第23卷第2期
2006年4月
控制理论与应用
Control Theory & Applications
Vol. 23 No. 2
Apr. 2006

文章编号: 1000-8152(2006)02-0169-06

在逐点状态约束下一个四阶线性系统的时间最优控制

朱尚伟[1], 李训经[2]

(1. 山西财经大学 应用数学系,山西 太原 030006; 2. 复旦大学 数学系,上海 200433)

摘要: 在逐点状态约束下,最优控制问题的求解是很困难的,已有的最大值原理和形态规划理论很难用来求解在逐点状态约束下最优控制问题. 本文讨论逐点状态约束下一个四阶线性系统的时间最优控制问题. 我们采用转换的方法给出了最优时间与最优控制的具体表达式.

关键词: 逐点状态约束; 时间最优控制; 最优轨线

中图分类号: O231, O232　　**文献标识码**: A

Time optimal control problem for a fourth-order linear system with pointwise state constraints

ZHU Shang-wei[1], LI Xun-jing[2]

(1. Department of Applied Mathematics, Shanxi University of Finance & Economics, Taiyuan Shanxi 030006, China;
2. Department of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: In optimal control field, it is very difficult to find the optimal control for an optimal control problem with point-wise state constraints. There is no effective way to calculate the optimal control for this kind of problem. A time-optimal control problem P_h for a forth-order linear system with point-wise state constraints and terminal constraints is considered in this paper. By transforming problem P_h into a time-fixed problem R_T with the same point-wise constraints and fewer terminal constraints, the solvability of the problem P_h is proved to be equivalent to that of R_T, the relations between the solutions of these two problems are also established. For the problem R_T, its corresponding problem $\hat{R}_T$ without the point-wise state constraints can be solved easily. From the solution of $\hat{R}_T$, the optimal control of problem R_T is then constructed. According to the relation between the solutions of the problem P_h and R_T, the optimal control of P_h is consequently obtained. The main results are the solvability of the problem P_h and its explicit expressions of the optimal time and the optimal control.

Key words: point-wise state constraints; time optimal control; optimal trajectory

1 引言(Introduction)

在最优控制理论中,庞特里雅金最大值原理有着非常重要的地位. 应用最大值原理求一大类线性系统的最优控制[1]已成为熟知的方法. 在许多实际问题中,往往对系统的相轨线有一定的约束. 对于具有轨线约束的最优控制问题,迄今为止已有大量的研究文献[2~8]. 但是,这些结果在实际应用中仍有相当的困难. 首先,当系统的相轨线有约束时,这些结果大都要求最优轨线对于控制集具有一定的正规性[1,8],亦即要求最优轨线位于某个"足够丰富"的轨线族内以便使用适当的变分法,而在实际问题中最优轨线包含某些"孤立段"的情形时有发生. 其次,有些结果大都要求容许轨线的能达集满足某种形式的有限余维数假设[3,6,7],这些假设在研究具体系统时往往难以验证. 而且,从这些结果给出的必要条件出发寻求最优轨线或最优控制的"嫌疑集"往往非常困难甚至不可能,更谈不上验证"嫌疑轨线"的最优性.

本文研究线性系统

$$\begin{cases}\dot{Y}(t) = AY(t) + Bu(t),\ \text{a. e. } t \in (0,t_u),\\ Y(0) = 0.\end{cases} \tag{1}$$

在逐点状态约束

$$g(Y(t)) \leqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant t_u \tag{2}$$

收稿日期: 2005-02-01; 收修改稿日期: 2005-11-04.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(101310310,10171059).

之下最快到达指定状态 Y_h 的时间最优控制问题,称之为问题 P_h. 其中

$$\begin{cases} Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},\ Y_h = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ g(Y) = y_3^2 - 1, \\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} V = [-1,1], \\ \mathscr{U}(T) = \{\boldsymbol{u} = u(\cdot) \mid u(\cdot):(0,T) \to V \text{可测}\}, \\ \mathscr{U} = \bigcup\limits_{T>0} \mathscr{U}(T), \end{cases} \tag{4}$$

$$t_u = \sup\{T \mid \boldsymbol{u} \in \mathscr{U}(T)\},\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathscr{U}. \tag{5}$$

其中 $\mathscr{U}$ 中几乎处处相等的函数视为同一函数.

