文章编号: 1000-8152(2006)02-0268-07

随机马尔可夫切换系统的 H_∞ 模型降阶

孙敏慧, 邹 云, 徐胜元
(南京理工大学 自动化系, 江苏 南京 210094)

摘要: 考虑一类带有时滞的不确定马尔可夫切换系统的 H_∞ 模型降阶问题. 首先得到了一个矩阵不等式形式的充分条件, 使该系统的 H_∞ 模型降阶问题对于满足条件的任意不确定性都是可解的; 然后依据 CCL(cone complementarity linearization)方法给出了该问题的求解算法, 以及降阶模型的参数化方法. 仿真算例说明该方法的有效性.

关键词: Markov 过程; 随机系统; 均方渐近稳定; H_∞ 模型降阶; CCL 方法; 时滞系统
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

H-infinity model reduction for stochastic systems with Markovian jump parameters and time delay

SUN Min-hui, ZOU Yun, XU Sheng-yuan
(Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China)

Abstract: The H-infinity model reduction problem for a class of uncertain Markovian jump systems with time-varying state delay is considered in this paper. The goal is the construction of a reduced-order model such that the associated model error satisfies a prescribed H-infinity norm bound constraint. A sufficient condition for the existence of desired reduced-order model is presented in terms of matrix inequalities. The cone complementarity linearization (CCL) method is then suggested to solve the matrix inequalities. With the numerical solutions of the matrix inequalities, an explicit parameterization of the desired reduced-order models is also presented.

Key words: Markov chain; stochastic system; H-infinity model reduction; CCL method; uncertainty

1 引言(Introduction)

很多系统在实际运行过程中常常因内部部件发生故障、维修、受到突发性环境扰动、子系统之间关联发生改变等原因而发生结构上的改变, 1961 年 Krasovskii 和 Lidskii[1] 第一次利用连续时间的马尔可夫链来描述这种不同模型结构之间的切换, 即建立了线性马尔可夫切换模型. 经过 40 多年的研究取得了很大的进展[2~4].

另一方面, 许多实际系统经数学建模后往往有较高的阶次, 从而导致在进行系统分析, 仿真及系统设计时很难处理, 故希望在一定的误差范围内用低阶模型来近似高阶模型, 即模型降阶问题. 该问题的处理已有多种方法[5,6], H_∞ 模型降阶[7] 是近年来常用的降阶方法, 即寻找低阶模型逼近一稳定的系统, 使之与原模型形成的误差系统稳定且具有一定的 H_∞ 范数界. 对于马尔可夫切换系统, 文献[8]讨论了它的 H_∞ 模型降解问题, 提出了寻求降阶模型的条件及方法. 但是, 对于在随机框架下, 且参数不确定性及状态时滞同时存在情况下, 就作者所知, 还没有文献进行研究.

本文针对一类带有时滞和不确定参数的马尔可夫随机切换系统, 研究其 H_∞ 模型降阶问题. 以矩阵不等式形式给出了此问题可解的一个充分条件. 并根据 CCL(cone complementarity linearization)方法将所给非严格 LMI 转化为基于严格线性矩阵不等式的优化问题, 使其可以方便的求解. 同时也给出了降阶模型的参数化方法.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑马尔可夫切换随机系统 Σ:

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}x(t)=\\&[\tilde{A}(\sigma(t))x(t)+\tilde{A}_d(\sigma(t))x(t-\tau(t))+\\&\tilde{B}(\sigma(t))u(t)]\mathrm{d}t+[\tilde{E}(\sigma(t))x(t)+\\&\tilde{E}_d(\sigma(t))x(t-\tau(t))+\tilde{F}(\sigma(t))u(t)]\mathrm{d}w(t),\end{aligned}\tag{1a}$$

$$\begin{aligned}y(t)=\;&\tilde{C}(\sigma(t))x(t)+\tilde{C}_d(\sigma(t))x(t-\tau(t))+\\&\tilde{D}(\sigma(t))u(t),\end{aligned}\tag{1b}$$

收稿日期: 2005-01-26; 收修改稿日期: 2005-07-29.
资金项目: 国家自然科学基金资助项目(60304001, 60474078, 60574015); 全国博士学位论文作者专项资金项目(200240).

