

时变不确定系统的变时域离线鲁棒预测控制

丁宝苍¹, 邹涛², 李少远²

(1. 河北工业大学 电气与自动化学院, 天津 300130; 2. 上海交通大学 自动化研究所, 上海 200240)

摘要: 给出多包描述约束系统的鲁棒调节器的一种新方法. 现有的离线方案离线构造一系列的状态反馈控制律, 其中每一个控制律是通过将无穷时域的控制输入固定为唯一的状态反馈控制律而得到的. 而本文在优化较大椭圆内的控制律时, 使下个时刻的状态进入临近的更小的椭圆——在较小的椭圆内部, 相应的控制律序列作为局部控制器. 因此, 本文新方法相当于给出了变时域的预测控制器, 可给出更优的控制作用. 仿真例子说明了新方法的有效性.

关键词: 鲁棒调节; 多包描述; 离线状态反馈律; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Varying-horizon off-line robust predictive control for time-varying uncertain systems

DING Bao-cang¹, ZOU Tao², LI Shao-yuan²

(1. School of Electricity and Automation, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China;

2. Institute of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: A predictive controller achieving optimal control performance is investigated in this paper. Firstly, a set of state points is off-line selected. For each of these points, a control law and the corresponding ellipsoidal region of attraction are then calculated. In calculating the control law for a larger ellipsoid, it lets the state at the next time instant enter into the adjacent smaller ellipsoid, such that the performance cost optimization is based on a control law sequence. In this way, the controller obtained is horizon-varying. All the control laws are calculated via linear matrix inequality optimization problems. Besides, real time control law is on-line chosen as a linear interpolation of the off-line control laws, without any optimization problem involved. Finally, a simulation example shows the optimality improvement by this new technique.

Key words: robust regulation; polytopic description; off-line state feedback law; linear matrix inequalities

1 引言(Introduction)

约束线性系统的标称预测控制(model predictive control, MPC)设计已经得到系统的解决^[1,2], 而约束不确定系统的鲁棒 MPC 综合问题在近年引起很多研究兴趣. 这主要因为基于标称模型设计的 MPC 缺乏鲁棒性^[3], 故需要具有稳定性保证的 MPC 技术. 采用适当的模型表达, 鲁棒 MPC 可以各种方式解决, 从文献[4~6]可略见一斑. 然而, 一个优秀的鲁棒 MPC 技术不仅要求稳定性保证, 而且要求在线计算量低、吸引域大(至少满足要求)、代价函数值低^[7].

文献[4]首先求解了针对多包描述系统的无穷时域 min-max 优化问题, 方法是将无穷时域的控制输入固定为唯一的状态反馈律, 并在线计算该反馈

律. 在文献[4]基础上, 文献[8]离线给出一个控制律序列, 每个控制律对应一个椭圆型吸引域; 在线实时控制律则从序列中选择; 当状态位于两个椭圆之间并满足一附加条件时, 实时控制律选择为相应的两个离线控制律的线性插值. 文献[8]大大降低了在线计算量. 在本文中, 作者进一步研究离线算法. 文献[8]在计算每个控制律时, 都是将无穷时域控制输入固定为唯一的状态反馈控制律, 而本文在计算针对较大椭圆的控制律时, 认为: 如果该控制律在当前时刻实施, 则在以后的时刻将采用针对较小椭圆的控制律. 实际上, 本文的技术相当于采用了变时域的 MPC, 即控制时域在 $1 \sim N$ 之间变化 (N 为椭圆个数); 而文献[8]相当于采用了控制时域为 1 的固定时域 MPC, 因此本文方法将给出更优的控制作用.