对于带有逐点状态约束的有限维系统的最优控制问题,文献[1]给出了最大值原理(参见文献[1]定理6.25). 但是,该原理不能用于求解问题 P_h. 首先,约束最大值原理只适用于最优轨线只有有限个接合点的情形,而问题 P_h 的最优轨线是否只有有限个接合点尚不得而知;其次,约束最大值原理要求最优轨线的边界段具有正规性,即

$$\frac{\partial p(Y,u)}{\partial u} \neq 0$$

(这里 $p(Y,u) = <\dfrac{\partial g(Y)}{\partial Y}, AY+Bu>$)在其边界段上处处成立;而当问题 P_h 的容许轨线的某段位于边界 $g(Y)=0$ 上时,由于

$$p(Y,u) = <\frac{\partial g(Y)}{\partial Y}, AY+Bu> = 2y_3y_4$$

不直接依赖于 u,从而

$$\frac{\partial p(Y,u)}{\partial u} \equiv 0,$$

即该段轨线上的每点关于控制域 $V=[-1,1]$ 中的任一点都是非正规的,故不满足约束最大值原理所要求的正规性条件.

本文用转换的方法证明问题 P_h 的可解性,并给出其显式解. 首先将该问题转化为在同样的逐点状态约束条件下终端时间固定的最大路程问题 Q_T,然后进一步将后者转化为终端约束更简单的同类问题 R_T. 求出问题 R_T 的唯一解之后,根据诸问题间的对应关系依次求解问题 Q_T 与问题 P_h.

2 问题 P_h 的转化(Transformation of the problem P_h)

令 $x(t) = y_1(t)$,则系统(1)可写成

$$\begin{cases} x^{(4)}(t) = u(t),\ \text{a.e. } t \in (0,t_u), \\ x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = x^{(3)}(0) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

显然,对于任意的 $\boldsymbol{u} = u(\cdot) \in \mathscr{U}$, 系统(6)有唯一解

$$x_u(t) = \frac{1}{6}\int_0^t (t-s)^3 u(s)\mathrm{d}s,\ t \in [0,t_u]. \tag{7}$$

称 $x_u(\cdot)$ 为控制 $\boldsymbol{u}$ 确定的轨线. 状态约束(2)与终端约束 $Y(t_u) = Y_h$ 可分别写成

$$|\ddot{x}_u(t)| \leqslant 1,\ t \in [0,t_u], \tag{8}$$

$$x_u(t_u) = h,\ x_u^{(k)}(t_u) = 0,\ k = 1,2,3. \tag{9}$$

对于任意的 $h>0, T>0$,记

$\mathscr{U}_{ad}(h) =$
$\{\boldsymbol{u} \in \mathscr{U} \mid t_u < +\infty$ 且式(8)与式(9)成立$\}$,

$\tilde{\mathscr{U}}_{ad}(T) =$
$\{\boldsymbol{u} \in \mathscr{U} \mid t = T$,式(8)成立且 $x_u^{(k)}(T) = 0, k=1,2,3\}$,

$\hat{\mathscr{U}}_{ad}(T) =$
$\{\boldsymbol{u} \in \mathscr{U} \mid t_u = T$,式(8)成立且 $\ddot{x}_u(T) = 0\}$,

则问题 P_h 可表述为

问题 P_h 给定 $h>0$,寻求 $\bar{\boldsymbol{u}} \in \mathscr{U}_{ad}(h)$,使得

$$t_{\bar{u}} = \bar{T}(h) \xlongequal{\text{def}} \inf_{u \in \mathscr{U}_{ad}(h)} t_u. \tag{10}$$

当这样的 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 存在时,称其为问题 P_h 的最优控制,相应的 $\bar{x}(\cdot) = x_{\bar{u}}(\cdot)$ 称为问题 P_h 的最优轨线. $\mathscr{U}_{ad}(h)$ 中的函数 $\boldsymbol{u}$ 与相应的 $x_u(\cdot)$ 分别称为问题 P_h 的容许控制与容许轨线.

