文章编号: 1000-8152(2006)02-0229-06

有界区域上 Petrowsky 系统的能控性和能稳性

宗西举, 赵 怡, 殷朝阳
(中山大学 数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 利用 D. L. Russel 关于"能稳性导致能控性"的论断,研究 Petrowsky 系统的能控性,首先取线性反馈控制,得到线性反馈 Petrowsky 系统的能量的指数衰减,从而由 D. L. Russel 的"能稳性导致能控性"的论断得到能控性. 其次取非线性反馈控制,得到 Petrowsky 系统的一些能量估计,但是不能得到指数能稳.

关键词: Petrowsky 系统; 能稳性; 能控性; 能稳性导致能控性

中图分类号: O23　　**文献标识码**: A

Controllability and stabilizability of the Petrowsky equation in bounded domain

ZONG Xi-ju, ZHAO Yi, YIN Zhao-yang
(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-Sen University, Guangzhou Guangdong 510275, China)

Abstrcat: Exact controllability problem of the Petrowsky system is studied by using the stabilization method proposed by D. L. Russel. It is shown that if one uses the linear "feedback", then the energy of the system will decay uniformly exponentially and exact controllability can be obtained. However, when the feedback contains certain nonlinear dissipative terms the above conclusion can not be reached.

Key words: Petrowsky system; exact controllability; stabilizability; controllability via stabilizability

1 引言(Introduction)

本文讨论在适当的函数空间中 Petrowsky 系统的控制问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)+\Delta^2u(x,t)=f(x,t),\\(x,t)\in\Omega\times(0,+\infty).\end{cases}\tag{1}$$

这里:Ω 是$\mathbb{R}^N$ 中的有界区域, $f(x,t)$ 是分布参数控制函数.

G. Chen[1] 研究过关于形如$\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)-\Delta u(x,t)=f(x,t)$ 的系统的能控、能稳性问题,作者主要想通过以下几个方面进行研究:

1) 分布参数控制具有反馈模式;

2) 由能稳性能得到能控性.

受文献[1~5]等的启发,本文试图利用能量方法,也从以上两个方面考虑 Petrowsky 系统,得到与文献[2]类似的结果.

首先给出一些有关的定义:

定义 1.1[6] Petrowsky 系统的能控性. 如果给定时间 $T>0$,对一个 Petrowsky 系统,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)+\Delta^2u(x,t)=f(x,t),\\(x,t)\in\Omega\times(0,T),\end{cases}\tag{2}$$

$$\begin{cases}u(x,t)=\Delta u(x,t)=0,\\(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T).\end{cases}\tag{3}$$

对于任意给定的初值,

$$y(x,0)=y^0(x),\ y_t(x,0)=y^1(x),\ x\in\Omega\tag{4}$$

总能找到一个控制

$$f(x,t)\in L^2(\Omega\times(0,T)),$$

使得式(2)~(4)的解满足

$$y(x,T)=y_t(x,T)=0,\ x\in\Omega,\tag{5}$$

则称系统在 T 时刻是精确能控的,简称能控的.

考虑齐次 Petrowsky 系统

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)+\Delta^2u(x,t)=0,\tag{6}$$

可以改写成

收稿日期: 2004-11-15; 收修改稿日期:2005-05-31.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I\\-\Delta^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\triangleq A\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v\\-\Delta^2 u\end{bmatrix}. \quad (7)$$

算子 A 如上定义,并且 $D(A)$ 定义为

$$D(A)=\left\{\begin{aligned}&\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\mid u(x,t)\in H^4(\Omega),\\&u(x,t)=\Delta u(x,t)=0,\\&x\in\partial\Omega,\ v(x)\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega).\end{aligned}\right\}. \quad (8)$$

本文用 Ω 表示 $\mathbb{R}^N$ 中有界的、单连通的开子集,具有足够光滑的边界 $\partial\Omega$; $v(x,t)$ 表示边界上 (x,t) 点处的单位外法向量,用 $H^m(\Omega)(m>0)$ 表示 Sobolev 空间,$H_0^m(\Omega)$ 表示 $C_0^m(\bar{\Omega})$ 在 $H^m(\Omega)$ 中的闭包,$M\triangleq[H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)]\times L^2(\Omega)$, 赋予 M 内积:

$$\left\langle\begin{bmatrix}u_1\\v_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u_2\\v_2\end{bmatrix}\right\rangle_M=\int_\Omega[\Delta u_1\cdot\Delta u_2+v_1\cdot v_2]\mathrm{d}x,$$

可以验证 M 是完备的.