符号说明: \mathbb{R}^n 为 n 维实空间; 对任意向量 x 和正定矩阵 W , $\|x\|_W^2 = x^T W x$; $x(k+i|k)$ 为在 k 时刻对未来 $k+i$ 时刻的变量 x 的预测值; 符号“*”给出对称结构表达, 即当 H 和 R 为对称矩阵时,

$$\begin{bmatrix} H & * \\ T & R \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} H & T^T \\ T & R \end{bmatrix}.$$

2 问题描述 (Problem statement)

考虑下面的时变和/或不确定状态空间模型

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (1)$$

及其输入、状态约束

$$-\bar{u} \leq u(k+i) \leq \bar{u}, \quad \forall i \geq 0, \quad (2a)$$

$$-\bar{\psi} \leq \Psi x(k+i+1) \leq \bar{\psi}, \quad \forall i \geq 0. \quad (2b)$$

其中: $u \in \mathbb{R}^m$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$ 分别为输入和可测状态, $\bar{u} := [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m]^T$, $\bar{\psi} := [\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_q]^T$; $\bar{u}_i > 0, i = 1, \dots, m$; $\bar{\psi}_j > 0, j = 1, \dots, q$; $\Psi \in \mathbb{R}^{q \times n}$; $[A(k) | B(k)] \in \Omega, \forall k \geq 0, \Omega = \text{Co}\{A_1 | B_1, A_2 | B_2, \dots, A_L | B_L\}$, 即存在 L 个非负系数 $\omega_l(k)$ ($l = 1, \dots, L$) 使得

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^L \omega_l(k) = 1, \\ [A(k) | B(k)] = \sum_{l=1}^L \omega_l(k) [A_l | B_l]. \end{cases} \quad (3)$$

目标是针对式(1)(2)设计控制器, 将状态调节到稳态值 $(x_{ss}, u_{ss}) = (0, 0)$. 为此, 在每个时刻 k 求解优化问题

$$\begin{aligned} \min_{\bar{u}(k)} \max_{[A(k+i) | B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J_\infty(k) = \\ \sum_{i=0}^{\infty} [\|x(k+i|k)\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|u(k+i|k)\|_{\mathcal{R}}^2] \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} x(k+i+1|k) = \\ A(k+i)x(k+i|k) + B(k+i) \cdot \\ u(k+i|k), x(k|k) = x(k), i \geq 0, \end{cases} \quad (4b)$$

$$\begin{cases} -\bar{u} \leq u(k+i|k) \leq \bar{u}, \\ -\bar{\psi} \leq \Psi x(k+i+1|k) \leq \bar{\psi}, i \geq 0. \end{cases} \quad (4c)$$

其中: $\mathcal{Q} > 0$ 和 $\mathcal{R} > 0$ 为加权矩阵, $\bar{u}(k) = [u(k|k)^T, u(k+1|k)^T, u(k+2|k)^T, \dots]^T$ 为决策变量. 在 k 时刻实施 $u(k) = u(k|k)$, 在 $k+1$ 时刻重复优化问题(4).

文献[4]简化求解式(4), 将 $\bar{u}(k)$ 固定为状态反馈律, 即 $u(k+i|k) = F(k)x(k+i|k), \forall i \geq 0$. 定义二次型函数

$$\begin{aligned} V(i, k) = x(k+i|k)^T P(k)x(k+i|k), \\ P(k) > 0, \quad \forall k \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

并强制满足如下的鲁棒稳定性约束

$$\begin{cases} V(i+1, k) - V(i, k) \leq \\ -\|x(k+i|k)\|_{\mathcal{Q}}^2 - \|u(k+i|k)\|_{\mathcal{R}}^2, \\ \forall [A(k+i) | B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

闭环系统稳定时, $x(\infty|k) = 0$ 且 $V(\infty, k) = 0$. 将式(6)从 $i = 0$ 到 $i = \infty$ 迭加得到

$$\max_{[A(k+i) | B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J_\infty(k) \leq V(0, k) \leq \gamma. \quad (7)$$

其中 $\gamma > 0$. 定义 $Q = \gamma P(k)^{-1}$ 和 $F(k) = YQ^{-1}$, 如果下面的 LMI 成立, 则式(7)(6)和(4c)也满足