为了求解问题 P_h,引入以下几个具有逐点状态约束(8)的最优控制问题:

问题 Q_T 给定 $T>0$,寻求 $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \tilde{\mathscr{U}}_{ad}(T)$,使得

$$x_{\tilde{u}}(T) = \bar{s}(T) \xlongequal{\text{def}} \sup_{u \in \tilde{\mathscr{U}}_{ad}(T)} x_u(T). \tag{11}$$

问题 R_T 给定 $T>0$,寻求 $\hat{\boldsymbol{u}} \in \hat{\mathscr{U}}_{ad}(T)$,使得

$$x_{\hat{u}}(T) = \bar{r}(T) \xlongequal{\text{def}} \sup_{u \in \hat{\mathscr{U}}_{ad}(T)} x_u(T).$$

根据运动学常识知道:在相同的条件下,"以最短时间走完规定路程"与"在限定时间内走得最远"是描述同一概念"最快"的两种不同方式. 基于这一思想,首先给出"最短时间问题"P_h 与"最大路程问题"Q_T 的下述联系.

引理 1 若问题 Q_T 对于任意的 $T>0$ 可解,且其最优值 $\bar{s}(T)$ 是 $T \in (0,\infty)$ 的严格单增连续函

数,并满足

$$\lim_{T\to 0+}\bar{s}(T) = 0,\ \lim_{T\to+\infty}\bar{s}(T) = +\infty, \quad (12)$$

则问题P_h对于任意的$h>0$可解,其最优值$\bar{T}(h)$满足

$$\bar{s}(\bar{T}(h)) = h, \quad (13)$$

且问题P_h与问题$Q_{\bar{T}(h)}$有相同的解.

证　对于任意的$h>0$,由$\bar{s}(T)$的单调连续性及式(12)可知,有唯一的$\hat{T}_h>0$使得

$$\bar{s}(\hat{T}_h) = h.$$

设$\tilde{\boldsymbol{u}} = \tilde{u}(\cdot)$为问题$Q_{\hat{T}_h}$的解,并记$\tilde{x}(\cdot) = x_{\tilde{u}}(\cdot)$.由$\tilde{\boldsymbol{u}}\in\hat{\mathscr{U}}_{ad}(\hat{T}_h)$及$\tilde{x}(\hat{T}_h) = h$可知$\tilde{\boldsymbol{u}}\in\mathscr{U}_{ad}(h)$.故只要证明$\bar{T}(h) = \hat{T}_h$,则式(13)成立,且$\tilde{\boldsymbol{u}}$也是问题$P_h$的解.

由$\tilde{\boldsymbol{u}}\in\mathscr{U}_{ad}(h)$立即得知$\bar{T}(h)\leqslant t_{\tilde{u}} = \hat{T}_h$.若$\bar{T}(h)<\hat{T}_h$,则存在$\boldsymbol{u} = u(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}(h)$使得$t_u = T\in[\bar{T}(h),\hat{T}_h)$.记$\hat{t} = \hat{T}_h - T$,设问题$Q_{\hat{t}}$的解为$\boldsymbol{v} = v(\cdot)$,取

$$\hat{v}(t) = \begin{cases} u(t), & \text{a.e. } t\in(0,T), \\ u(t-T), & \text{a.e. } t\in(T,\hat{T}_h). \end{cases}$$

容易验证$\hat{\boldsymbol{v}} = \hat{v}(\cdot)\in\hat{\mathscr{U}}_{ad}(\hat{T}_h)$及

$$x_{\hat{v}}(\hat{T}_h) = h + x_v(\hat{t}) = \bar{s}(\hat{T}_h) + \bar{s}(\hat{t}) > \bar{s}(\hat{T}_h).$$

这显然与$\bar{s}(\hat{T}_h)$的定义矛盾.从而$\bar{T}(h) = \hat{T}_h$成立.

最后,若$\boldsymbol{u} = u(\cdot)$为问题$P_h$的解,则$t_u = \bar{T}(h)$.从而$u(\cdot)\in\hat{\mathscr{U}}_{ad}(\bar{T}(h))$,且由式(13)可知

$$x_u(\bar{T}(h)) = h = \bar{s}(\bar{T}(h)).$$

故$\boldsymbol{u}$也是问题$Q_{\bar{T}(h)}$的解.