赋予 $D(A)$ 内积:

$$\left\langle\begin{bmatrix}u_1\\v_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u_2\\v_2\end{bmatrix}\right\rangle_{D(A)}=\langle u_1,u_2\rangle_{H^4(\Omega)}+\langle v_1,v_2\rangle_{H^2(\Omega)}.$$

2 应用能稳性得到 Petrowsky 系统的能控性(Controllability of Petrowsky system via stabilizability)

本文的主要思想就是通过能稳得到能控,首先考虑有限维控制系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A_0x+B_0f,\ x\in\mathbb{R}^N,f\in\mathbb{R}^M. \quad (9)$$

其中 A_0,B_0 分别是 $N\times N,N\times M$ 常系数矩阵.

D. L. Russel 的思想可以描述为以下定理:

定理 2.1[12] 如果系统(9) 既是(+) 能稳的,又是(-) 能稳的,即存在两个 $M\times N$ 阶常系数矩阵 K^+ 和 K^- 使得

$$A_0^+=A_0+B_0K^+, \quad (10)$$

$$A_0^-=A_0+B_0K^- \quad (11)$$

分别具有负实部和正实部,那么系统(9)是能控的.

这个定理的主要思想就是利用两个子系统的反馈控制

$$f^+(t)=K^+x^+(t) \quad (12)$$

$$f^-(t)=K^-x^-(t). \quad (13)$$

原系统的控制函数 $f(t)$ 就取为

$$f(t)=f^+(t)+f^-(t), \quad (14)$$

关键是要得到以下两个估计:

$$\|\mathrm{e}^{A^+t}\|\leqslant K_1\mathrm{e}^{-\alpha t},\ t\geqslant0, \quad (15)$$

$$\|\mathrm{e}^{-A^-t}\|\leqslant K_2\mathrm{e}^{\alpha t},\ t\leqslant0. \quad (16)$$

这里 K_1,K_2,α 全是大于0的实数,对于足够大的 t.

类似地可以通过能稳性来得到 Petrowsky 控制系统(2) 的能控性.

令 X 是一个 Banach 空间,考虑无穷维控制系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax+Bf,\ x(0)=x_0\in X.$$

这里:$x=x(t)$ 是系统在 t 时刻的状态,$A:D(A)\to X$ 为一个闭、稠定、线性算子(可能有界可能无界),$f\in C$ 是控制函数,$B:C\to X$(通常) 是有界算子,如果能够找到两个算子 $K^+:D(K^+)\subseteq X\to C$ 和 $K^-:D(K^-)\subseteq X\to C$ 使得

1) $D(K^+)\supseteq D(A)$, $D(K^-)\supseteq D(A)$;

2) A^+A+BK^+ 和 $A^-=A+BK^-$ 生成的强连续半群 $S^+(t)$ 和 $S^-(t)$ 满足

$$\|S^+(t)\|\leqslant M_1\mathrm{e}^{-\omega_1 t},\ M_1,\ \omega_1\geqslant0,\ t\geqslant0, \quad (17)$$

$$\|S^-(t)\|\leqslant M_2\mathrm{e}^{\omega_2 t},\ M_2,\ \omega_2\geqslant0,\ t\leqslant0. \quad (18)$$

考虑 Petrowsky 系统

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)+\Delta^2u(x,t)+\beta(x)\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)=0,\\(x,t)\in\Omega\times(0,+\infty)\end{cases} \quad (19)$$

给定的边值条件

$$u(x,t)=\Delta u(x,t)=0,\ (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \quad (20)$$

