y}(t_0))\exp\{-2\alpha(t-t_0)\}$. 明显地,李雅普诺夫函数的概念被进一步扩展.

注 4 应该指出的是:定理1的证明适合任意的常矩阵 $P>0\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 这与众所周知的系统(1)的稳定性只依赖于系统本身和李雅普诺夫函数的选取(此处为 $P>0\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的选取)无关的结论是一致的. 定理1中所提出的定号到不定号模式的稳定性分析方法,为我们提供了更大的自由度,以便可以把稳定性分析的着眼点放在系统本身,而不是选取李雅普诺夫函数上. 这也是建立定理1的目的所在. 另一方面,定理1并不排除选取 $P>0\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得对于所有 $\phi\in S_\rho(\alpha)$ 有 $\sup_{s\in\mathbb{R}}\{\phi^{\mathrm{T}}(0)Pf(s,\phi)\}\leqslant\phi^{\mathrm{T}}(0)PD\phi(0)<0$ 或 $\sup_{s\in\mathbb{R}}\{\phi^{\mathrm{T}}(0)Pf(s,\phi)\}\leqslant\phi^{\mathrm{T}}(0)PD\phi(0)\leqslant0$. 此时,定理1退化为经典的 Razumikhin 定理[4,8,11,14,15]. 因此,经典的定号到定号或定号到半定号模式的稳定性分析方法可视为定理1所提供的定号到不定号模式之方法的特例.

显然,令 $\tau\equiv0$,则定理1也适合于由一般常微分方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t))\qquad(22)$$

所描述的系统. 对于系统(22),定理1化为如下结果.

推论 1[27] 令 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$,其中 $P>0\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为一个常矩阵,$x\in\mathbb{R}^n$. 设 $D\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为一个常矩阵满足 $-\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}\in\mathbb{R}_+$ 使得对于系统(22)有

$$\sup_{s\in J}\{2y^{\mathrm{T}}Pf(s,y)\}\leqslant2y^{\mathrm{T}}PDy,\ \forall y\in\Omega_\rho.\qquad(23)$$

且

$$\begin{cases}2y^{\mathrm{T}}PDy\leqslant2\rho_My^{\mathrm{T}}Py\leqslant\Pi y^{\mathrm{T}}Py,\ \forall y\in\mathbb{R}^n,\\ \Pi>2\rho_M>1\ 若\ 2\rho_M>1,\\ \Pi>1\ 若\ 2\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}<2\rho_M\leqslant1,\\ \Pi=1\ 若\ 2\rho_M\leqslant2\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\},\end{cases}\qquad(24)$$

其中 $\Omega_\rho=\{y\in\mathbb{R}^n\mid\|y\|<\rho,\ \rho>0\}$,$\rho_M\in\mathbb{R}$ 和 $\Pi\geqslant1$ 为两个常数.

A) 系统(22)的平衡点 $x_e=0$ 是关于常衰减度 $\alpha\in\mathbb{R}_+$ 的指数稳定的充分必要条件是:

$$\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}\leqslant-\alpha;\qquad(25)$$

等价地,存在一个常数 $\Gamma\geqslant1$,对任意的 $\varepsilon>0$,存在一个 $0<\delta\leqslant\varepsilon/\Gamma$ 满足 $\delta<\rho$,系统(22)从任意满足 $\|x(t_0)\|\leqslant\delta$ 的初始值 $(t_0,x(t_0))\in J\times\Omega_\rho$ 出发的解,有

$$\dot{V}(x(t))\leqslant-2\alpha V(x(t))\qquad(26)$$

当且仅当 $x(t)\in S(L(t))$,其中 $0\leqslant\alpha\leqslant-\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}\in\mathbb{R}_+$,而

$$S(L(t))=\left\{y(t)\in\mathbb{R}^n\ \middle|\ \begin{aligned}&L(t)=V(y(t))=\\&\Pi V(\tilde{y}(t_0))\mathrm{e}^{-2\alpha(t-t_0)},t\geqslant t_0\in J,\\&V(\tilde{y}(t_0))=\lambda_{\max}(P)\|x(t_0)\|^2,\end{aligned}\right\}\qquad(27)$$

其中 $\tilde{y}(t_0)\in\mathbb{R}^n$ 为在 $t_0\in J$ 时刻满足 $V(\tilde{y}(t_0))=\lambda_{\max}(P)\|x(t_0)\|^2$ 的实向量.