问题Q_{2T}与问题R_T有下述对应关系:

引理2　对于任意的$T>0$,恒有

$$\bar{s}(2T) = 2\bar{r}(T), \quad (14)$$

且问题Q_{2T}有解等价于问题R_T有解.

证　对于任意的$\boldsymbol{u} = u(\cdot)\in\hat{\mathscr{U}}_{ad}(2T)$,令

$$(G\boldsymbol{u})(t) = \frac{1}{2}[u(t) - u(2T-t)],\ \text{a.e. } t\in(0,T). \quad (15)$$

显然$\boldsymbol{v} = (G\boldsymbol{u})(\cdot)\in\mathscr{U}$且$t_v = T$.由式(7)及Taylor公式容易得到

$$x_v(t) = \frac{1}{2}[x_u(2T) + x_u(t) - x_u(2T-t)],\ 0\leqslant t\leqslant T. \quad (16)$$

由此可得$\boldsymbol{v}\in\hat{\mathscr{U}}_{ad}(T)$.另一方面,对任意的$v(\cdot)\in\hat{\mathscr{U}}_{ad}(T)$,取

$$u(t) = \begin{cases} v(t), & \text{a.e. } t\in(0,T), \\ -v(2T-t), & \text{a.e. } t\in(T,2T), \end{cases} \quad (17)$$

则由式(7)、Taylor公式及式(15)容易验证$\boldsymbol{u} = u(\cdot)\in\hat{\mathscr{U}}_{ad}(2T)$且$(G\boldsymbol{u})(\cdot) = v(\cdot)$.故式(15)定义的$\boldsymbol{u}\mapsto G\boldsymbol{u}$是$\hat{\mathscr{U}}_{ad}(2T)\to\hat{\mathscr{U}}_{ad}(T)$的满映射.且由式(16)可得

$$x_u(2T) = 2x_{Gu}(T),\ \forall u\in\hat{\mathscr{U}}_{ad}(2T). \quad (18)$$

由此式及G的满射性立即得到式(14).

最后,证明问题Q_{2T}与问题R_T的可解性等价.事实上,若$\bar{\boldsymbol{u}}$为问题Q_{2T}的解,则由$G\bar{\boldsymbol{u}}\in\hat{\mathscr{U}}_{ad}(T)$、式(18)及式(14)可得

$$x_{G\bar{u}}(T) = \frac{1}{2}x_{\bar{u}}(2T) = \frac{1}{2}\bar{s}(2T) = \bar{r}(T).$$

从而,$(G\bar{u})(\cdot)$为问题R_T的解;同理,若$\boldsymbol{v}$为问题R_T的解,则由式(17)定义的$u(\cdot)$为问题Q_{2T}的解.

3　问题R_T的求解(Solving the problem R_T)

对于任意的$\boldsymbol{u} = u(\cdot)\in\mathscr{U}(T)$,由式(7)及Taylor公式可得

$$\begin{cases} \ddot{x}_u(t) = \int_0^t (t-s)u(s)\,\mathrm{d}s, \\ |\ddot{x}_u(t)|\leqslant\int_0^t (t-s)\,\mathrm{d}s = \dfrac{t^2}{2}, \\ \forall 0\leqslant t\leqslant T. \end{cases} \quad (19)$$

故当T较小时,系统(6)的任一轨线均满足式(8).从而,只满足终端条件$\ddot{x}_u(T) = 0$且使$x_u(T)$最大的$\boldsymbol{u}$必然也是问题R_T的解.即只要求解下述问题即可.

问题$\hat{R}_T$　给定$T>0$,寻求$\hat{\boldsymbol{v}}\in\mathscr{U}(T)$,使得

$$x_{\hat{v}}(T) = \hat{r}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{x_u(T)\mid \boldsymbol{u}\in\mathscr{U}(T), \ddot{x}_u(T) = 0\}.$$

由于问题$\hat{R}_T$是只有端点约束而没有逐点约束的最优控制问题,可以用经典的最大值原理(见文献[1]定理2.6或文献[7]定理4.1.3)求出其解如下,具体求解过程从略(用经典的最大值原理只可求得问题R_T"可能的最优控制"$\hat{v}(t)$,尚需验证该$\hat{v}(t)$确为最优控制).