对于任意给定的初值

$$u(x,0)=u^0(x),\ v(x,t)=u_t(x,0)=v^0(x),\ x\in\Omega, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix}u^0\\v^0\end{bmatrix}\in M\triangleq[H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)]\times L^2(\Omega), \quad (22)$$

$$\beta(x)\geqslant\beta_0>0,\text{几乎处处于 }\Omega\text{ 上},\beta(x)\in L^\infty(\Omega). \quad (23)$$

系统(11)~(23)可以改写成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I\\-\Delta^2 & -\beta(x)I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\triangleq$$

$$\tilde{A}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v\\-\Delta^2u-\beta(x)v\end{bmatrix}. \quad (24)$$

算子 $\tilde{A}$ 如上定义,且记 $D(\tilde{A})\triangleq M$.

那么由算子半群理论可知 $\tilde{A}$ 具有以下性质:

定理 2.2

a) $\tilde{A}$ 是 M 上的线性、闭的、稠定的、耗散算子;

b) $(\tilde{A})^{-1}$ 存在,是 M 上的紧算子,而且对每一个 $\lambda(\lambda\in\rho(\tilde{A}))$,$(\lambda I-\tilde{A})^{-1}$ 是紧的;

c) $\tilde{A}$ 是一个定义在 M 上的强连续半群的无穷小生成元.

证　任意 $\gamma > 0$ 的,不妨设 $\beta(x) \equiv \gamma > 0$.

a) 依 $\tilde{A}$ 的定义知,$\tilde{A}$ 是 M 上的线性、闭的、稠定的算子,下证耗散性. 令 $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in D(A) \subset M$,

$$\left\langle \tilde{A}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_M = \left\langle \begin{bmatrix} v \\ -\Delta^2 u - \gamma v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_M =$$

$$\int_\Omega [\Delta v \cdot \Delta u + (-\Delta^2 u - \gamma v) \cdot v] \mathrm{d}x =$$

$$\int_\Omega (\Delta^2 u) v \mathrm{d}x - \int_\Omega (\Delta^2 u) v \mathrm{d}x - \int_\Omega \gamma v^2 \mathrm{d}x =$$

$$-\int_\Omega \gamma v^2 \mathrm{d}x \leqslant 0. \tag{25}$$

b) 令 $\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \in M$,则方程

$$\tilde{A}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \tag{26}$$

是可解的.

令 $v = h$, $-\Delta^2 u - \gamma v = g$, 即

$-\Delta^2 u = g + \gamma h$, $u(x,t)|_{\partial\Omega} = \Delta u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0$.

由椭圆方程解的存在唯一性定理和正则性理论[7,8]可能得到:上非齐次边值问题有唯一解

$$u \in [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)] \times L^2(\Omega),$$

而且

$$\| u \|_{H^4(\Omega)} \leqslant C_1 \| \gamma h + g \|_{L^2(\Omega)},$$

因此方程(26)是可解的,并且有估计

$$\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{D(A)} \leqslant C_2 \left\| \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \right\|_M,$$

所以 A 在 M 中是紧的,则$(\tilde{A})^{-1}$ 存在,且是 M 上的紧算子.

由边值理论,知道对每一个 $\lambda(\lambda \in \rho(\tilde{A}))$, $(\lambda I - \tilde{A})^{-1}$ 是紧的.

c) 由 a),b)和 Lumer-Phillips 定理[9]得证.

最后由于$\gamma > 0$ 的任意性,得到对$\beta(x) \geqslant \beta_0 > 0$ 定理中是成立的.

再由解析半群理论,可以得到

定理 2.3[10]　Cauchy 问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u(\cdot,t) \\ v(\cdot,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Delta^2 & -\beta(x)I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(\cdot,t) \\ v(\cdot,t) \end{bmatrix} =$$

$$\tilde{A}\begin{bmatrix} u(\cdot,t) \\ v(\cdot,t) \end{bmatrix} \tag{27}$$

有唯一解

$$\begin{bmatrix} u(\cdot,t) \\ v(\cdot,t) \end{bmatrix} = S(t)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

基于能量方法,由以下定理知道强连续半群 $S(t)$ 是指数衰减的.