B) 当用$\mathbb{R}^n$代替Ω_ρ时，若式(23)成立，则系统(22)的平衡点$x_e=0$是关于常衰减度$\alpha\in\mathbb{R}_+$的全局指数稳定的充分必要条件是：$\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}\leqslant-\alpha$；等价地，对任意的$\delta>0$，系统(22)从任意满足$\|x(t_0)\|\leqslant\delta$的初始值$(t_0,x(t_0))\in J\times\mathbb{R}^n$出发的解，当且仅当$x(t)\in S(L(t))$，有条件(26)成立，其中$0\leqslant\alpha\leqslant-\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}\in\mathbb{R}_+$，而$S(L(t))$由式(27)定义.

C) 由A)和B)可得系统(22)的解的估计为：

$$\|x(t)\|\leqslant\Gamma\|x(t_0)\|\mathrm{e}^{\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(D)\}(t-t_0)},\ \forall t\leqslant t_0\in J.\tag{28}$$

其中$\Gamma=\sqrt{\Pi\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)}$.

4 应用(Applications)

在这一节，考虑定理1的简单应用.

情形1 考虑下面的多时变时滞线性系统

$$\dot{x}(t)=A_0x(t)+\sum_{k=1}^m A_kx(t-\tau_k(t)),\tag{29}$$

其中$x\in\mathbb{R}^n$，$A_k\in\mathbb{R}^{n\times n}(k=0,1,\cdots,m)$为常矩阵，时变时滞满足$\tau_k(t)\leqslant\tau_{kM}\leqslant\tau<\infty(k=1,2,\cdots,m)$，而$\tau_{kM}>0$和$\tau>0$为已知或未知常数.

推论2 若不等式

$$\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(A_0)\}+\sum_{k=1}^m\|A_k\|<0\tag{30}$$

成立，则系统(29)的平衡点$x_e\equiv0$是时变时滞无关一致渐近稳定的.

证 对于任意给定的$\tau_{kM}>0(k=1,2,\cdots,m)$使得$\tau_k(t)\leqslant\tau_{kM}\leqslant\tau<\infty$，式(29)意味着存在一个充分小的正数$\varepsilon=\varepsilon(\tau_{1M},\tau_{2M},\cdots,\tau_{mM})>0$有

$$\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(A_0)\}+\sum_{k=1}^m\mathrm{e}^{\varepsilon\tau_{kM}}\|A_k\|=-\varepsilon<0.\tag{31}$$

令$V(x)=x^{\mathrm{T}}x$. 由定理1及文献[21~29]中的分析方法，沿着系统(29)的解，当$V(x_t(0))=\Pi V(\tilde{y}_{t_0}(0))\exp\{-2\varepsilon(t-t_0)\}$时，可得

