维普资讯 http://www.cqvip.com

第23卷第1期 控制理论与应用 Vol.23 No.1
2006年2月 Control Theory & Applications Feb. 2006

文章编号：1000-8152(2006)01-0025-06

受扰非线性离散系统的前馈反馈最优控制

唐功友，张宝琳
（中国海洋大学 信息科学与工程学院，山东 青岛 266071）

摘要：利用逐次逼近法研究含外部扰动的非线性离散系统的线性二次型前馈反馈最优控制问题. 首先将系统的最优控制问题转化为非线性两点边值问题族. 其次，构造了该问题族的由精确线性项和非线性补偿项组成的解序列，并证明了解序列一致收敛到系统的最优解. 最后，通过截取最优控制序列解中非线性补偿项的有限项，得到系统的前馈反馈次优控制(FFSOC)律及设计算法. 仿真算例表明，该算法容易实现，且对抑制外部扰动的鲁棒性优于经典的反馈次优控制(FSOC).

关键词：非线性离散系统；前馈反馈控制；最优控制；逐次逼近法；外系统

中图分类号：TP13 **文献标识码**：A

Feedforward and feedback optimal control for nonlinear discrete-time systems with deterministic disturbances

TANG Gong-you, ZHANG Bao-lin
(College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao Shandong 266071, China)

Abstract: Based on successive approximation approach, the problem of the linear-quadratic feedforward and feedback optimal control for nonlinear discrete-time systems with external disturbances is considered. The original optimal control problem is transformed first into a sequence of nonlinear two-point boundary value (TPBV) problems. Then a solution sequence, which consists of an accurate linear term and nonlinear compensation term, is constructed and its uniform convergence to the optimal solution of the system is proven. By taking a finite-step iteration of the nonlinear compensation term of optimal solution sequence, a feedforward and feedback sub-optimal control (FFSOC) law is obtained, and the design scheme is given. Simulations indicate that the algorithm proposed is easy to implement, and more robust with respect to external disturbances than that of the classical feedback sub-optimal control (FSOC) law.

Key words: nonlinear discrete-time systems; feedforward and feedback control; optimal control; successive approximation approach; Exosystem

1 引言(Introduction)

我们知道，几乎所有的实际控制系统都是非线性的，并且常常受到外部扰动的影响. 研究受扰离散控制系统的二次型最优控制问题既有理论意义，又有实际应用价值. 控制系统受到的外部扰动主要分为未知的随机扰动和已知动态特性的扰动. 目前，关于后者的研究中，由于广泛存在于航空振动控制系统[1]，海洋平台振动实时控制系统[2]，工业设计中的噪声减振控制[3,4]等实际控制系统中，诸如正弦扰动，周期扰动等确定性扰动的减振控制研究越来越引起人们的关注[5~8]. 另一方面，由于非线性系统的二次型最优控制问题往往导致求解非线性Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)方程问题，该类问题的解析解，除了一些简单情形，一般是不存在的. 因此，寻求非线性系统最优控制律的近似解法成为一个重要的研究课题. 目前，有代表性的有幂级数近似法[9,10]，逐次 Galerkin 逼近法[11,12]，以及其它方法[13~17].

本文利用逐次逼近法[16,17]，研究含外部确定扰动的非线性离散系统的二次型前馈反馈最优控制问题. 将受扰系统的最优控制问题转化为非线性两点边值问题族，构造并证明了该问题族的解序列一致收敛到系统的最优解，并通过截取最优控制序列解中非线性补偿项的有限项，得到系统的前馈反馈次

收稿日期：2004-05-25；收修改稿日期：2005-04-12.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60574023)；山东省自然科学基金资助项目(Z2005G01)；青岛市自然科学基金资助项目(05-1-JC-94).

维普资讯 http://www.cqvip.com

优控制律及其设计算法.

2 问题的描述(Problem formulation)

考虑含外部确定扰动的非线性离散系统

$$\begin{cases} x(k+1) = F(x(k),u(k)) + Dv(k), \\ k = 0,1,2\cdots,\ x(0) = \varphi, \end{cases} \tag{1}$$

其中$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r$分别为状态向量和控制向量,$\varphi$是已知的初始向量,$F: C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r) \to \mathbb{R}^n$, $F(0,0)=0$. D为适当维数的常数矩阵,$v \in \mathbb{R}^m$为外部扰动向量,且v的动态特性由外系统(Exosystem)

$$\begin{cases} v(k+1) = Gv(k), k = 0,1,2,\cdots, \\ v(0) = v_0 \end{cases} \tag{2}$$

描述,其中G是$m \times m$常量矩阵,v_0是已知的初始扰动. 假设矩阵G的特征值满足

$$|\lambda_i(G)| \leqslant 1,\ i = 1,2,\cdots,m, \tag{3}$$

且G的最小多项式在单位圆上的根为单根.