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ x(k) & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad Q > 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} Q & * & * & * \\ A_l Q + B_l Y & Q & * & * \\ \mathcal{Q}^{1/2} Q & 0 & \gamma I & * \\ \mathcal{R}^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, \quad l = 1, \dots, L, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad Z_j \leq \bar{u}_j^2, \quad j = 1, \dots, m, \quad (10)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} Q & * \\ \Psi(A_l Q + B_l Y) & \Gamma \end{bmatrix} \geq 0, \Gamma_s \leq \bar{\psi}_s^2, \\ l = 1, \dots, L, s = 1, \dots, q. \end{cases} \quad (11)$$

其中 Z_j (Γ_s) 为 $Z(\Gamma)$ 的第 j (第 s) 个对角元素^[9,10]. 这样, 问题(4)转化为

$$\begin{cases} \min_{\gamma, Q, Y, Z, \Gamma} \gamma, \\ \text{s. t. 式(8) ~ (11)}. \end{cases} \quad (12)$$

如果式(12)在初始时刻 $k = 0$ 可行, 则 $F(k)$ 的滚动实施将使闭环系统指数稳定.

在文献[4]基础上, 文献[8]给出下面的离线算法.

算法 1

1) 离线时, 选择一系列状态点 $x_h, h = N, \dots, 1$. 将式(8)中的 $x(k)$ 替换为 x_h , 并求解式(12)得到 Q_h, Y_h, γ_h , 椭圆 $\varepsilon_h = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T Q_h^{-1} x \leq 1\}$ 和控制律 $F_h = Y_h Q_h^{-1}$. 注意 x_h 的选择应该使得 $\varepsilon_j \supset \varepsilon_{j-1}, \forall j = N, \dots, 2$.

2) 在线时, 如果对所有 $x_h, h = N, \dots, 2$ 如下条件满足:

$$\begin{cases} Q_h^{-1} - (A_l + B_l F_{h-1})^T Q_h^{-1} (A_l + B_l F_{h-1}) > 0, \\ l = 1, 2, \dots, L, \end{cases} \quad (13)$$

则在每个时刻 k 采用控制律

$$F(k) = \begin{cases} F(\alpha_h(k)), & x(k) \in \varepsilon_h, x(k) \notin \varepsilon_{h-1}, \\ F_1, & x(k) \in \varepsilon_1. \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$F(\alpha_h(k)) = \alpha_h(k)F_h + (1 - \alpha_h(k))F_{h-1},$$

$$x(k)^T [\alpha_h(k)Q_h^{-1} + (1 - \alpha_h(k))Q_{h-1}^{-1}]x(k) = 1,$$

$$0 \leq \alpha_h(k) \leq 1.$$

与文献[4]相比,文献[8]的在线计算量明显降低了,但是控制律的最优性要差一些. 本文中,作者给出一种能够计算出更优的控制作用的算法.

3 改进的离线控制技术 (Improved off-line control technique)

在计算 F_h 时,算法1 不考虑 $F_i, \forall i < h$. 但是,对于 $\varepsilon_i, \forall i < h$ 来说, F_i 是比 F_h 更优的反馈律. 下面,选择 $\{Q_1, F_1, \gamma_1\}$ 的方法同算法1, 但是选择 $\{Q_h, F_h, \gamma_h, \forall h \geq 2\}$ 的方法与算法1 不同. 对 $x_h, \forall h \geq 2$, 选择 $\{Q_h, F_h\}$ 使得当 $x(k) \in \varepsilon_h$ 时, $x(k+i|k) \in \varepsilon_{h-1} \subset \varepsilon_h, 1 \leq i \leq h-1$, 而在 ε_{h-1} 内部则采用 F_{h-1} . 为方便,首先定义

$$J_{\text{tail}}(k) = \sum_{i=1}^{\infty} [\|x(k+i|k)\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|u(k+i|k)\|_{\mathcal{R}}^2]. \quad (15)$$