定理 2.4　令 $u(x,t)$ 是 Petrowsky 系统

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + \Delta^2 u(x,t) + \beta(x)\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) = 0, \\ (x,t) \in \Omega \times (0, +\infty) \end{cases} \tag{29}$$

具有初值条件

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \in M \tag{30}$$

的解,那么存在常数 $C > 0, \gamma > 0$ 使得

$$\left\{\int_\Omega \left[|\Delta u|^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right] \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left\| S(t)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_M \leqslant C\mathrm{e}^{-\gamma t}\left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|. \tag{31}$$

证　首先考虑所有的$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \in D(A) = M$. 在方程(29)两端乘以$\frac{\partial u}{\partial t}$,然后分部积分得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int_\Omega \left[|\Delta u|^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right] \mathrm{d}x \right\} +$$

$$\int_\Omega \beta(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x = 0. \tag{32}$$

再用 λu 去乘方程,分部积分得到

$$\lambda\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left(u\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x + \right.$$

$$\left.\int_\Omega |\Delta u|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \beta(x)u^2 \mathrm{d}x \right\} = 0. \tag{33}$$

由式(32)和(33)得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left[2\lambda\left(u\frac{\partial u}{\partial t}\right) + |\Delta u|^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \lambda\beta(x)u^2 \right] \mathrm{d}x +$$

$$\int_\Omega \lambda |\Delta u|^2 + \beta(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x = 0. \tag{34}$$

令

$$F(t) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left[2\lambda\left(u\frac{\partial u}{\partial t}\right) + |\Delta u|^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \lambda\beta(x)u^2 \right] \mathrm{d}x,$$

$$G(t) = \int_\Omega \lambda |\Delta u|^2 + \beta(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x,$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) + G(t) = 0. \tag{35}$$

由 Poincare 不等式[11],存在一个常数 $C_1 > 0$ 使得

$$\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x \leqslant C_1 \int_\Omega |\Delta u|^2 \mathrm{d}x, \ \forall u \in H_0^2(\Omega). \tag{36}$$

由式(23)知道,存在$0 < C_2 < \infty$, $\|\beta(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_2 < \infty$.

取$0 < \lambda < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2(C_1 + C_1 C_2)}\right\}$由 Cauchy-Schartz 不等式[11] 可以得到

$$\frac{1}{4}\int_\Omega\left[|\Delta u|^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\mathrm{d}x \leqslant$$

$$F(t) \leqslant \int_\Omega\left[|\Delta u|^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\mathrm{d}x. \tag{37}$$

另一方面,取$0 < \lambda < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\beta_0, \frac{1}{2(C_1 + C_1 C_2)}\right\}$,得到

$$G(t) \geqslant \int_\Omega\left[\lambda|\Delta u|^2 + \frac{1}{2}\beta_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\mathrm{d}x \geqslant$$

$$\lambda\int_\Omega\left[|\Delta u|^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\mathrm{d}x = \lambda F(t), \tag{38}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) + \lambda F(t) \leqslant \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) + G(t) = 0. \tag{39}$$

由 Gronwall 不等式[11]得到

$$F(t) \leqslant F(0)\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

因此

$$\int_\Omega\left[|\Delta u|^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\mathrm{d}x \leqslant 4F(t) \leqslant$$

$$4F(0)\mathrm{e}^{-\lambda t} \leqslant 4\mathrm{e}^{-\lambda t}\left\|\begin{bmatrix}u_0\\ v_0\end{bmatrix}\right\|_M^2. \tag{40}$$

注 如果$\beta(x)$不具有式(23)这个性质,得不到式(40).

由 D. L. Russel 的"由能稳性能够得到能控性"的论断,可以得到

定理 2.5 对于控制问题(2)~(4)总能找到一个控制$f(x,t) \in L^2(\Omega\times(0,T))$使得系统(2)~(4)的解在$T$时刻满足式(5)即由能稳性得到系统(2)~(4)是精确能控的.

证 类似文献[1],略.