利用麦克劳林级数展开,系统(1)可化为:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Dv(k) + \\ \qquad f(x(k),u(k)),\ k = 0,1,2,\cdots, \\ x(0) = \varphi. \end{cases} \tag{4}$$

其中$A = \partial F_x(0,0)$, $B = \partial F_u(0,0)$, $f(x,u)$为关于x和u的非线性向量函数,f满足Lipschitz条件且$f(0,0)=0$.

选取如下形式的有限时域二次型性能指标:

$$J = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(N)Q_f x(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k) + u^{\mathrm{T}}(k)Ru(k)], \tag{5}$$

其中$Q, Q_f \in \mathbb{R}^{n\times n}$为半正定矩阵,$R \in \mathbb{R}^{r\times r}$为正定矩阵. 系统的最优控制问题是寻找最优控制$u^*(k)$使性能指标$J$在约束(4)下取最小值.

根据极值原理,系统(4)关于(5)的最优控制律为

$$u(k) = -R^{-1}[B^{\mathrm{T}} + f_u^{\mathrm{T}}(x(k),u(k))]\cdot \lambda(k+1), \tag{6}$$

其中$\lambda(k)$为下面两点边值问题的解:

$$\begin{cases} \lambda(k) = \\ Qx(k) + [A^{\mathrm{T}} + f_x^{\mathrm{T}}(x(k),u(k))]\cdot\lambda(k+1), \\ x(k+1) = \\ Ax(k) - BR^{-1}[B^{\mathrm{T}} + \\ f_u^{\mathrm{T}}(x(k),u(k))]\lambda(k+1) + \\ Dv(k) + f(x(k),u(k)), \\ \lambda(N) = Q_f x(N), \\ x(0) = \varphi;\ k = 0,1,2,\cdots,N-1. \end{cases} \tag{7}$$

3 最优控制律设计(Design of optimal control law)

为得到本文的主要结果,我们先给出两个重要的引理.

引理 1[16] 考虑非线性离散系统

$$\begin{cases} z(k+1) = H(k)z(k) + h(z(k)), \\ z(0) = \eta,\ k = 0,1,\cdots,N-1, \end{cases} \tag{8}$$

其中$z\in\mathbb{R}^n$为状态向量,η是初始向量,$h: C(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, $h(0)=0$, $H(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 假设$h$满足Lipschitz条件:

$$\|h(z_1) - h(z_2)\| \leqslant \alpha\|z_1 - z_2\|, z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

其中$\alpha > 0$. 如下定义函数向量序列$\{z^{(j)}\}$:

$$\begin{cases} z^{(0)}(k) = \prod_{m=1}^{k} H(k-m)\eta,\ k = 1,2,\cdots,N, \\ z^{(j)}(k) = \prod_{m=1}^{k} H(k-m)\eta + \\ \qquad \sum_{i=0}^{k-1}\left\{[\prod_{m=1}^{k-i-1} H(k-m)]h(z^{(j-1)}(i))\right\}, \\ z^{(j)}(0) = \eta,\ k = 1,2,\cdots,N;\ j = 1,2,\cdots, \end{cases} \tag{10}$$

其中$\prod_{m=1}^{0} H(k-m) = I$. 则函数序列$\{z^{(j)}\}$一致收敛到非线性离散系统(8)的解.

引理 2[18] 设$\bar{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\bar{C} \in \mathbb{R}^{n\times m}$,矩阵方程

$$\bar{A}X\bar{B} - X = \bar{C} \tag{11}$$

存在唯一解当且仅当对任意的$s \in \sigma(\bar{A})$和$\lambda \in \sigma(\bar{B})$,均有不等式$s\lambda \neq 1$成立,其中$\sigma(\cdot)$表示矩阵的谱.