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(x_t(0))=2x_t^{\mathrm{T}}(0)A_0x_t(0)+\\
&\sum_{k=1}^m2x_t^{\mathrm{T}}(0)A_kx_t(-\tau_k(t))=\\
&2x_t^{\mathrm{T}}(0)A_0x_t(0)+\\
&\sum_{k=1}^m2\mathrm{e}^{\varepsilon\tau_k(t)}\cos(\omega_k(t)\tau_k(t))x_t^{\mathrm{T}}(0)A_kx_t(0_k)\leqslant\\
&2x_t^{\mathrm{T}}(0)A_0x_t(0)+\\
&\sum_{k=1}^m2\mathrm{e}^{\varepsilon\tau_{kM}}\max_{\substack{z_0\in X_0(V(x_t(0)))\\ z_k\in X_k(V(x_t(0)))}}\{|z_0^{\mathrm{T}}A_kz_k|\}=\\
&2x_t^{\mathrm{T}}(0)A_0x_t(0)+\sum_{k=1}^m2\mathrm{e}^{\varepsilon\tau_{kM}}\|A_k\|V(x_t(0))=\\
&2x_t^{\mathrm{T}}(0)(A_0+\sum_{k=1}^m\mathrm{e}^{\varepsilon\tau_{kM}}\|A_k\|I_n)x_t(0)=\\
&2x_t^{\mathrm{T}}(0)Dx_t(0),x_t\in S_\varepsilon(L_t(\theta)).
\end{aligned}\tag{32}$$

其中$D=A_0+\sum_{k=1}^m2\mathrm{e}^{\varepsilon\tau_{kM}}\|A_k\|I_n\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$X_k(V(x_t(0)))=\{z_k\in\mathbb{R}^n|z_k^{\mathrm{T}}z_k=V(x_t(0))\}(k=0,1,\cdots,m)$，$\tau_k(t)\in[0,\tau_{kM}](k=1,2,\cdots,m)$均为同一时刻$t\geqslant t_0\in\mathbb{R}$的瞬时值，此时的瞬时值满足

$$\begin{cases}V(x_t(0_k))=V(x_t(0)),\\ x_t(-\tau_k(t))=x_t(0_k)\mathrm{e}^{\varepsilon\tau_k(t)}\cos(\omega_k(t)\tau_k(t)),\\ V(x_t(-\tau_k(t)))=\\ V(x_t(0_k))\mathrm{e}^{2\varepsilon\tau_k(t)}\cos^2(\omega_k(t)\tau_k(t))=\\ V(x_t(0))\mathrm{e}^{2\varepsilon\tau_k(t)}\cos^2(\omega_k(t)\tau_k(t)).\end{cases}\tag{33}$$

而$S_\varepsilon(L_t(\theta))$由式(8)所定义的集合采用$P=I_n$并用$\varepsilon>0$代替$\alpha>0$得到，即：

$$S_\varepsilon(L_t(\theta))=\left\{y_t\in C_n\left|\begin{aligned}&L_t(\theta)=L(t+\theta)=\\&\Pi V(\tilde{y}_{t_0}(0))\mathrm{e}^{-2\varepsilon(t+\theta-t_0)},\\&V(\tilde{y}_{t_0}(0))=\|x_{t_0}\|_\tau^2,\\&L_t(0)=L(t)=V(y_t(0)),\\&V(y_t(\theta))=V(y_t(0))\cos^2(\omega\theta)\mathrm{e}^{-2\varepsilon\theta},\\&\theta\in[-\tau,0],\ \omega\in\mathbb{R},\ t\geqslant t_0\in J.\end{aligned}\right.\right\}\tag{34}$$

既然$\tau_{kM}>0(k=1,2,\cdots,m)$是任意给定的，由定理1，注2和式(32)~(34)，条件(30)意味着系统(29)的平衡点$x_e\equiv0$是时变时滞无关一致渐近稳定的.　证毕.

注5 注意到稳定性条件(30)中不包含时滞的信息，故称其为时变时滞无关一致渐近稳定判据. 另一方面，由推论2的证明可知，$\varepsilon=\varepsilon(\tau_{1M},\tau_{2M},\cdots,\tau_{mM})\to0$当$\tau_{kM}\to\infty(k=1,2,\cdots,m)$. 由注2可知，此处一致性是指存在一个已知或未知的常数$0<\tau<\infty$使得$\tau_k(t)\leqslant\tau<\infty$.

推论3 若等式

$$\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(A_0)\}+\sum_{k=1}^m\mathrm{e}^{\alpha\tau_{kM}}\|A_k\|=-\alpha\in\mathbb{R}_+\tag{35}$$

成立，则系统(29)的平衡点$x_e\equiv0$是关于常衰减度$\alpha\in\mathbb{R}_+$的指数稳定的.