3 对于非线性反馈情况(Case when the feedback control contains nonlinear terms)

考虑具有$f(x,t) = -\sum_{i=1}^N\beta_i\left(\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right)^{2i-1}$($N$是任意自然数)的非线性反馈控制的 Petrowsky 系统

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t^2}u(x,t) + \Delta^2 u(x,t) + \sum_{i=1}^N\beta_i\left(\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right)^{2i-1} = 0,\\ \beta_i > 0\end{cases} \tag{41}$$

给定的边值条件

$$u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega\times(0,T), \tag{42}$$

对于任意给定的初值

$$u(x,0) = u^0(x),\ v(x,t) = u_t(x,0) = v^0(x),\ x \in \Omega, \tag{43}$$

$$\begin{bmatrix}u^0\\ v^0\end{bmatrix} \in M \triangleq [H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)]\times L^2(\Omega), \tag{44}$$

系统(19)~(23)可以改写成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v\\ -\Delta^2 u - \sum_{i=1}^N\beta_i v^{2i-1}\end{bmatrix} = \tilde{A}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}. \tag{45}$$

算子$\tilde{A}$如上定义,并且$D(\tilde{A}) = M$.

定理 3.1[12] $\tilde{A}$是M上的非线性、闭的、稠定的,最大耗散的算子.

证 1) $\tilde{A}$是M上的线性、闭的、稠定的算子,下证耗散性.

令

$$\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix} \in M,$$

$$\left\langle\tilde{A}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\right\rangle_M =$$

$$\left\langle\begin{bmatrix}v\\ -\Delta^2 u - \sum_{i=1}^N\beta_i v^{2i-1}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\right\rangle_M =$$

$$\int_\Omega[\Delta v\cdot\Delta u + (-\Delta^2 u - \sum_{i=1}^N\beta_i v^{2i-1})\cdot v]\mathrm{d}x =$$

$$\int_\Omega(\Delta^2 u)v\mathrm{d}x - \int_\Omega(\Delta^2 u)v\mathrm{d}x - \int_\Omega\sum_{i=1}^N\beta_i v^{2i}\mathrm{d}x =$$

$$-\int_\Omega\sum_{i=1}^N\beta_i v^{2i}\mathrm{d}x \leqslant 0. \tag{46}$$

为了证明$\tilde{A}$是最大耗散的,利用 Minty 定理只要证明$R(I-\tilde{A}) = M$. 为此,令$\begin{bmatrix}h\\ g\end{bmatrix} \in M$,则方程

$$(I-\tilde{A})\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}g\\ h\end{bmatrix} \tag{47}$$

是可解的.

事实上,令$u - v = h$, $-\Delta^2 u - \sum_{i=1}^N\beta_i v^{2i-1} = g$,即

$$\begin{aligned}&-\Delta^2 v - \sum_{i=1}^N\beta_i v^{2i-1} = g + \Delta^2 h,\\ &u(x,t)|_{\partial\Omega} = \Delta u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0.\end{aligned} \tag{48}$$

式(48)只是关于v的椭圆方程,令

$$T(v) = -\Delta^2 v - \sum_{i=1}^{N}\beta_i v^{2i-1}.$$

有以下几个定理:

定理 3.2[12]　1) 算子 $T:H_0^1(\Omega)\to H^{-2}(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 是严格单调的;

2) 算子 T 是连续的,因此是 hemi- 连续的;

3) 算子 T 是强制的.

定理 3.3[12]　E 是自反的 Banach 空间,如果 T 是 $E\to E'$ 上的 hemi- 连续的、强制的算子,那么 T 满射. 又由于 T 是严格单调的,所以 T 是单射,所以 T^{-1} 存在, 因此式(48) 存在唯一的解.

再根据

定理 3.4[12]　非线性算子 T 生成一个非线性压缩半群 $S(t)$.