为了利用逐次逼近法求解两点边值问题(7),令

$$\lambda(k) = P(k)x(k) + \bar{P}(k)v(k) + g(k), \tag{12}$$

其中$P(k)$是Ricatti矩阵差分方程

$$\begin{cases} P(K) = Q + E(k+1)P(k+1)A, \\ P(N) = Q_f \end{cases} \tag{13}$$

的唯一半正定解. 式(13)中

$$\begin{cases} E(k+1) = A^{\mathrm{T}}[I - P(k+1)BS^{-1}(k+1)B^{\mathrm{T}}], \\ S(k+1) = R + B^{\mathrm{T}}P(k+1)B. \end{cases} \tag{14}$$

$\bar{P}(k)$是矩阵差分方程

$$\begin{cases} \bar{P}(k) = E(k+1)\bar{P}(k+1)G + \\ \qquad E(k+1)P(k+1)D, \\ \bar{P}(N) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

的唯一解,$g(k)$ 为待求的 n 维共态量. 将式(12)(13)和(15)代入式(7),可得

$$\begin{cases} g(k) = \\ Y^*(k)K^*(k)[P(k+1)f(x(k),u^*(k)) + \\ g(k+1)] - Y^*(k)P(k+1)BS^{-1}(k+1)\cdot \\ f_u^{\mathrm{T}}(x(k),u^*(k))P(k+1)Bu^*(k) + \\ [f_x^{\mathrm{T}}(x(k),u^*(k))K^*(k) - \\ A^{\mathrm{T}}P(k+1)BS^{-1}(k+1)f_u^{\mathrm{T}}(x(k),u^*(k))]\cdot \\ [P(k+1)Ax(k) + P_0(k+1)v(k)], \\ g(N) = 0,\ k = 0,1,2,\cdots,N-1, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = \\ (I + BR^{-1}Z^*(k)P(k+1))^{-1}\cdot \\ [Ax(k) - BR^{-1}Z^*(k)g(k+1) + \\ f(x(k),u^*(k)) + (D - BR^{-1}Z^*(k)\cdot \\ \bar{P}(k+1)G)v(k)], \\ x(0) = \varphi,\ k = 0,1,\cdots,N-1 \end{cases} \tag{17}$$

和最优控制律

$$\begin{cases} u^*(k) = \\ -S^{-1}(k+1)Z^*(k)[P(k+1)(Ax(k) + \\ f(x(k),u^*(k))) + g(k+1) + \\ P_0(k+1)v(k)] - S^{-1}(k+1)f_u^{\mathrm{T}}(x(k), \\ u^*(k))P(k+1)Bu^*(k),k = 0,1,2,\cdots,N, \end{cases} \tag{18}$$

其中

$$\begin{cases} Y^*(k) = A^{\mathrm{T}} + f_x^{\mathrm{T}}(x(k),u^*(k)), \\ K^*(k) = I - P(k+1)BS^{-1}(k+1)Z^*(k), \\ Z^*(k) = B^{\mathrm{T}} + f_u^{\mathrm{T}}(x(k),u^*(k)), \\ P_0(k) = P(k)D + \bar{P}(k)G. \end{cases} \tag{19}$$

于是,原两点边值问题(7)转化为由式(16)和(17)组成的新两点边值问题. 显然,为了得到最优控制律(18),我们需要求解两点边值问题(16)和(17). 为此,如下构造伴随向量族 $\{g^{(j)}(k)\}$:

$$\begin{cases} g^{(j)}(N) = 0,\ j = 0,1,\cdots, \\ g^{(0)}(k) = 0,\ k = 0,1,\cdots,N-1, \\ g^{(j)}(k) = \\ Y^{(j)}(k)K^{(j)}(k)[P(k+1)f^{(j)}(k) + \\ g^{(j)}(k+1)] - Y^{(j)}(k)P(k+1)\cdot \\ BS^{-1}(k+1)(f_u^{(j)}(k))^{\mathrm{T}}P(k+1)\cdot \\ Bu^{(j)}(k) + [(f_x^{(j)}(k))^{\mathrm{T}}K^{(j)}(k) - \\ A^{\mathrm{T}}P(k+1)BS^{-1}(k+1)(f_u^{(j)}(k))^{\mathrm{T}}]\cdot \\ [P(k+1)Ax^{(j)}(k) + P_0(k+1)v(k)], \\ k = 1,2,\cdots,N-1;\ j = 1,2,\cdots, \end{cases} \tag{20}$$