$$x(t) = \varphi(t),\ \forall t \in [-h, 0],\ \sigma_0 = i. \quad (1c)$$

其中：$x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态，$u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入，$y(t) \in \mathbb{R}^p$ 为系统输出；$w(t)$ 为一维标准布朗运动，且 $E\{dw(t)\} = 0$ 和 $E\{dw(t)^2\} = dt$；$\tau(t)$ 为状态时滞，它满足

$$0 \leqslant \tau(t) \leqslant h,\ \dot{\tau}(t) \leqslant \tau < 1,\ \forall t \geqslant 0, \quad (2)$$

h，τ 均为已知常实数；$\varphi(t)$ 为 $[-h, 0]$ 上的已知连续向量函数；参数 $\sigma(t)$ 为在有限集合 $S = \{1, 2, \cdots, N\}$ 中取值的连续时间马尔可夫过程，并且

$$P\{r(t+h) = j \mid r(t) = i\} = \begin{cases} \lambda_{ij}h + o(h), & 若\ i \neq j, \\ 1 + \lambda_{ij}h + o(h), & 若\ i = j. \end{cases} \quad (3)$$

上式中 λ_{ij} 为从模态 i 切换到模态 j 的已知转移率，满足以下条件

$$\lambda_{ij} \geqslant 0,\ \lambda_{ii} = -\sum_{j \in S,\ i \neq j} \lambda_{ij}.$$

系数矩阵具有如下形式：

$$\begin{aligned} &\tilde{A}_i = A_i + \Delta A_i(t),\ \tilde{A}_{di} = A_{di} + \Delta A_{di}(t), \\ &\tilde{B}_i = B_i + \Delta B_i(t),\ \tilde{E}_i = E_i + \Delta E_i(t), \\ &\tilde{E}_{di} = E_{di} + \Delta E_{di}(t),\ \tilde{F}_i = F_i + \Delta F_i(t), \\ &\tilde{C}_i = C_i + \Delta C_i(t),\ \tilde{C}_{di} = C_{di} + \Delta C_{di}(t), \\ &\tilde{D}_i = D_i + \Delta D_i(t). \end{aligned}$$

上述式中对每一个 $\sigma(t) = i \in S$，用 $\tilde{A}_i$ 简记 $\tilde{A}(\sigma(t))$，其余符号类似处理．不确定矩阵均范数有界：

$$\begin{bmatrix} \Delta A_i(t) & \Delta A_{di}(t) & \Delta B_i(t) \\ \Delta E_i(t) & \Delta E_{di}(t) & \Delta F_i(t) \\ \Delta C_i(t) & \Delta C_{di}(t) & \Delta D_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1i} \\ M_{2i} \\ M_{3i} \end{bmatrix} F_i(t) [N_{1i} \quad N_{2i} \quad N_{3i}]. \quad (4)$$

其中：$F_i(t) \in \mathbb{R}^{f \times g}$ 为未知矩阵满足 $F_i^{\mathrm{T}}(t)F_i(t) \leqslant I_g$；$M_{1i}, M_{2i}, M_{3i}, N_{1i}, N_{2i}, N_{3i}$ 为已知常矩阵．当参数不确定性矩阵均为零时系统(1a) ~ (1c) 称为系统 Σ 的标称系统．

注 1　具有马尔可夫切换性质的系统 Σ 大量存在于工程实际中，如容错控制、多目标跟踪、柔性制造系统等工程领域中常常出现[4]．

定义 1[2]　当 $u(t) = 0$ 时，称 Σ 的标称系统为均方渐近稳定的，如果对任意有界的初始向量函数 $\varphi(t)$，$t \in [-h, 0]$ 及初始模态 $\sigma_0 \in S$，均有 $\lim\limits_{t \to \infty} E|x(t, x_0, \sigma_0)|^2 = 0$. 其中：$x(t, x_0, \sigma_0)$ 表示在初始状态为 x_0，初始模态为 σ_0 时系统在 t 时刻的状态解；$|\cdot|$ 表示向量的欧氏 2-范数，$E(\cdot)$ 为数学期望.