3.1 计算 Q_2, F_2 (Calculating Q_2, F_2)

假设 Q_1, F_1 已经得到,考虑 $x(k) \notin \varepsilon_1$. 采用如下的控制律求解问题(4):

$$u(k) = F_2 x(k),$$

$$u(k+i|k) = F_1 x(k+i|k), \forall i \geq 1, \quad (16)$$

则类似式(7)得到

$$\max_{[A(k+i)|B(k+i)] \in \Omega, i \geq 1} J_{\text{tail}}(k) \leq x(k+1|k)^T P_1 x(k+1|k) \leq \gamma_1. \quad (17)$$

其中 $P_1 = \gamma_1 Q_1^{-1}$. 这样,问题(4a) 转化为 min-max 优化^[9,10] 下面的指标函数

$$\bar{J}_2(k) := \bar{J}(k) = \|x(k)\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|u(k)\|_{\mathcal{R}}^2 + \|x(k+1|k)\|_{P_1}^2 = x(k)^T \{ \mathcal{Q} + F_2^T \mathcal{R} F_2 + [A(k) + B(k)F_2]^T P_1 [A(k) + B(k)F_2] \} x(k). \quad (18)$$

定义 $\bar{J}_2(k) \leq \gamma_2$. 引入松弛变量 P_2 使得

$$\gamma_2 - x_2^T P_2 x_2 \geq 0, \quad (19)$$

$$\mathcal{Q} + F_2^T \mathcal{R} F_2 + [A(k) + B(k)F_2]^T P_1 [A(k) + B(k)F_2] \leq P_2. \quad (20)$$

另外, $u(k) = F_2 x(k)$ 应满足硬约束

$$\begin{cases} -\bar{u} \leq F_2 x(k) \leq \bar{u}, \\ -\bar{\psi} \leq \Psi[A(k) + B(k)F_2]x(k) \leq \bar{\psi}, \\ \forall x(k) \in \varepsilon_2 \end{cases} \quad (21)$$

和终端约束

$$x(k+1|k) \in \varepsilon_1, \forall x(k) \in \varepsilon_2. \quad (22)$$

式(22) 等价于 $[A(k) + B(k)F_2]^T Q_1^{-1} [A(k) + B(k)F_2] \leq Q_2^{-1}$. 定义 $Q_2 = \gamma_2 P_2^{-1}$ 和 $F_2 = Y_2 Q_2^{-1}$, 则式(19) (20) 和(22) 可以转化为如下的 LMI:

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ x_2 & Q_2 \end{bmatrix} \geq 0, Q_2 > 0, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} Q_2 & * & * & * \\ A_l Q_2 + B_l Y_2 & \gamma_2 P_1^{-1} & * & * \\ \mathcal{Q}^{1/2} Q_2 & 0 & \gamma_2 I & * \\ \mathcal{R}^{1/2} Y_2 & 0 & 0 & \gamma_2 I \end{bmatrix} \geq 0, l = 1, \dots, L, \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} Q_2 & * \\ A_l Q_2 + B_l Y_2 & Q_1 \end{bmatrix} \geq 0, l = 1, \dots, L. \quad (25)$$

如果如下的 LMI 满足,则约束(21) 也满足^[4,9,10]:

$$\begin{bmatrix} Z_2 & Y_2 \\ Y_2^T & Q_2 \end{bmatrix} \geq 0, Z_{2,jj} \leq \bar{u}_j^2, j = 1, \dots, m, \quad (26)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} Q_2 & * \\ \Psi(A_l Q_2 + B_l Y_2) & \Gamma_2 \end{bmatrix} \geq 0, \Gamma_{2,ss} \leq \bar{\psi}_s^2, \\ l = 1, \dots, L, s = 1, \dots, q. \end{cases} \quad (27)$$