再次利用能量方法;

令 $u(x,t)$ 是非线性 Petrowsky 系统

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + \Delta^2 U(x,t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\beta_i\left(\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right)^{2i-1} = 0,\\ \beta_i > 0\end{cases} \tag{49}$$

具有初值条件

$$\begin{bmatrix}u_0\\ v_0\end{bmatrix}\in M \tag{50}$$

的解,那么存在常数 $C>0,\alpha>0$ 使得

$$\left\|\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\right\|_M^2 \leqslant C\left\{e^{-\alpha t}\left\|\begin{bmatrix}u_0\\ v_0\end{bmatrix}\right\|_M^2 + \int_0^t\int_\Omega \exp\alpha(\tau - t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{4i-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\tau\right\}, \tag{51}$$

$$\left\|\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\right\|_M^2 \leqslant C\left\{e^{-\alpha t}\left\|\begin{bmatrix}u_0\\ v_0\end{bmatrix}\right\|_M^2 + \int_0^t\int_\Omega \exp\alpha(\tau - t)u^4\mathrm{d}x\mathrm{d}t\tau\right\}, \tag{52}$$

$$\left\|\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\right\|_M^2 \leqslant C\left\{e^{-\alpha t}\left\|\begin{bmatrix}u_0\\ v_0\end{bmatrix}\right\|_M^2 + \left\|\begin{bmatrix}u_0\\ v_0\end{bmatrix}\right\|_M^4\frac{1}{\alpha}(1-\exp(-\alpha t))\right\}, \tag{53}$$

证　首先考虑所有的 $\begin{bmatrix}u_0\\ v_0\end{bmatrix}\in D(A)$. 在方程(49) 两端乘以 $\dfrac{\partial u}{\partial t}+\lambda u$,然后分部积分得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left[2\lambda\left(u\frac{\partial u}{\partial t}\right) + |\Delta u|^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \lambda\beta_1 u^2\right]\mathrm{d}x + \int_\Omega\left\{\lambda|\Delta u|^2 - \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{2i} + \lambda\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{2i-1}u\right\}\mathrm{d}x = 0. \tag{54}$$

令

$$P(t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left[2\lambda\left(u\frac{\partial u}{\partial t}\right) + |\Delta u|^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \lambda\beta_1 u^2\right]\mathrm{d}x,$$

$$Q(t) = \int_\Omega\left\{\lambda|\Delta u|^2 - \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \lambda\sum_{i=2}^{n}\beta_i\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{2i-1}u\right\}\mathrm{d}x,$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t) + Q(t) = 0. \tag{55}$$

由 Poincarè 不等式[11],存在一个常数 $M_1>0$ 使得

$$\int_\Omega u^2\mathrm{d}x \leqslant M_1\int_\Omega|\Delta u|^2\mathrm{d}x,\ \forall u\in H_0^2(\Omega). \tag{56}$$

取 $0<\lambda<\min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2(M_1+M_1M_2)}\right\}$,由 Cauchy-Schartz 不等式[11] 可以得到

$$\frac{1}{4}\int_\Omega\left[|\Delta u|^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\mathrm{d}x \leqslant P(t) \leqslant \int_\Omega\left[|\Delta u|^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\mathrm{d}x. \tag{57}$$

另一方面,由 Yang 不等式得到

$$\lambda\sum_{i=2}^{n}\beta_i\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{2i-1}u\mathrm{d}x \leqslant \frac{\lambda}{2}\sum_{i=2}^{n}\beta_i\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{4i-2} + u^2\mathrm{d}x = 0. \tag{58}$$

从而得到

$$Q(t) \geqslant \int_\Omega\left\{\lambda|\Delta u|^2 + \sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{2i} - \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{\lambda}{2}\sum_{i=2}^{n}\beta_i\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{4i-2} + u^2\right]\right\}\mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega\left\{\lambda|\Delta u|^2 + \sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{\lambda}{2}\sum_{i=2}^{n}\beta_i\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{4i-2} - \frac{\lambda}{2}M_3|\Delta u|\right\}\mathrm{d}x, \tag{59}$$

因此可以选取 $\delta\left(0<\delta<\dfrac{2}{M}\right)$ 以及 $\lambda(0<\lambda<\beta_1)$ 使得

$$Q(t) \geqslant$$
$$L\int_{\Omega}\left\{|\Delta u|^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\}\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2}\sum_{i=2}^{n}\beta_i\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{4i-2}\mathrm{d}x. \tag{60}$$