本文研究的随机切换系统的 H_∞ 模型降阶问题可以描述为：给定常数 $\gamma > 0$，寻求如下形式的降阶系统 Σ_r：

$$\begin{aligned} dx^r(t) = {}& [A^r(\sigma(t))x^r(t) + A_d^r(\sigma(t))x^r(t-\tau(t)) + \\ & B^r(\sigma(t))u(t)]dt + [E^r(\sigma(t))x^r(t) + \\ & E_d^r(\sigma(t))x^r(t-\tau(t)) + F^r(\sigma(t))u(t)]dw(t), \end{aligned} \quad (5a)$$

$$y^r(t) = C^r(\sigma(t)x^r(t) + C_d^r(\sigma(t))x^r(t-\tau(t)) + D^r(\sigma(t))u(t), \quad (5b)$$

$$x^r(t) = \Phi(t),\ \forall t \in [-h, 0],\ \sigma_0 = i, \quad (5c)$$

使得对所有满足条件的不确定性，由系统(1)和(5)决定的误差系统 $\Sigma_e = \Sigma - \Sigma_r$ 是均方渐近稳定的并且

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty < \gamma. \quad (6)$$

其中：$G(s)$，$G_r(s)$ 分别是系统 Σ，Σ_r 从输入到输出的传递函数；$x^r(t) \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$，$y^r(t) \in \mathbb{R}^p$，且 $\hat{n} < n$. 和其他模型降阶问题一样，假设初始条件 $\varphi(t)$，$\phi(t)$ 在 $t \in [-h, 0]$ 上的取值均为 0.

引理 1[9]　给定对称矩阵 $\Xi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和矩阵 $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times m}$，$\Pi \in \mathbb{R}^{k \times n}$ 且 $\operatorname{rank} U < n$，$\operatorname{rank} V < n$，则存在矩阵 Θ，使 $\Xi + \Gamma_1\Theta\Gamma_2 + (\Gamma_1\Theta\Gamma_2)^{\mathrm{T}} < 0$ 当且仅当 $\Gamma_1^{\perp}\Xi\Gamma_1^{\perp\mathrm{T}} < 0$，$\Gamma_2^{\mathrm{T}\perp}\Xi\Gamma_2^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}} < 0$.

引理 2[10]　A，D，S，W 和 F 为适维实矩阵，并且 $W > 0$，$F^{\mathrm{T}}F \leqslant 1$，则对任意 $\varepsilon > 0$ 以及向量 x，$y \in \mathbb{R}^n$，$2x^{\mathrm{T}}DFSy \leqslant \varepsilon^{-1}x^{\mathrm{T}}DD^{\mathrm{T}}x + \varepsilon y^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}Sy$.

3　主要结果(Main results)

引理 3　给定常数 $\gamma > 0$. $u(t) = 0$ 时 Σ 的标称系统是均方渐近稳定的，并且 $\|y(t)\|_2 < \gamma\|u(t)\|_2$，如果存在矩阵 $P_i > 0$ 及矩阵 $Q > 0$ 使得如下线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} -I & 0 & C_i & C_{di} & D_i \\ 0 & -P_i & P_iE_i & P_iE_{di} & P_iF_i \\ C_i^{\mathrm{T}} & E_i^{\mathrm{T}}P_i & P_iA_i + A_i^{\mathrm{T}}P_i + \sum\limits_{j=1}^{N}\lambda_{ij}P_j + Q & P_iA_{di} & P_iB_i \\ C_{di}^{\mathrm{T}} & E_{di}^{\mathrm{T}}P_i & A_{di}^{\mathrm{T}}P_i & -(1-\tau)Q & 0 \\ D_i^{\mathrm{T}} & F_i^{\mathrm{T}}P_i & B_i^{\mathrm{T}}P_i & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (7)$$

证 定义Lyapunov函数为

$$V_t(x(t),\sigma(t)=i)=V_t(x,i)=$$
$$x(t)^{\mathrm T}P_ix(t)+\int_{t-\tau(t)}^{t}x(s)^{\mathrm T}Qx(s)\mathrm{d}s.\qquad(8)$$