故, $\{Y_2, Q_2, \gamma_2\}$ 可以通过求解如下优化问题得到:

$$\begin{cases} \min & \gamma_2, Y_2, Q_2, \Gamma_2 \\ \text{s. t.} & \text{式(23) ~ (27)}. \end{cases} \quad (28)$$

3.2 计算 $Q_h, F_h, \forall h \geq 3$ (Calculating $Q_h, F_h, \forall h \geq 3$)

假设 $Q_1, F_1, \dots, Q_{h-1}, F_{h-1}$ 已经得到,考虑 $x(k) \notin \varepsilon_{h-1}$. 采用如下的控制律求解问题(4):

$$\begin{cases} u(k+i|k) = F_{h-1} x(k+i|k), i = 0, \dots, h-2, \\ u(k+i|k) = F_1 x(k+i|k), \forall i \geq h-1. \end{cases} \quad (29)$$

考虑式(17) 和 $h = 3, 4, \dots$ 等,由归纳法得到

$$\max_{[A(k+i)|B(k+i)] \in \Omega, i \geq 1} J_{\text{tail}}(k) \leq x(k+1|k)^T P_{h-1} x(k+1|k) \leq \gamma_{h-1}. \quad (30)$$

其中 $P_{h-1} = \gamma_{h-1} Q_{h-1}^{-1}$. 这样,问题(4a) 转化为 min-max 优化如下的性能指标

$$\bar{J}_h(k) := \bar{J}(k) = \|x(k)\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|u(k)\|_{\mathcal{R}}^2 + \|x(k+1|k)\|_{P_{h-1}}^2.$$

类似3.1 节,引入松弛变量 $P_h = \gamma_h Q_h^{-1}$ 并定义 $\bar{J}_h(k) \leq \gamma_h, F_h = Y_h Q_h^{-1}$ 使得

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ x_h & Q_h \end{bmatrix} \geq 0, \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} Q_h & * & * & * \\ A_l Q_h + B_l Y_h & \gamma_h P_{h-1}^{-1} & * & * \\ \mathcal{Q}^{1/2} Q_h & 0 & \gamma_h I & * \\ \mathcal{R}^{1/2} Y_h & 0 & 0 & \gamma_h I \end{bmatrix} \geq 0, \quad l = 1, \dots, L, \quad (33)$$

而且, $u(k|k) = F_h x(k|k)$ 应满足

$$\begin{bmatrix} Q_h & * \\ A_l Q_h + B_l Y_h & Q_{h-1} \end{bmatrix} \geq 0, \quad l = 1, \dots, L, \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} Z_h & Y_h \\ Y_h^T & Q_h \end{bmatrix} \geq 0, \quad Z_{h,jj} \leq \bar{u}_j^2, \quad j = 1, \dots, m, \quad (35)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} Q_h & * \\ \Psi(A_l Q_h + B_l Y_h) & \Gamma_h \end{bmatrix} \geq 0, \quad \Gamma_{h,ss} \leq \bar{\psi}_s^2, \\ l = 1, \dots, L, \quad s = 1, \dots, q. \end{cases} \quad (36)$$

故, $\{Y_h, Q_h, \gamma_h\}$ 可通过求解下面的优化问题得到:

$$\begin{cases} \min_{\gamma_h, Y_h, Q_h, Z_h, \Gamma_h} \gamma_h \\ \text{s. t. 式(32) ~ (36)}. \end{cases} \quad (37)$$

算法2 (离线鲁棒预测控制改进算法)

1) 离线时,选择状态序列 $x_h, h = 1, \dots, N$. 将式(8)中 $x(k)$ 替换为 x_1 并求解式(12)得到 Q_1, Y_1, γ_1 , 椭圆 ε_1 和反馈律 $F_1 = Y_1 Q_1^{-1}$. 对 x_h , 令 h 从2递增至 N , 并求解式(37)得到 Q_h, Y_h, γ_h 和 ε_h . 注意 $x_h, h = 1, \dots, N$ 的选取应该使得 $\varepsilon_j \supset \varepsilon_{j-1}, \forall j = 2, \dots, N$.