引理3　对于任意的$T>0$,问题$\hat{R}_T$恒有唯一解

$$\hat{v}(t) = \begin{cases} 1, & 0<t<(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})T, \\ -1, & (1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})T<t<T, \end{cases} \quad (20)$$

其最优值为

$$\hat{r}(T) = \frac{T^4}{48}. \quad (21)$$

对于由式(20)定义的 $\hat{v}=\hat{v}(\cdot)$，根据式(19)容易求得 $|\ddot{x}_{\hat{v}}(\cdot)|$ 的最大值为 $(\frac{3}{2}-\sqrt{2})T^2$. 故由引理3及

$$(\frac{3}{2}-\sqrt{2})T^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow T \leqslant 2+\sqrt{2}$$

立即得到

推论 当 $0<T\leqslant 2+\sqrt{2}$ 时，由式(20)给出的 $\hat{v}(\cdot)$ 也是问题 R_T 的解.

当 $T>2+\sqrt{2}$ 时，估计问题 R_T 的最优轨线含有"边界段". 考虑到其"内部段"与"边界段"应充分光滑地衔接，而在边界段上 $\ddot{x}\equiv\pm 1$ 从而 $x^{(3)}\equiv 0$，故以下述的思想构造问题 R_T 的最优轨线：将由式(20)及 $t_0^2=(\frac{3}{2}-\sqrt{2})T^2=1$ 确定的轨线 $2t_0$ 点处(该点处函数 $|\ddot{x}_{\hat{v}}(\cdot)|$ 达到其最大值1)分割为左右两段，在其中插入由 $\ddot{x}\equiv\pm 1$ 确定的一段轨线，在接合点处适当选取初值使得3段轨线恰好衔接. 然后证明如此构造的轨线确是问题 R_T 的最优轨线.

定理1 对于任意的 $T>0$，问题 R_T 恒有唯一解 $\hat{\boldsymbol{u}}=\hat{u}(\cdot)$. 当 $0<T\leqslant 2+\sqrt{2}$ 时，$\hat{u}(\cdot)=\hat{v}(\cdot)$ 由式(20)给出；当 $T>2+\sqrt{2}$ 时，

$$\hat{u}(t)=\begin{cases}1, & t\in(0,1),\\ -1, & t\in(1,2)\cup(t_1,T),\\ 0, & t\in(2,t_1).\end{cases} \tag{22}$$

其中 $t_1=T-\sqrt{2}$. 其最优值为

$$\bar{r}(T)=\begin{cases}\dfrac{T^4}{48}, & 0<T\leqslant 2+\sqrt{2},\\ \dfrac{T^2}{2}-T+\dfrac{5}{12}, & T>2+\sqrt{2}.\end{cases} \tag{23}$$

证 由引理3的推论可知，只需证明当 $T>2+\sqrt{2}$ 时结论成立.

首先，显然 $t_{\hat{u}}=T$，且由式(7)(19)及(22)容易求得

$$x_{\hat{u}}(t)=\begin{cases}\dfrac{t^4}{24}, & t\in[0,1],\\ \dfrac{1}{12}+\dfrac{(t-1)^2}{2}-\dfrac{(t-2)^4}{24}, & t\in(1,2],\\ \dfrac{1}{12}+\dfrac{(t-1)^2}{2}, & t\in(2,t_1],\\ \dfrac{1}{12}+\dfrac{(t-1)^2}{2}-\dfrac{(t-t_1)^4}{24}, & t\in(t_1,T],\end{cases}$$

$$\ddot{x}_{\hat{u}}(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2}{2}, & t\in[0,1],\\ 1-\dfrac{(t-2)^2}{2}, & t\in(1,2],\\ 1, & t\in(2,t_1],\\ 1-\dfrac{(t-t_1)^2}{2}, & t\in(t_1,T].\end{cases}$$

由此容易验证

$$\forall t\in[0,T],\ 0\leqslant\ddot{x}_{\hat{u}}(t)\leqslant 1,\ \ddot{x}_{\hat{u}}(T)=0,$$

$$x_{\hat{u}}(T)=\frac{T^2}{2}-T+\frac{5}{12},$$

即由式(22)定义的 $\hat{\boldsymbol{u}}\in\mathscr{U}_{ad}(T)$.