为方便,记$x(t-\tau(t))=x_1(t)$. 根据弱无穷小算子的定义可得

$$LV_t(x,i)=$$
$$2x^{\mathrm T}P_i[A_ix+A_{di}x_1+B_iu]+\sum_{j\in S}\lambda_{ij}x^{\mathrm T}P_ix+$$
$$(E_ix+E_{di}x_1+F_iu)^{\mathrm T}P_i(E_ix+E_{di}x_1+F_iu)+$$
$$x^{\mathrm T}Qx-(1-\dot\tau(t))x_1^{\mathrm T}Qx_1.\qquad(9)$$

当$u(t)=0$时,由式(7)知对任意$i\in S$, $LV_t(x,i)<0$. 故由文献[11]知标称系统是均方渐近稳定的. 下面只需证明$\|y(t)\|_2<\gamma\|u(t)\|_2$即可. 令

$$\Psi(t)=\mathrm E\left\{\int_0^t[y^{\mathrm T}(s)y(s)-\gamma^2u^{\mathrm T}(s)u(s)]\mathrm{d}s\right\},$$

则

$$\Psi(t)\leqslant\mathrm E\{\int_0^t[x(s)^{\mathrm T}\ \ x_1(s)\ \ v(s)^{\mathrm T}]\Gamma_i(s)\cdot$$
$$[x(s)^{\mathrm T}\ \ x_1(s)^{\mathrm T}\ \ v(s)^{\mathrm T}]^{\mathrm T}\mathrm{d}s\}.\qquad(10)$$

其中

$$\Gamma(s)=$$
$$\begin{bmatrix}Q+A_iP_i+P_iA_i+C_i^{\mathrm T}C_i+\sum_{j\in S}\lambda_{ij}P_j & P_iA_{di} & P_iB_{vi}\\ A_{di}^{\mathrm T}P_i & -(1-\dot\tau(s))Q & 0\\ B_{di}^{\mathrm T}P_i & 0 & -\gamma^2I\end{bmatrix}+$$
$$\begin{bmatrix}C_i^{\mathrm T}\\C_{di}^{\mathrm T}\\D_i^{\mathrm T}\end{bmatrix}[C_i\ \ C_{di}\ \ D_i]+\begin{bmatrix}E_i^{\mathrm T}\\E_{di}^{\mathrm T}\\F_i^{\mathrm T}\end{bmatrix}[E_i\ \ E_{di}\ \ F_i].\qquad(11)$$

由式(7)及Schur补引理知, $\Gamma(s)<0$. 从而$\Psi(t)<0$, 即$\|y(t)\|_2<\gamma\|u(t)\|_2$.

定理1 对于不确定随机系统Σ,如果存在正定矩阵$Q>0$, $P_i>0$, $X_i>0$及标量$\varepsilon_i>0$, $\delta_i>0$, $\forall i\in S$使得

$$\begin{bmatrix}
-[I_n\ \ 0]X_i\begin{bmatrix}I_n\\0\end{bmatrix} & [E_i\ \ 0]X_i\begin{bmatrix}I_n\\0\end{bmatrix} & [E_{di}\ \ 0] & F_i & M_{2i} & 0 & 0\\
[I_n\ \ 0]X_i\begin{bmatrix}E_{i_i}^{\mathrm T}\\0\end{bmatrix} & \Delta_i^1 & [A_{di}\ \ 0] & B_i & M_{1i} & [I_n\ \ 0]X_i\begin{bmatrix}N_{1i}^{\mathrm T}\\0\end{bmatrix} & [I_n\ \ 0]Z(X_i)\\
\begin{bmatrix}E_{di}^{\mathrm T}\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}A_{di}^{\mathrm T}\\0\end{bmatrix} & -(1-\tau)Q & 0 & 0 & \begin{bmatrix}N_{2i}^{\mathrm T}\\0\end{bmatrix} & 0\\
F_i^{\mathrm T} & B_i^{\mathrm T} & 0 & -\gamma^2I & 0 & N_{3i}^{\mathrm T} & 0\\
M_{2i}^{\mathrm T} & M_{1i}^{\mathrm T} & 0 & 0 & -\delta_iI & 0 & 0\\
0 & [N_{1i}\ \ 0]X_i\begin{bmatrix}I_n\\0\end{bmatrix} & [N_{2i}\ \ 0] & N_{3i} & 0 & -\varepsilon_iI & 0\\
0 & Z(X_i)\begin{bmatrix}I_n\\0\end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_0(X_i)
\end{bmatrix}<0,\qquad(12)$$