2) 在线时,在每个时刻 k 采用如下的控制律

$$F(k) = \begin{cases} F(\alpha_h), & x(k) \in \varepsilon_h, \quad x(k) \notin \varepsilon_{h-1}, \\ F_1, & x(k) \in \varepsilon_1. \end{cases} \quad (38)$$

其中

$$\begin{aligned} F(\alpha_h) &= \alpha_h F_h + (1 - \alpha_h) F_{h-1}, \\ x(k)^T [\alpha_h Q_h^{-1} + (1 - \alpha_h) Q_{h-1}^{-1}] x(k) &= 1, \\ 0 &\leq \alpha_h \leq 1. \end{aligned}$$

在算法2中, $\alpha_h(k)$ 简写为 α_h , 这是因为 $x(k)$ 最多只能停留在 ε_h 中一次.

注1 假设在 k 时刻采用 F_h , 并考虑式(29)中的控制律. 由于对所有满足条件的状态都采用同样的预测控制律序列, 而且处理的是不确定系统, 一般不会恰好满足 $x(k+i|k) \in \varepsilon_{h-i}, x(k+i|k) \notin \varepsilon_{h-i-1}, \forall i = 1, \dots, h-2$. 在实际实施中, 也一般不会恰好满足 $x(k+i) \in \varepsilon_{h-i}, x(k+i) \notin \varepsilon_{h-i-1}, \forall i = 1, \dots, h-2$. 但是考虑 F_{h-1} , 它比 F_h 更加适合于 $\varepsilon_{h-1}, \dots, \varepsilon_1$, 故采用式(29)能够改进离线鲁棒 MPC 的最优性.

注2 在式(29)中, 不是采用一个 F_h , 而是采用控制律序列 F_h, F_{h-1}, \dots, F_1 . 在实际实施中, 采用式(38), 即为隐含地采用控制律序列 $F(\alpha_h), F_{h-1}, \dots, F_1$; 但是只实施当前的一个控制律 $F(\alpha_h)$. 这表示本文方法实际上采用了变时域

的预测控制方法, 其中控制时域在 $\{N, \dots, 1\}$ 中变化.

定理1 对系统(1)(2), 只要 $x(0) \in \varepsilon_N$, 则算法2所给出的离线鲁棒 MPC 渐近镇定闭环系统.

证 当 $h \neq 1$ 时, 若 $x(k)$ 满足 $\|x(k)\|_{Q_h^{-1}}^2 \leq 1$ 和 $\|x(k)\|_{Q_{h-1}^{-1}}^2 \geq 1$, 则令 $Q(\alpha_h)^{-1} = \alpha_h Q_h^{-1} + (1 - \alpha_h) Q_{h-1}^{-1}$, $Z(\alpha_h) = \alpha_h Z_h + (1 - \alpha_h) Z_{h-1}$ 和 $\Gamma(\alpha_h) = \alpha_h \Gamma_h + (1 - \alpha_h) \Gamma_{h-1}$. 通过线性插值得到

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} Z(\alpha_h) & * \\ F(\alpha_h)^T & Q(\alpha_h)^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \\ \begin{bmatrix} Q(\alpha_h)^{-1} & * \\ \Psi(A_l + B_l F(\alpha_h)) & \Gamma(\alpha_h) \end{bmatrix} \geq 0. \end{cases} \quad (39)$$