其次，对任意的 $\boldsymbol{u}=u(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}(T)$，记 $y(t)=\ddot{x}_u(t)-\ddot{x}_{\hat{u}}(t)$，则

$$\ddot{y}(t)=u(t)-\hat{u}(t),\ \text{a.e. } t\in(0,T),$$
$$y(0)=\dot{y}(0)=y(T)=0,$$
$$y(2)=\ddot{x}_u(2)-1\leqslant 0.$$

当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，

$$y(t)=\int_0^t(t-s)[u(s)-1]\mathrm{d}s\leqslant 0. \tag{24}$$

当 $2\leqslant t\leqslant t_1$ 时，式(24)显然成立. 若有 $t_0\in(1,2)$ 使得 $y(t_0)>0$，则由Langrange中值定理，存在 $\xi\in(1,t_0)$ 及 $\eta\in(t_0,2)$ 使得

$$\dot{y}(\xi)=\frac{y(t_0)-y(1)}{t_0-1}>0,$$

$$\dot{y}(\eta)=\frac{y(2)-y(t_0)}{2-t_0}<0,$$

$$\dot{y}(\eta)-\dot{y}(\xi)<0.$$

另一方面，

$$\ddot{y}(t)=u(t)-\hat{u}(t)=u(t)+1\geqslant 0,$$
$$\text{a.e. } t\in(1,2),$$

从而

$$\dot{y}(\eta)-\dot{y}(\xi)=\int_\xi^\mu\ddot{y}(t)\mathrm{d}t\geqslant 0.$$

上述矛盾说明式(24)对 $t\in(1,2)$ 成立. 同理可证式(24)对 $t\in(t_1,T]$ 成立，故对 $t\in[0,T]$ 成立. 由此可得

$$x_u(t)-x_{\hat{u}}(t)=\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s\leqslant 0,$$

$$(\forall u(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}(T),\forall t\in[0,T]).$$

从而 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 是问题 R_T 的解，且式(23)成立.

最后，证明解的唯一性. 当 $0<T\leqslant 2+\sqrt{2}$ 时，由引理3知唯一性成立. 当 $T>2+\sqrt{2}$ 时，若 $\boldsymbol{u}=u(\cdot)$ 也是问题 R_T 的解，则

$$\int_0^T (T-s)[\ddot{x}_u(s) - \ddot{x}_{\hat{u}}(s)]\mathrm{d}s = x_u(T) - x_{\hat{u}}(T) = 0.$$

注意到式(24)，则得到

$$\ddot{x}_u(s) - \ddot{x}_{\hat{u}}(s) = 0,\ \text{a. e. } s \in (0,T).$$

又由其连续得知上式对 $s \in [0,T]$ 逐点成立，从而

$$u(s) - \hat{u}(s) = x_u^{(4)}(s) - x_{\hat{u}}^{(4)}(s) = 0,\ \text{a. e. } s \in (0,T).$$

唯一性得证．

4 问题 P_h 的求解（Solving the problem P_h）

根据引理2及定理1，首先给出问题 Q_T 的解．

定理2　对于任意的 $T>0$，问题 Q_T 恒有唯一解 $\tilde{\boldsymbol{u}} = \tilde{u}(\cdot)$．当 $0 < T \leqslant 4+2\sqrt{2}$ 时，

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, \frac{(2-\sqrt{2})T}{4}) \cup (\frac{T}{2}, \frac{(2+\sqrt{2})T}{4}), \\ -1, & t \in (\frac{(2-\sqrt{2})T}{4}, \frac{T}{2}) \cup (\frac{(2+\sqrt{2})T}{4}, T); \end{cases} \tag{25}$$