$$\begin{bmatrix}
-I_p & 0 & C_i & C_{di} & M_{3i} & 0\\
0 & -P_i & P_i\begin{bmatrix}E_i\\0\end{bmatrix} & P_i\begin{bmatrix}E_{di}\\0\end{bmatrix} & P_i\begin{bmatrix}M_{2i}\\0\end{bmatrix} & 0\\
C_i^{\mathrm T} & \begin{bmatrix}E_i\\0\end{bmatrix}^{\mathrm T}P_i & \Delta_i^2 & [I_n\ \ 0]P_i\begin{bmatrix}A_{di}\\0\end{bmatrix} & [I_n\ \ 0]P_i\begin{bmatrix}M_{1i}\\0\end{bmatrix} & N_{1i}^{\mathrm T}\\
C_{di}^{\mathrm T} & \begin{bmatrix}E_{di}\\0\end{bmatrix}^{\mathrm T}P_i & [A_{di}^{\mathrm T}\ \ 0]P_i\begin{bmatrix}I_n\\0\end{bmatrix} & -(1-\tau)[I_n\ \ 0]Q\begin{bmatrix}I_n\\0\end{bmatrix} & 0 & N_{2i}^{\mathrm T}\\
M_{3i}^{\mathrm T} & \begin{bmatrix}M_{2i}\\0\end{bmatrix}^{\mathrm T}P_i & [M_{1i}^{\mathrm T}\ \ 0]P\begin{bmatrix}I_n\\0\end{bmatrix} & 0 & -\delta_iI & 0\\
0 & 0 & N_{1i} & N_{2i} & 0 & -\varepsilon_iI
\end{bmatrix}<0,\qquad(13)$$

$$X_iP_i = I_{n+\hat{n}},\ \varepsilon_i\delta_i = 1 \tag{14}$$

成立,则存在一个形如式(5)的 $\hat{n}$ 阶 H_∞ 降阶模型.

其中

$$\Delta_i^1 = [I_n\ \ 0]X_i\begin{bmatrix}A_i^{\mathrm{T}}\\0\end{bmatrix} + [A_i\ \ 0]X_i\begin{bmatrix}I_n\\0\end{bmatrix} + [I_n\ \ 0][\lambda_{ii}X_i + Q]\begin{bmatrix}I_n\\0\end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$\Delta_i^2 = [I_n\ \ 0]P_i\begin{bmatrix}A_i\\0\end{bmatrix} + [A_i^{\mathrm{T}}\ \ 0]P_i\begin{bmatrix}I_n\\0\end{bmatrix} + [I_n\ \ 0][\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}P_j + Q]\begin{bmatrix}I_n\\0\end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$Z(X_i) = [\sqrt{\lambda_{i1}}X_i \cdots \sqrt{\lambda_{i,i-1}}X_i\ \sqrt{\lambda_{i,i+1}}X_i \cdots \sqrt{\lambda_{i,N}}X_i], \tag{17}$$

$$Z_0(X_i) = \mathrm{diag}(X_1\ \cdots\ X_{i-1}\ \ X_{i+1}\ \cdots\ X_N). \tag{18}$$

这时,降阶模型的参数矩阵可表示为

$$\begin{bmatrix}A_i^r & A_{di}^r & B_i^r\\ E_i^r & E_{di}^r & F_i^r\\ C_i^r & C_{di}^r & D_i^r\end{bmatrix} = -W_i^{-1}\Psi_i^{\mathrm{T}}\Lambda_i\Phi^{\mathrm{T}}(\Phi\Lambda_i\Phi^{\mathrm{T}})^{-1} + W_i^{-1}S_i^{1/2}L_i(\Phi\Lambda_i\Phi^{\mathrm{T}})^{-1/2}, \tag{19}$$

$$\Lambda_i = (\Psi_iW_i^{-1}\Psi_i^{\mathrm{T}} - \bar{\Omega}_i)^{-1}, \tag{20}$$

$$S_i = W_i - \Psi_i^{\mathrm{T}}(\Lambda_i - \Lambda_i\Phi^{\mathrm{T}}(\Phi\Lambda_i\Phi^{\mathrm{T}})^{-1}\Phi\Lambda_i)\Psi_i. \tag{21}$$