以及状态向量族 $\{x^{(j)}(k)\}$

$$\begin{cases} x^{(j)}(0) = \varphi,\ k = 1,2,\cdots,N,\ j = 0,1,\cdots, \\ x^{(j)}(k+1) = \\ (I + BR^{-1}Z^{(j)}(k)P(k+1))^{-1}\cdot \\ [Ax^{(j)}(k) - BR^{-1}Z^{(j)}(k)g^{(j)}(k+1) + f^{(j)}(k) + \\ (D - BR^{-1}Z^{(j)}(k)\bar{P}(k+1)G)v(k)], \\ k = 0,1,\cdots,N-1;\ j = 0,1,\cdots, \end{cases} \tag{21}$$

及相应的最优控制序列 $\{u^{(j)}(k)\}$

$$\begin{cases} u^{(j)}(k) = \\ -S^{-1}(k+1)Z^{(j)}(k)[P(k+1)\cdot(Ax^{(j)}(k) + \\ f^{(j)}(k)) + g^{(j)}(k+1) + P_0(k+1)v(k)] - \\ S^{-1}(k+1)(f_u^{(j)}(k))^{\mathrm{T}}P(k+1)Bu^{(j-1)}(k), \\ u^{(0)}(k) = 0,\ k = 0,1,2,\cdots,N;\ j = 1,2,\cdots, \end{cases} \tag{22}$$

其中

$$\begin{cases} f^{(j)}(k) = f(x^{(j)}(k),u^{(j-1)}(k)), \\ f_x^{(j)}(k) = f_x(x^{(j)}(k),u^{(j-1)}(k)), \\ f_u^{(j)}(k) = f_u(x^{(j)}(k),u^{(j-1)}(k)), \\ Y^{(j)}(k) = A^{\mathrm{T}} + (f_x^{(j)}(k))^{\mathrm{T}}, \\ Z^{(j)}(k) = B^{\mathrm{T}} + (f_u^{(j)}(k))^{\mathrm{T}}, \\ K^{(j)}(k) = I - P(k+1)BS^{-1}(k+1)Z^{(j)}(k). \end{cases} \tag{23}$$

于是,我们有下面定理:

定理 1　对于第 j 次的最优控制问题,记最优状态轨线和最优控制律分别为 $x^{(j)}(k)$ 和 $u^{(j)}(k)$. 假设 $\{x^{(j)}(k)\}$ 和 $\{u^{(j)}(k)\}$ 分别为(21)和(22)的解序列,则控制序列 $\{u^{(j)}(k)\}$ 一致收敛到系统(4)关于(5)的最优控制律 $u^*(k)$,且 $u^*(k)$ 由下式确定:

$$\begin{aligned} & u^*(k) = \\ & -S^{-1}(k+1)Z^*(k)\cdot \\ & [P(k+1)(Ax(k) + f(x(k),u^*(k))) + \\ & g^{(\infty)}(k+1) + P_0(k+1)v(k)] - S^{-1}(k+1)\cdot \\ & f_u^{\mathrm{T}}(x(k),u^*(k))P(k+1)Bu^*(k). \end{aligned} \tag{24}$$

其中 $g^{(\infty)}(k) \triangleq \lim\limits_{j\to\infty} g^{(j)}(k)$.

证　由式(3)知外界扰动 $v(k)$ 有界. 另外,在序列 $\{x^{(j)}(k)\}$ 和 $\{u^{(j)}(k)\}$ 中,对 j 而言,$v(k)$ 为一常量. 根据引理 1,伴随向量序列 $\{g^{(j)}(k)\}$ 和状态向量序列 $\{x^{(j)}(k)\}$ 分别一致收敛到式(16)和(17),即

$$\begin{cases} g(k) = \lim\limits_{j\to\infty} g^{(j)}(k),\ x(k) = \lim\limits_{j\to\infty} x^{(j)}(k), \\ k = 0,1,2,\cdots,N. \end{cases} \tag{25}$$

同理,非线性函数向量序列 $\{Z^{(j)}(k)\}$,$\{Y^{(j)}(k)\}$ 和 $\{K^{(j)}(k)\}$ 分别一致收敛到 $Z^*(k)$,$Y^*(k)$ 和

维普资讯 http://www.cqvip.com

$K^*(k)$. 由式(22)知,控制序列$\{u^{(j)}(k)\}$仅关联$\{x^{(j)}(k)\}$,$\{g^{(j)}(k)\}$和$\{Z^{(j)}(k)\}$,因此,$\{u^{(j)}(k)\}$一致收敛到最优控制律$u^*(k)$. 证毕.