证 在推论2的证明中令$\varepsilon\equiv\alpha\geqslant0$，可立即由

定理1得证. 证毕.

注 6 在文献[1,2,5~7,12,13,17~19]中,要求变时滞的导数小于1,即对时滞的变化率施加了限制,而上述结果都不依赖于变时滞的导数.因此,所有结果适合于具有非常快变的变时滞的系统.

注 7 条件(30)和(35)已在文[25]中给出,作者在文[26]曾指出文[25]中的证明是不充分的,理由是文[25]中所用方法未能展开证明的细节.本文根据定理1,给出了条件(30)和(35)的新的证明.

注 8 在应用定理1的过程中,不难看出结果(30)和(35)均是通过分别估计$2x^{\mathrm{T}}(t)A_kx(t-\tau_k(t))(k=1,2,\cdots,m)$的上界而得到的.应该指出的是这不是作者建立定理1的最终目的.明显的,进一步的改进应从直接整体估计$2x^{\mathrm{T}}(t)A_0x(t)+\sum_{k=1}^{m}2x^{\mathrm{T}}(t)A_kx(t-\tau_k(t))$的上界入手.这也是作者正在进行的研究工作.

情形 2 考虑下面的线性定常系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t), \tag{36}$$

其中$x\in\mathbb{R}^n$,$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$是常数阵.

推论 4 系统(36)的平衡点$x_e\equiv0$是关于常衰减度$\alpha\in\mathbb{R}_+$的指数稳定的当且仅当

$$\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(A)\}\leqslant-\alpha. \tag{37}$$

证 直接应用推论1得证. 证毕.

注 9 推论4中采用时域法建立的线性定常系统指数稳定性的充分必要结果和众所周知的由频域法建立的结果是一致的.

5 结论(Conclusion)

针对一般滞后型动态系统,本文建立了一种新型的充分必要指数稳定性定理以及新的稳定性分析方法,李雅普诺夫函数的概念被进一步扩展.初步地探讨了将新方法用于多时变时滞线性系统和线性定常系统的稳定性分析.所建立的稳定性判据均不依赖于变时滞的变化率.同时,文中也指出了针对多时变时滞线性系统所得结果的进一步改进方向.

参考文献(References):

[1] FRIDMAN E, SHAKED U. Parameter dependent stability and stabilization of uncertain time-delay systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(5): 861-866.

[2] FRIDMAN E, SHAKED U. An improved stabilization method for linear time-delay systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1931-1937.

[3] GUAN X, HUA C, DUAN G. Comments on Robust stabilization of a class of time-delay nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(5): 907-908.

[4] HALE J K, LUNEL S M V. *Introduction to Functional Differential Equations* [M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

[5] JEUNG E T, OH D C, KIM J H, PARK H B. Robust controller design for uncertain systems with time delays: LMI approach [J]. *Automatica*, 1996, 32(8): 1229-1231.

[6] KHAROTONOV V L, MELCHOR-AGUILAR D. On delay-dependent stability conditions for time-varying systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2002, 46(3): 173-180.

[7] KIM J H. Robust stability of linear systems with delayed perturbations [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(12): 1820-1822.

[8] KOLMANOVSKII V B, NOSOV V R. *Stability of Functional Differential Equations* [M]. London: Academic Press, 1986.

[9] KOLMANOVSKII V B, RICHARD J P. Stability of some linear systems with delays [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(5): 984-989.

[10] KRASOVSKII N N. *Stability of Motion* [M]. Stanford: Stanford University Press, 1963.

[11] 李森林,温立志. 泛涵微分方程 [M]. 长沙:湖南科技出版社, 1987.
(LI Senlin, WEN Lizhi. *Functional Differential Equations* [M]. Changsha: Hunan Science and Technology Press, 1987.)