其中 $L=\min(\beta_1-\lambda,\ \lambda M_1-\frac{\lambda\sum\limits_{i=2}^{n}\beta i}{2}M_1)$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t)+LP(t)-\frac{\lambda}{2}\sum_{i=2}^{n}\beta_i\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{4i-2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t)+Q(t)=0, \tag{61}$$

因此

$$\left\|\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\right\|_M^2\leqslant$$
$$K\left\{\mathrm{e}^{-\lambda t}\left\|\begin{bmatrix}u_0\\v_0\end{bmatrix}\right\|_M^2+\int_0^t\int_{\Omega}\exp(-\lambda\sum_{i=2}^{n}\beta_i)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{4i-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right\}.$$

如果在式(54)中利用

$$\int_{\Omega}\lambda\sum_{i=2}^{n}\beta_i\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{2i-1}u\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\lambda\sum_{i=2}^{n}\beta_i\left\{\frac{3}{4}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{2i}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x\right\},$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t)+LP(t)-\frac{1}{4}\lambda\sum_{i=2}^{n}\beta_i\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t)+Q(t)=0,$$

则式(52)成立.

最后由 Sobolev 嵌入定理即得式(53).

注 由于非线性项的存在,这里并不能得到能量的指数衰减性,因此关于 D. L. Russel 的"由能稳性能够得到能控性"的论断在此并不能直接推广到非线性情况.

参考文献(References):

[1] CHEN G. Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain [J]. *SIAM J of Control and Optimization*, 1979,17(1):66-81.

[2] Zhuzua E. Exponential decay for the wave equation with locally distubuted pamping [J]. *Communications in Partial Differential Equations*, 1990,15(2):205-235.

[3] Guzman R, Tucsnak L. Energy decay estimates for the damped plate equation with the local degenerated dissipation [J]. *Systems & Control Letters*, 2003, 48(1):191-197.

[4] MACHTYNGIER E. Exact controllablity for the schrodinger equation [J]. *SIAM J of Control and Optimization*, 1994,32(1):24-34.

[5] RUSSUL D L. *Exact Boundary Value Controllability Theorems for Wave and Heat Processes in Star-Complemented with Boundary Damping* [M]. New York: Sternberg, 1974.

[6] LIONS J L. Exact controllablity, stabilization and perturbations for distributed systems [J]. *SIAM Review*, 1988,30(1):1-16.

[7] KOMORNIK V. Exact Controllability and Stabilization[M]// *The Multiplier Method*. New York: Chichester, 1994.

[8] LIONS J L. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations* [M]. Translated by MITTER S K. Berlin: Springer-Verlag,1971.

[9] PAZY A. *Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations* [M]. New York: Springer-Verlag,1983.

[10] CURTAIN R, ZWART H. *An Introduction to Infinite- Dimensional Linear Systems Theory* [M]. New York: Springer-Verlag, 1995.

[11] 索伯烈夫. 空间 [M]. 叶其孝,译. 北京:人民教育出版社, 1981.
(ADAMS R A. *Sobolev Space* [M]. Translated by YE Qixiao. Beijing: People Education Press, 1981.)

[12] 郭大均. 非线性泛函分析[M]. 济南:山东科学技术出版社, 2001.
(GUO Dajun. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. Jinan: Shandong Science Technology Press, 2001.)

作者简介:

宗西举 (1981—),男,博士生,主要研究兴趣是偏微分方程的镇定与控制问题等,E-mail: zongxiju@163.com;

赵 怡 (1940—),男,教授,博士生导师,主要研究兴趣是偏微分方程的镇定与控制问题、无穷维动力系统、混沌同步等,E-mail: stszy@zsu.edu.cn;

殷朝阳 (1962—),男,副教授,硕士生导师,主要研究兴趣是偏微分方程的适定性问题以及解的爆破问题等,E-mail: mcsyzy@zsu.edu.cn.