其中:W_i 为使得 $\Lambda_i > 0$ 的任意适维正定矩阵,L_i 为满足 $\|L_i\| < 1$ 的任意适维矩阵,并且

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix}A_i & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\ \bar{A}_{di} = \begin{bmatrix}A_{di} & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\ \bar{B}_i = \begin{bmatrix}B_i\\0\end{bmatrix},$$

$$\bar{E}_i = \begin{bmatrix}E_i & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\ \bar{E}_{di} = \begin{bmatrix}E_{di} & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\ \bar{F}_i = \begin{bmatrix}F_i\\0\end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_i = [C_i\ \ 0],\ \bar{C}_{di} = [C_{di}\ \ 0],\ \bar{D}_i = D_i,$$

$$\bar{M}_{2i} = [M_{2i}^{\mathrm{T}}\ \ 0]^{\mathrm{T}},\ \bar{M}_{1i} = [M_{1i}^{\mathrm{T}}\ \ 0]^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{N}_{1i} = [N_{1i}\ \ 0],\ \bar{N}_{2i} = [N_{2i}\ \ 0],$$

$$\bar{M}_i = [M_{3i}^{\mathrm{T}}\ \ \bar{M}_{2i}^{\mathrm{T}}P_i\ \ \bar{M}_{1i}^{\mathrm{T}}P_i\ \ 0\ \ 0],$$

$$\bar{N}_i = [0\ \ 0\ \ \bar{N}_{1i}\ \ \bar{N}_{2i}\ \ N_{3i}],$$

$$\Phi = [0\ \ 0\ \ V_1\ \ V_2\ \ V_3],$$

$$\Psi_i^{\mathrm{T}} = [U_3\ \ P_iU_2\ \ P_iU_1\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{\Omega}_i = \Omega_i + \varepsilon_iM_i^{\mathrm{T}}M_i + \varepsilon_i^{-1}N_i^{\mathrm{T}}N_i,$$

$$\Omega_i = \begin{bmatrix}-I_p & 0 & \bar{C}_i & \bar{C}_{di} & \bar{D}_i\\ 0 & -P_i & P_i\bar{E}_i & P_i\bar{E}_{di} & P_i\bar{F}_i\\ \bar{C}_i^{\mathrm{T}} & \bar{E}_i^{\mathrm{T}}P_i & P_i\bar{A}_i + \bar{A}_i^{\mathrm{T}}P_i + \sum_{j\in S}\lambda_{ij}P_j + Q & P_i\bar{A}_{di} & P_i\bar{B}_i\\ \bar{C}_{di}^{\mathrm{T}} & \bar{E}_{di}^{\mathrm{T}}P_i & \bar{A}_{di}^{\mathrm{T}}P_i & -(1-\tau)Q & 0\\ \bar{D}_i^{\mathrm{T}} & \bar{F}_i^{\mathrm{T}}P_i & \bar{B}_i^{\mathrm{T}} & 0 & -\gamma^2I_m\end{bmatrix},$$

$$U_1 = \begin{bmatrix}0_{n\times r} & 0_{n\times r} & 0_{n\times p}\\ I_r & 0_{r\times r} & 0_{r\times p}\end{bmatrix},\ U_2 = \begin{bmatrix}0_{n\times r} & 0_{n\times r} & 0_{n\times p}\\ 0_{r\times r} & I_r & 0_{r\times p}\end{bmatrix},$$

$$U_3 = [0_{p\times r}\ \ 0_{p\times r}\ \ -I_p],$$

$$V_1 = \begin{bmatrix}0_{r\times n} & I_r\\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r}\\ 0_{m\times n} & 0_{m\times r}\end{bmatrix},\ V_2 = \begin{bmatrix}0_{r\times n} & 0_{r\times r}\\ 0_{r\times n} & I_r\\ 0_{m\times n} & 0_{m\times r}\end{bmatrix},\ V_3 = \begin{bmatrix}0_{r\times m}\\ 0_{r\times m}\\ I_m\end{bmatrix}. \tag{22}$$