注 1 事实上,我们无法求得最优控制律(24)中的$g^{(\infty)}$. 实际应用中可用$j = M$(M为某确定的自然数)时的值$g^{(M)}$近似$g^{(\infty)}$,从而得到M阶前馈反馈次优控制律:

$$\begin{aligned} u_M(k) = & \\ & -S^{-1}(k+1)Z^{(M)}(k)[P(k+1)(Ax(k)+ \\ & f(x(k),u^{(M-1)}(k)))+g^{(M)}(k+1)+ \\ & P_0(k+1)v(k)]-S^{-1}(k+1)f_u^{\mathrm T}(x(k), \\ & u^{(M-1)}(k))P(K+1)Bu^{(M-1)}(k). \end{aligned} \tag{26}$$

注 2 容易推证,当无前馈作用时系统的反馈最优控制律和相应的次优控制律分别为:

$$\begin{aligned} u^*(k) = & \\ & -S^{-1}(k+1)Z^*(k)[P(k+1)(Ax(k)+ \\ & f(x(k),u^*(k)))+g^{(\infty)}(k+1)+ \\ & P(k+1)Dv(k)]-S^{-1}(k+1)f_u^{\mathrm T}(x(k), \\ & u^*(k))P(k+1)Bu^*(k), \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} u_M(k) = & \\ & -S^{-1}(k+1)Z^{(M)}(k)[P(k+1)(Ax(k)+ \\ & f(x(k),u^{(M-1)}(k)))+g^{(M)}(k+1)+ \\ & P(k+1)Dv(k)]-S^{-1}(k+1)f_u^{\mathrm T}(x(k), \\ & u^{(M-1)}(k))P(k+1)Bu^{(M-1)}(k). \end{aligned} \tag{28}$$

对系统(1)的二次型最优控制问题,可以类似讨论无限时域,即$N\to\infty$时的情形. 如果扰动矩阵G至少有一个单位特征值时,外部扰动v将趋向于等幅振荡,状态向量x和控制向量u至少有一个将不趋向于零,从而对系统的最优控制问题,选择常规的无限时域二次型性能指标

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}[x^{\mathrm T}(k)Qx(k)+u^{\mathrm T}(k)Ru(k)] \tag{29}$$

是不收敛的. 为此,我们一般选取如下形式的二次型平均性能指标

$$J=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}[x^{\mathrm T}(k)Qx(k)+u^{\mathrm T}(k)Ru(k)]. \tag{30}$$

对于外系统(2)为渐近稳定的情形,也可以选取二次型性能指标(29). 当性能指标为(29)或(30)时,假设(A,B)完全可控,$(A,Q^{1/2})$完全可观,则系统的前馈反馈最优控制律和相应的次优控制律分别为:

$$\begin{aligned} u^*(k) = & \\ & -S^{-1}Z^*(k)[P(Ax(k)+f(x(k),u^*(k)))+ \\ & g^{(\infty)}(k+1)+P_0Dv(k)]-S^{-1}f_u^{\mathrm T}(x(k), \\ & u^*(k))PBu^*(k), \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} u_M(k) = & \\ & -S^{-1}Z^{(M)}(k)[P(Ax(k)+f(x(k),u^{(M-1)}(k)))+ \\ & g^{(M)}(k+1)+P_0Dv(k)]-S^{-1}f_u^{\mathrm T}(x(k), \\ & u^{(M-1)}(k))PBu^{(M-1)}(k), \end{aligned} \tag{32}$$