当 $T > 4+2\sqrt{2}$ 时，

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0,1) \cup (\frac{T}{2}, t_2) \cup (t_3, t_4), \\ 0, & t \in (2, t_1) \cup (t_2, t_3), \\ -1, & t \in (1,2) \cup (t_1, \frac{T}{2}) \cup (t_4, T). \end{cases} \tag{26}$$

其中

$$t_1 = \frac{T}{2} - \sqrt{2},\ t_2 = \frac{T}{2} + \sqrt{2},\ t_3 = T-2,\ t_4 = T-1.$$

其最优值为

$$\tilde{s}(T) = \begin{cases} \frac{T^4}{3\cdot 2^7}, & 0 < T \leqslant 4+2\sqrt{2}, \\ \frac{T^2}{4} - T + \frac{5}{6}, & T > 4+2\sqrt{2}. \end{cases} \tag{27}$$

证　以 $\hat{\boldsymbol{u}} = \hat{u}(\cdot)$ 记问题 $Q_{T/2}$ 的解，在式(20)与式(22)中以 $T/2$ 取代 T，则易见由式(25)或式(26)定义的 $\tilde{\boldsymbol{u}} = \tilde{u}(\cdot)$ 满足

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \hat{u}(t), & 0 \leqslant t \leqslant T/2, \\ -\hat{u}(T-t), & T/2 < t \leqslant T, \end{cases}$$

$$x_{\tilde{u}}(t) = \begin{cases} x_{\hat{u}}(t), & 0 \leqslant t \leqslant T/2, \\ \tilde{s}(T) - x_{\hat{u}}(T-t), & T/2 < t \leqslant T, \end{cases} \tag{28}$$

由引理2的证明过程可知 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 为问题 Q_T 的解且由式(14)与(23)可立即得到式(27)．

下面证明解的唯一性．若 $\boldsymbol{u} = u(\cdot)$ 也是问题 Q_T 的解，则由式(14)与(18)可知 $G\boldsymbol{u}$ 也是问题 $R_{T/2}$ 的解．由问题 $R_{T/2}$ 解的唯一性知 $G\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}}$，即

$$u(t) - u(T-t) = 2\hat{u}(t) = 2\tilde{u}(t),\ \text{a. e. } t \in (0, \frac{T}{2}).$$

由此式及 $|u(t)| \leqslant 1$（a. e. $t \in (0,T)$）立即得知：在 $\{t \in [0,\frac{T}{2}] \mid \tilde{u}(t) = \pm 1\}$ 的各个区间上

$$u(t) = -u(T-t) = \pm 1 = \tilde{u}(t)$$

几乎处处成立．又由式(16)及(28)可得

$$\forall t \in [0, \frac{T}{2}],$$

$$x_u(t) - x_u(T-t) = 2x_{\tilde{u}}(t) - \tilde{s}(T),$$

$$\ddot{x}_u(t) - \ddot{x}_u(T-t) = 2\ddot{x}_{\tilde{u}}(t).$$

从而在 $\{t \in [0,\frac{T}{2}] \mid \tilde{u}(t) = 0\}$ 的各个区间上，由式(8)及 $\ddot{x}_{\tilde{u}}(t) = \pm 1$ 立即得知

$$\ddot{x}_u(t) = -\ddot{x}_u(T-t) = \pm 1 = \ddot{x}_{\tilde{u}}(t),$$

对此式求导两次则得知

$$u(t) = -u(T-t) = 0 = \tilde{u}(t)$$

几乎处处成立．从而

$$u(t) = -u(T-t) = \tilde{u}(t) \tag{29}$$

在 $[0,\frac{T}{2}]$ 上几乎处处成立．注意到 $\tilde{u}(T-t) = -\tilde{u}(t)$，则立即得知式(29)在 $[\frac{T}{2},T]$ 上从而在 $[0,T]$ 上亦几乎处处成立．唯一性获证．

最后，给出本文的主要结果：

定理3　对于任意的 $h>0$，问题 P_h 恒有唯一解 $\bar{\boldsymbol{u}} = \bar{u}(\cdot)$．当 $0 < h \leqslant \frac{17}{6} + 2\sqrt{2}$ 时，