证　考虑系统(1)和(5),可以得到误差系统 $\Sigma_e = \Sigma - \Sigma_r$ 如下:

$$\mathrm{d}\hat{x}(t) = [\hat{A}(\sigma(t))\hat{x}(t) + \hat{A}_d(\sigma(t))\hat{x}(t-\tau(t)) + \hat{B}(\sigma(t))u(t)]\mathrm{d}t + [\hat{E}(\sigma(t))\hat{x}(t) + \hat{E}_d(\sigma(t))\hat{x}(t-\tau(t)) + \hat{F}(\sigma(t))u(t)]\mathrm{d}w(t), \tag{23a}$$

$$\hat{y}(t) = \hat{C}(\sigma(t))\hat{x}(t) + \hat{C}_d(\sigma(t))\hat{x}(t-\tau(t)) + \hat{D}(\sigma(t))u(t), \tag{23b}$$

$$\hat{x}(t) = \phi(t),\ \forall t \in [-h, 0]. \tag{23c}$$

其中

$$\hat{x}(t) = [x(t)^{\mathrm{T}}\ \ x^r(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{x}(t-\tau(t)) = [x(t-\tau(t))^{\mathrm{T}}\ \ x^r(t-\tau(t))^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{y}(t) = y(t) - y^r(t).$$

由引理3知,H_∞ 模型降阶问题有解只要对任意 $\sigma(t) = i \in S$ 都存在矩阵 $P_i > 0$,使得

$$\begin{bmatrix} -I_p & 0 & \hat{C}_i & \hat{C}_{di} & D_i \\ 0 & -P_i & P_i\hat{E}_i & P_i\hat{E}_{di} & P_i\hat{F}_i \\ \hat{C}_i^{\mathrm{T}} & \hat{E}_i^{\mathrm{T}}P_i & P_i\hat{A}_i+\hat{A}_i^{\mathrm{T}}P_i+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}P_j+Q & P_i\hat{A}_{di} & P_i\hat{B}_i \\ \hat{C}_{di}^{\mathrm{T}} & \hat{E}_{di}^{\mathrm{T}}P_i & \hat{A}_{di}^{\mathrm{T}}P_i & -(1-h)Q & 0 \\ \hat{D}_i^{\mathrm{T}} & \hat{F}_i^{\mathrm{T}}P_i & \hat{B}_i^{\mathrm{T}}P_i & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{24}$$

成立即可．定义

$$\Delta\bar{A}_i=\begin{bmatrix}\Delta A_i & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \Delta\bar{A}_{di}=\begin{bmatrix}\Delta A_{di} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \Delta\bar{B}_i=\begin{bmatrix}\Delta B_i\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\Delta\bar{E}_i=\begin{bmatrix}\Delta E_i & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \Delta\bar{E}_{di}=\begin{bmatrix}\Delta E_{di} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \Delta\bar{F}_i=\begin{bmatrix}\Delta F_i\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\Delta\bar{C}_i=[\Delta C_i\ \ 0],\ \Delta\bar{C}_{di}=[\Delta C_{di}\ \ 0],$$

$$\Delta\bar{D}_i=\Delta D_i,\ \bar{G}_i=\begin{bmatrix}A_i^r & A_{di}^r & B_i^r\\ E_i^r & E_{di}^r & F_i^r\\ C_i^r & C_{di}^r & D_i^r\end{bmatrix},$$