其中$P_0=PD+\bar PG$,P为代数Riccati矩阵方程

$$EPA-P+Q=0 \tag{33}$$

的唯一正定解,这里$E=A^{\mathrm T}(I-PBS^{-1}B^{\mathrm T})$,$S=R+B^{\mathrm T}PB$,$\bar P$为离散Sylvester型矩阵方程

$$E\bar PG-\bar P=-EPD \tag{34}$$

的唯一解. $g^{(j)}(k)$由下式决定:

$$\begin{cases} g^{(j)}(N)=0,\ j=0,1,\cdots, \\ g^{(0)}(k)=0,\ k=0,1,2,\cdots,N-1, \\ g^{(j)}(k)= \\ Y^{(j)}(k)K_1^{(j)}(k)[Pf^{(j)}(k)+g^{(j)}(k+1)]- \\ Y^{(j)}(k)PBS^{-1}(f_u^{(j)}(k))^{\mathrm T}PBu^{(j)}(k)+ \\ [(f_x^{(j)}(k))^{\mathrm T}K_1^{(j)}(k)-A^{\mathrm T}PBS^{-1}(f_u^{(j)}(k))^{\mathrm T}]\cdot \\ [PAx^{(j)}(k)+P_0v(k)], \\ k=1,2,\cdots,N-1;\ j=1,2,\cdots, \end{cases} \tag{35}$$

其中$K_1^{(j)}(k)=I-PBS^{-1}Z^{(j)}(k)$,$x^{(j)}(k)$满足:

$$\begin{cases} x^{(j)}(0)=\varphi,\ k=1,2,\cdots,N,\ j=0,1,\cdots, \\ x^{(j)}(k+1)= \\ [I+BR^{-1}Z^{(j)}(k)P]^{-1}[Ax^{(j)}(k)- \\ BR^{-1}Z^{(j)}(k)g^{(j)}(k+1)+f^{(j)}(k)+ \\ (D-BR^{-1}Z^{(j)}(k)\bar PG)v(k)], \\ k=0,1,\cdots,N-1;\ j=0,1,\cdots. \end{cases} \tag{36}$$

这里需要强调的是,由假设(A,B)完全可控,$(A,Q^{1/2})$完全可观知代数Riccati方程(33)有唯一正定解. 又据线性离散系统的调节器理论,矩阵E的特征值小于1,结合式(3)以及引理2,Sylvester型矩阵方程(34)的解唯一存在. 因此系统(4)关于无限时域二次型性能指标(30)的最优控制律(31)以及相应的次优控制律(32)唯一存在.

注 3 在实际次优控制器设计时,次优控制律(26)的计算过程和其中M的确定方法由下列算法给出(对于无限时域的情形,次优控制律(32)的算法类似):

1) 给定容许误差$\varepsilon>0$,初始性能指标$J_0=\Delta$,Δ为一充分大的正数,$g^{(0)}(k)=0$,并令$j=1$;分别从(13)和(15)求出$P(k)$和$\bar P(k)$,

2) 由(20)计算$g^{(j)}(k)$,

3) 令$M=j$,由(26)计算$u_M(k)$,并由(5)计算J_M,其中J_M为第M次的性能指标值,

4) 若$|(J_M-J_{M-1})/J_M|<\varepsilon$,则输出$u_M(k)$,结束,

维普资讯 http://www.cqvip.com

5) 否则,由(21)计算 $x^{(j)}(k)$,令 $j=j+1$,转至2).

4 数值仿真(Numerical simulations)

考虑受扰二阶非线性离散系统(4)和(2),其中

$$\begin{cases} A=\begin{bmatrix}1 & 0.1\\ 0.02 & 1.05\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\ 0.3\end{bmatrix},\\ D=\begin{bmatrix}0.95 & -0.05\\ 0.1 & 1\end{bmatrix},\\ f(x(k),u(k))=\begin{bmatrix}0\\ 0.25/(1+x_1(k))^2\end{bmatrix}u(k),\\ x(0)=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}. \end{cases} \tag{37}$$

下面根据外系统(2)稳定但非渐近稳定和渐近稳定两种情形,分别讨论前馈反馈次优控制对外部扰动的抑制效果.