式(39)说明 $F(\alpha_h)$ 满足输入和状态约束. 对 $\forall x(0) \in \varepsilon_{h-1}, F_{h-1}$ 为稳定的反馈律, 故

$$\begin{bmatrix} Q_{h-1}^{-1} & * \\ A_l + B_l F_{h-1} & Q_{h-1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad \text{另外在式(34)中的}$$

$$\begin{bmatrix} Q_h & * \\ A_l Q_h + B_l Y_h & Q_{h-1} \end{bmatrix} \text{两边同乘} \begin{bmatrix} Q_h^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{可知式}$$

$$(34) \text{等价于} \begin{bmatrix} Q_{h-1}^{-1} & * \\ A_l + B_l F_h & Q_{h-1} \end{bmatrix} \geq 0. \text{这样,采用线性}$$

插值方法得到

$$\begin{bmatrix} Q(\alpha_h)^{-1} & * \\ A_l + B_l F(\alpha_h) & Q_{h-1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (40)$$

由于 $x(k) \in \varepsilon_{h,\alpha_h} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T Q(\alpha_h)^{-1} x \leq 1\}$, 式(40)表明 $u(k) = F(\alpha_h)x(k)$ 可保证将 $x(k+1)$ 驱动到 ε_{h-1} , 同时满足约束. 接下去的证明同文献[8]. 证毕.

4 仿真例子 (Simulation example)

考虑系统

$$\begin{bmatrix} x^{(1)}(k+1) \\ x^{(2)}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ \beta(k) & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)}(k) \\ x^{(2)}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k).$$

其中 $\beta(k)$ 满足 $0.5 \leq \beta(k) \leq 2.5$, 为不确定参数.

系统真实状态由 $\beta(k) = 1.5 + \sin k$ 产生. 约束为 $|u(k+i|k)| \leq 2, \forall i \geq 0$. 选择加权矩阵为 $\mathcal{Q} = I, \mathcal{R} = 1$. 选择 $x_h = [1 + 0.01(h-1) \quad 0]^T, x_N = [2 \quad 0]^T$ (为简单起见未细分). 初始状态位于 $x(0) = [2 \quad 0]^T$. 采用算法1和算法2. 两种算法的状态轨迹、状态响应和输入信号分别见图1~图3. 实线代表算法2, 虚线代表算法1. 由图可见, 在一次仿真中, 系统状态不是必须经过每一个椭圆, 而是跳过某些椭圆, 只是在部分椭圆中停留. 但如果进行许多组仿真, 则每个椭圆都是有用的. 进一步, 记

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} [\|x(i)\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|u(i)\|_{\mathcal{R}}^2], \text{ 则对算法1,}$$

$J^* = 24.42$; 对算法2, $J^* = 21.73$. 仿真结果表明本文算法最优性更强.