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, t_1) \cup (\frac{T}{2}, t_2), \\ -1, & t \in (t_1, \frac{T}{2}) \cup (t_2, T); \end{cases} \tag{30}$$

当 $h > \frac{17}{6} + 2\sqrt{2}$ 时，

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0,1) \cup (S_2, S_3) \cup (S_4, S_5), \\ 0, & t \in (2, S_1) \cup (S_3, S_4), \\ -1, & t \in (1,2) \cup (S_1, S_2) \cup (S_5, T). \end{cases} \tag{31}$$

其中

$$t_1 = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4})T,\ t_2 = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4})T,$$

$$S_1 = \frac{T}{2} - \sqrt{2},\ S_2 = \frac{T}{2},\ S_3 = \frac{T}{2} + \sqrt{2},$$

$S_4 = T-2,\ S_5 = T-1,\ T = \bar{T}(h),$

$$\bar{T}(h) = \begin{cases} \sqrt[4]{2^7 \cdot 3 \cdot h}, & 0 < h \leqslant \frac{17}{6} + 2\sqrt{2}, \\ 2 + \sqrt{\frac{2}{3} + 4h}, & h > \frac{17}{6} + 2\sqrt{2}. \end{cases} \tag{32}$$

式(32)是问题 P_h 的最优值.

证 由定理2,问题 Q_T 对于任意的 $T > 0$ 存在唯一解,且由式(27)容易验证 $\bar{s}(T)$ 是 $T \in (0,\infty)$ 的严格单增连续函数,并满足式(12). 由引理1可知,问题 P_h 对于任意的 $h > 0$ 亦恒有唯一解. 联立式(27)与(13)解出 $\bar{T}(h)$,则得到式(32). 由引理1及定理2即知由式(30)或(31)定义的 $\bar{u}$ 是问题的 P_h 唯一解.

参考文献(References):

[1] PONTRYAGIN L S BOLTYANSKII V G, GAMKRELIDZE R V, et al. *Mathematical Theory of Optimal Processes* [M]. New York: Wiley, 1962.

[2] ARADA N, RAYMOND J P. Opitmal control problems with mixed control-state constraints [J]. *SIAM J of Control Optimization*, 2000, 39(5): 1391 - 1407.

[3] HU B, YONG J. Pontryagin maximum principle for semilinear and quasilinear equations with pointwise state constraints [J]. *SIAM J of Control Optimization*, 1995, 33(6): 1857 - 1880.

[4] BONNAS F, CASAS E. An extension of Pontryagin's principle for state-contrained optimal control of semilinear elliptic equation and variational inequalities [J]. *SIAM J of Control Optimization*, 1995, 33(1): 274 - 298.

[5] BERGOUNIOUX M. Optimal control of problems governed by abstract elliptic variational inequalities with state constraints [J]. *SIAM J of Control Optimization*, 1998, 36(1): 273 - 289.

[6] WANG G, WAGN L. State-constrained optimal control governed by non-well-posed parabolic differential equations [J]. *SIAM J of Control Optimization*, 2002, 40(5): 1517 - 1539.

[7] LI X, YONG J. *Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems* [M]. Boston: Birkhäuser, 1995.

[8] HARTL R F, SETHI S P, VICKSON R G. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints [J]. *SIAM Review*, 1995, 37(2): 181 - 218.

作者简介:

朱尚伟 (1956—),男,山西财经大学应用数学系副教授,1992年6月获南开大学计算机与系统科学系运筹学与控制论专业硕士学位,2005年6月获复旦大学数学研究所运筹学与控制论专业博士学位,近年来主要从事最优控制领域中最大值原理、约束最优控制、变分不等式系统最优控制等方向的理论和应用研究, E-mail: fdswzhu@126.com;

$\boxed{\text{李训经}}$ (1935—2002),男,1959年研究生毕业于复旦大学数学系并留校任教,2001年退休,2002年2月病逝,退休前为复旦大学首席教授,博士生导师,是中国分布参数系统最优控制和随机最优控制领域的先驱者之一,他在这两个领域中的多个方面都曾作出过重要贡献,本文研究的问题即是李训经先生去世前提出并指导的.