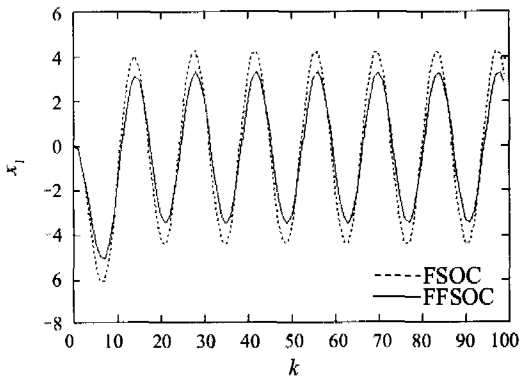
例1 外系统(2)稳定但非渐近稳定

假设 $G=\begin{bmatrix}0.8 & -1\\ 0.2 & 1\end{bmatrix}$,初始扰动 $v(0)=\begin{bmatrix}-1\\ 0.8\end{bmatrix}$. 性能指标泛函(30)中,$Q=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$,$R=1$. 采用7阶FSOC律和FFSOC律时系统的状态分量 x_1 和控制输入 u 的仿真曲线由图1给出. 其中,虚线表示FSOC,实线表示FFSOC. 表1给出了采用不同阶的次优控制律时系统的性能指标值. 表中 J_M 和 $\bar{J}_M$ 分别表示FFSOC和FSOC对应的性能指标值. 由表1可以看出,如果取容许误差 $\varepsilon=0.001$,则有 $|(J_7-J_6)/J_7|<\varepsilon$. 从而7阶FFSOC律 $u_7(k)$ 可以近似为该系统的FFSOC.

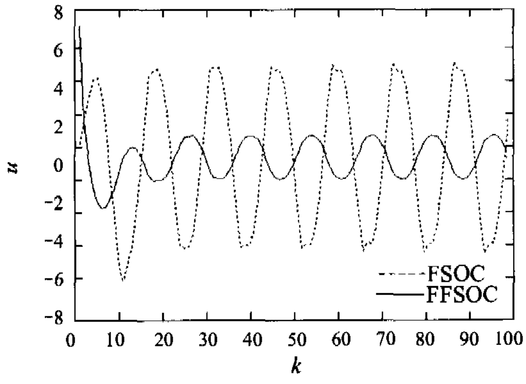
表1 不同迭代次数时系统性能指标值

Table 1 Cost functional values of different iteration times

M	2	4	6	7
J_M	12.4469	12.3861	12.3709	12.3660
$\bar{J}_M$	36.3034	35.3842	35.2826	35.2876



(a) 系统状态 x_1



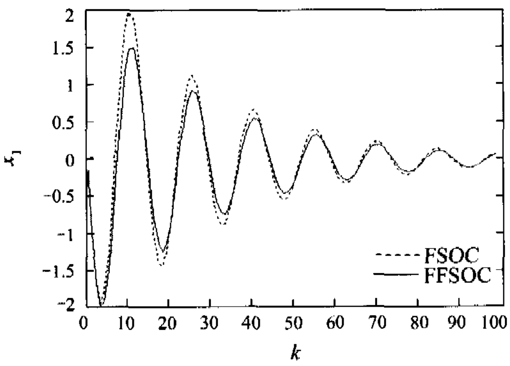
(b) 控制输入 u

图1 外系统(2)稳定时的次优减振控制比较曲线

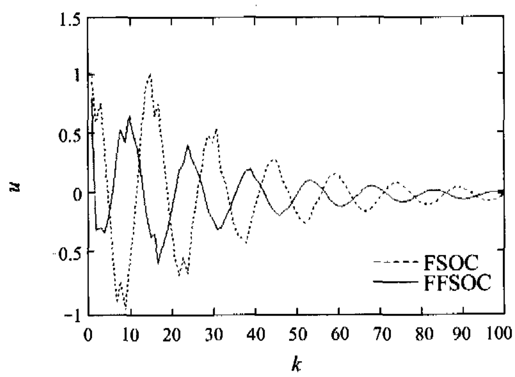
Fig. 1 Sub-optimal damping control comparison curves when Exosystem (2) is stable

例2 外系统(2)渐近稳定

假设 $G=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0.9344 & 1.76\end{bmatrix}$,初始扰动 $v(0)=\begin{bmatrix}-1.8\\ 0.4\end{bmatrix}$. 性能指标泛函(29)中 $Q=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$,$R=1$. 图2给出了采用6阶FSOC律和FFSOC律时系统的状态分量 x_1 和控制输入 u 的仿真曲线,其中容许误差为 $\varepsilon=0.001$. 经过计算6阶FFSOC和FSOC对应的性能指标值分别为 $J_6=813.5582$ 和 $\bar{J}_6=1197.4$.



(a) 系统状态 x_1



(b) 控制输入 u

图2 外系统(2)渐近稳定时的次优减振控制比较曲线

Fig. 2 Sub-optimal damping control comparison curves when Exosystem (2) is asymptotically stable

维普资讯 http://www.cqvip.com

5 结论(Conclusion)

本文针对扰动的动态特性确定的情形，得到了非线性离散系统前馈反馈最优控制的逐次逼近算法.与经典的反馈最优控制算法相比,该算法对外界确定扰动具有良好的鲁棒性,且次优控制阶数 M 越大,次优控制越趋于最优控制.算法容易实现,计算量小,收敛速度快.