[12] LU C Y, TSAI J S H, JONG G J, SU T J. An LMI-based approach for robust stabilization of uncertain stochastic systems with time-varying delays [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(2): 286-289.

[13] NICULESCU S I, DE SOUZA C E, DION J M, DUGARD L. Robust exponential stability of uncertain linear systems with time-varying delays [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(5): 743-748.

[14] 秦元勋,刘永清,王联. 带有时滞的动力系统的运动稳定性 [M]. 北京:科学出版社, 1963.
(QIN Yuanxun, LIU Yongqing, WANG Lian. *Motion Stability of Dynamical Systems with Delays* [M]. Beijing: Science Press, 1963.)

[15] RAZUMIKHIN B S. The application of Lyapunov's method to problems in the stability of systems with delay [J]. *Avtomatika I Telemekhanika*, 1960, 21(6): 740-7480.

[16] SU N J, SU H Y, CHU J. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain time-delay systems [J]. *IEE Proc D: Control Theory and Applications*, 2003, 150(5): 489-492.

[17] SU T J, LU C T, TSAI J S H. LMI approach to delay-dependent robust stability for uncertain time-delay systems [J]. *IEE Proc D: Control Theory and Applications*, 2001, 148(3): 209-212.

[18] TAN K, GRIGORIADIS K M, WU F. H_∞ and L_2-to-L_∞ gain control of linear parameter g-varyin systems with parameter-varying delays [J]. *IEE Proc D: Control Theory and Application*, 2003, 150(5): 509-517.

[19] WANG Z, GOODALL D P, BURNHAM K J. On designing observers for time-delay systems with non-linear disturbances [J]. *Int J Control*, 2002, 75: 803-811.

[20] XU B. Decay estimates for retarded dynamic systems [J]. *Int J Systems Science*, 1999, 30(4): 427-439.

[21] 胥布工. 滞后动态系统广义指数稳定的充要条件[J]. 控制理

论与应用,1999,16(6):802 - 806.
(XU Bugong. Necessary and sufficient conditions of generalized exponential stability for retarded dynamic systems [J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(6): 802 - 806.)

[22] XU B. Decentralized stabilization of large-scale linear continuous systems with N(N time-varying delays)[J]. *Int J Systems Science*, 2000, 31(4): 489 - 496.

[23] XU B. Stability of retarded dynamical systems: A Lyapunov function approach [J]. *J Math Anal Application*, 2001, 253 (2): 590 - 615.

[24] XU B. Delay-independent stability criteria for linear continuous systems with time-varying delays [J]. *Int J Systems Science*, 2002, 33(7): 543 - 550.

[25] XU B. Stability criteria for linear systems with uncertain delays [J]. *J Math Anal Application*, 2003, 284(2): 455 - 470.

[26] XU B. Stability criteria for linear systems with multiple time-varying delays [J]. *J of Control Theory and Applications*, 2003, 1(1): 65 - 69.

[27] 胥布工. 一个新型充分必要指数稳定性定理 [C]// 第 24 届中国控制会议论文集, 中国, 广州: 华南理工大学出版社, 2005:660 - 664.
(XU Bugong. A new-type necessary and sufficient exponential stability theorem [C]// *Proceedings of 24th Chinese Control Conference*. Guangzhou, China: South China University of Technology Press, 2005: 660 - 664.)

[28] XU B, LIU Y Q. An improved Razumikhin-type theorem and its applications [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(4): 839 - 841.

[29] XU B, LIU Y H. Delay-dependent/delay-independent stability of linear systems with multiple time-varying delays [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(4): 697 - 701.

作者简介:

胥布工 (1956—),男,教授,博士生导师,IEEE 高级会员,现任华南理工大学自动化科学与工程学院院长,主要从事时滞和不确定性系统的分析与控制综合,网络化控制系统理论与应用,IP 网络和现场总线的应用研究,E-mail: aubgxu@ scut. edu. cn.