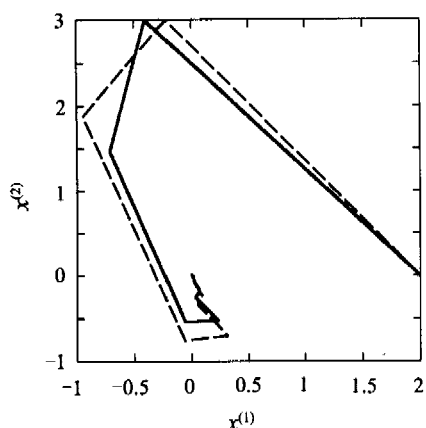


图1 闭环系统状态轨迹

Fig. 1 State trajectories of the closed-loop system

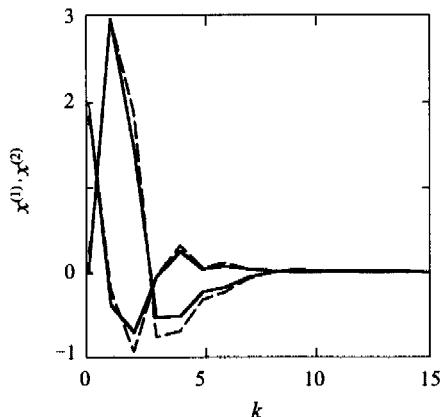


图2 闭环系统状态响应

Fig. 2 State responses of the closed-loop system

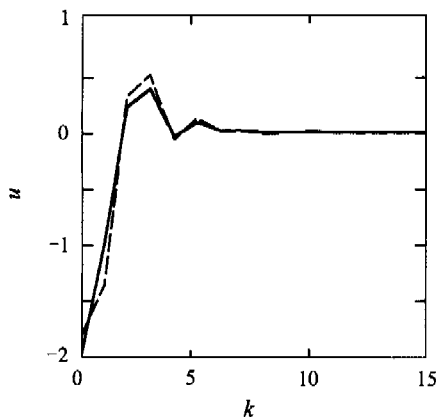


图3 闭环系统输入

Fig. 3 Input signals of the closed-loop system

5 结论 (Conclusion)

给出了离线鲁棒预测控制器的一种新算法. 新算法采用不同的方式求解离线控制律: 不是将无穷时域的控制输入固定为唯一的状态反馈控制律, 而是在求解每个控制律时, 认为: 如果当前时刻采用这个控制律, 则在以后的时刻将采用更优的控制律. 新方法的重要性在于: 它相当于一个变时域的预测

控制器, 即控制时域 (记为 M) 从 $M > 1$ 变化到 $M = 1$. 而文献[8]的算法即算法1只能被看作是 $M = 1$ 的预测控制器. 通过扩展控制时域的长度, 新方法给出了更加优化的控制作用. 文献[8]的方法求解控制律的机制与文献[4]的在线方法是一致的, 但对本文新方法, 则难以找到与之对应的容易实现的在线方法.

参考文献 (References):

- [1] MAYNE D Q, RAWLINGS J B, RAO C V, et al. Constrained model predictive control; stability and optimality [J]. *Automatica*, 2000, 36(8): 789-814.
- [2] BEMPORAD A, MORARI M, DUA V, et al. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems [J]. *Automatica*, 2002, 38(1): 3-20.
- [3] BEMPORAD A, MORARI M. Robust model predictive control: A survey [C]// GARULLI A, TESI A, VICINO A, et al. *Robustness in Identification and Control*. London LTD, Godalming; Springer, 1999; 207-246.
- [4] KOTHARE M V, BALAKRISHNAN V, MORARI M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities [J]. *Automatica*, 1996, 32(12): 1361-1379.
- [5] KOUVARITAKIS B, ROSSITER J A, SCHUURMANS J. Efficient robust predictive control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(11): 1545-1549.
- [6] WANG Y J, RAWLINGS J B. A new robust model predictive control method [J]. *J of Process Control*, 2004, 14(2): 231-262.
- [7] WAN Z, KOTHARE M V. Efficient robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set [J]. *Systems & Control Letters*, 2003, 48(3): 375-383.
- [8] WAN Z, KOTHARE M V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities [J]. *Automatica*, 2003, 39(7): 837-846.
- [9] DING B C, XI Y G, Li S Y. A synthesis approach of on-line constrained robust model predictive control [J]. *Automatica*, 2004, 40(1): 163-167.
- [10] 丁宝苍. 预测控制稳定性分析与综合的若干方法研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2003.
(DING Baochang. *Methods for stability analysis and synthesis of predictive control* [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2003.)

作者简介:

丁宝苍 (1972—), 男, 河北工业大学副教授, 2000年和2003年分别在石油大学和上海交通大学获得硕士、博士学位, 研究兴趣为预测控制、模糊控制、H-infinity控制及其在过程系统中的应用, E-mail: dingbc@jssmail.hebut.edu.cn;

邹涛 (1975—), 男, 2005年在上海交通大学获得博士学位, 上海交通大学做博士后研究工作, 研究兴趣为预测控制、模糊控制及其在过程系统中的应用, E-mail: ykzoutao@sjtu.edu.cn;

李少远 (1965—), 男, 上海交通大学教授, 博士生导师, 研究领域为预测控制、模糊控制等, E-mail: syli@sjtu.edu.cn.