参考文献(References):

[1] LEITMANN G, PANDEY S. Aircraft control under conditions of windshear [C]// *Proc of the 29th Conference on Decision and Control*. Honolulu, USA: IEEE Press, 1990, 2:747 - 752.

[2] WANG W, TANG G Y. Feedback and feedforward optimal control for offshore jacket platforms [J]. *China Ocean Engineering*, 2004, 18(4): 515 -526.

[3] SACKS A, BODSON M, KHOSLA P. Experimental results of adaptive periodic disturbance cancellation in a high performance magnetic disk drive [C]// *Proc of American Control Conference*. San Francisco, USA: IEEE Press, 1993: 686 -690.

[4] SHOURESHI R, BRACKNEY L, KUBOTA N, BATTA G. Modern control approach to active noise control [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, 1993, 115(4): 673 -678.

[5] TANG G Y. Feedforward and feedback optimal control for linear system with sinusoidal disturbances [J]. *High Technology Letters*, 2001, 7(4): 16 -20.

[6] LINDGUIST A, YAKUBOVICH V A. Optimal damping of forced oscillations in discrete-time systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, AC -42: 786 -802.

[7] 唐功友，赵艳东，陈显利. 带正弦干扰的线性时滞系统的次优控制[J]. 控制与决策, 2004, 19(5): 529 -533.
(TANG Gongyou, ZHAO Yandong, CHEN Xianli. Suboptimal control for time-delay linear systems under sinusoidal disturbances [J]. *Control and Decision*, 2004, 19(5): 529 -533.)

[8] TANG G Y, ZHANG B L, MA H. Feedforward and feedback optimal control for linear discrete systems with persistent disturbances [C] // *Proc of the 8th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*. Kunming, China: IEEE Press, 2004: 1658 -1663.

[9] NISHIKAWA Y, SANNOMIYA N, ITAKURA H. A method for suboptimal design of nonlinear feedback systems [J]. *Automatica*, 1971, 7(6): 703 -712.

[10] CHANANE B. Optimal control of nonlinear systems: a recursive approach [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 1998, 35(3): 29 -33.

[11] BEARD R W, SARIDIS G N, WEN J T. Galerkin approximation of the generalized Hamilton-Jacobi-Bellman equation [J]. *Automatica*, 1997, 33(12): 2159 -2177.

[12] RANDAL W B, TIMOTHY W M. Successive Galerkin approximation algorithms for nonlinear optimal and robust control [J]. *Int J of Control*, 1998, 71(5): 717 -743.

[13] AGANOVIC Z, GAJIC Z. The successive approximation procedure for finite-time optimal control of bilinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(9): 1932 -1935.

[14] BANKS S P. Exact boundary controllability and optimal control for a generalized Korteweg de Vries equation [J]. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 2001, 47 (8): 5537 -5546.

[15] TANG G Y. Suboptimal control for nonlinear systems: a successive approximation approach [J]. *System & Control Letters*, 2005, 54(5): 429 -434.

[16] TANG G Y, WANG H H. Successive approximation approach of optimal control for nonlinear discrete-time systems [J]. *Int J of Systems Science*, 2005, 36(3): 153 -161.

[17] TANG G Y, MA H, ZHANG B L. Successive approximation approach of optimal control for bilinear discrete-time systems [J]. *IEE Proc D: Control Theory & Applications*, 2005, 152 (6):636 -644.

[18] LANCASTER P, LERER L, TISMENETSKY M. Factored forms for solutions of AX - XB = C and X - AXB = C in companion matrices [J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 1984, 62: 19 -49.

作者简介:

唐功友 (1953—),男,中国海洋大学信息科学与工程学院教授,博士,博士生导师,主要研究方向为时滞系统、非线性系统及大系统理论与应用等, E-mail: gtang@ ouc. edu. cn;

张宝琳 (1972—),男,中国海洋大学信息科学与工程学院博士学位研究生,主要研究方向为时滞系统、奇异摄动系统以及非线性系统的优化控制,E-mail: zhangbl@ ouc. edu. cn.