则有

$$\hat{A}_i=\bar{A}_i+\Delta\bar{A}_i+U_1\bar{G}_iV_1,\ \hat{A}_{di}=\bar{A}_{di}+\Delta\bar{A}_{di}+U_1\bar{G}_iV_2,$$

$$\hat{B}_i=\bar{B}_i+\Delta\bar{B}_i+U_1\bar{G}_iV_3,\ \hat{E}_i=\bar{E}_i+\Delta\bar{E}_i+U_2\bar{G}_iV_1,$$

$$\hat{E}_{di}=\bar{E}_{di}+\Delta\bar{E}_{di}+U_2\bar{G}_iV_2,\ \hat{F}_i=\bar{F}_i+\Delta\bar{F}_i+U_2\bar{G}_iV_3,$$

$$\hat{C}_i=\bar{C}_i+\Delta\bar{C}_i+U_3\bar{G}_iV_1,\ \hat{C}_{di}=\bar{C}_{di}+\Delta\bar{C}_{di}+U_3\bar{G}_iV_2,$$

$$\hat{D}_i=\bar{D}_i+\Delta\bar{D}_i+U_3\bar{G}_iV_3.$$

经计算，式(24)可改写为

$$\Omega_i+M_i^{\mathrm{T}}H_iN_i+(M_i^{\mathrm{T}}H_iN_i)^{\mathrm{T}}+\Psi_i\bar{G}_i\Phi+(\Psi_i\bar{G}_i\Phi)^{\mathrm{T}}<0. \tag{25}$$

根据引理2，上式成立的一个充分条件是

$$\bar{\Omega}_i+\Psi_i\bar{G}_i\Phi+(\Psi_i\bar{G}_i\Phi)^{\mathrm{T}}<0. \tag{26}$$

其中 $\bar{\Omega}_i$ 如式(22)所定义．由引理1，式(26)等价于

$$\Psi_i^{\perp}\bar{\Omega}_i\Psi_i^{\perp\mathrm{T}}<0,\ \Phi^{\mathrm{T}\perp}\bar{\Omega}_i\Phi^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}}<0. \tag{27}$$

这里取

$$\Psi_i^{\perp}=\begin{bmatrix}0 & [I_n\ \ 0_{n\times r}] & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & [I_n\ \ 0_{n\times r}] & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & I_{n+r} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_m\end{bmatrix}\cdot$$

$$\mathrm{diag}(I_p\ \ P_i^{-1}\ \ P_i^{-1}\ \ I_{n+r}\ \ I_m), \tag{28}$$

$$\Phi^{\mathrm{T}\perp}=\begin{bmatrix}I_p & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & I_{n+r} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & [I_n\ \ 0_{n\times r}] & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & [I_n\ \ 0_{n\times r}] & 0\end{bmatrix}. \tag{29}$$

令 $X_i=P_i^{-1}$，$\delta_i=\varepsilon_i^{-1}$，则通过计算 $\Psi_i^{\perp}\bar{\Omega}_i\Psi_i^{\perp\mathrm{T}}$ 以及 $\Phi^{\mathrm{T}\perp}\bar{\Omega}_i\Phi^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}}$ 并利用 Schur 补引理可得式(12)(13)．

4 降阶算法(Reduction algorithm)

这里根据 CCL 算法[12]来给出求解式(12)～(14)的迭代算法．根据 CCL 算法的原理，易知：如果 $P_i>0$，$X_i>0$，$\varepsilon_i>0$，$\delta_i>0$，$\forall i\in S$ 且

$$\begin{bmatrix}X_i & I\\ I & P_i\end{bmatrix}\geqslant 0,\ \begin{bmatrix}\varepsilon_i & I\\ I & \delta_i\end{bmatrix}\geqslant 0, \tag{30}$$

则 $\sum_{i=1}^{N}(\mathrm{tr}(X_iP_i)+\varepsilon_i\delta_i)=N\cdot(n+\hat{n}+1)$ 当且仅当 $X_iP_i=I$，$\varepsilon_i\delta_i=1$．据此得到相应的算法如下：

步骤1 给定初始值 $X_i^{(0)}$，$P_i^{(0)}$，$\varepsilon_i^{(0)}$，$\delta_i^{(0)}$ 以及误差精度 e；

步骤2 寻求最优解 X_i，P_i，ε_i，δ_i，使得如下具有 LMI 约束的目标函数最小：

$$\min\{\sum_{i=1}^{N}(\mathrm{tr}(P_i^{(k)}X_i+X_i^{(k)}P_i)+\varepsilon_i^{(k)}\delta_i+\delta_i^{(k)}\varepsilon_i)\}$$

s.t. 式(12)(13)(30)；

步骤3 记第 k 步得到的最优解为 $X_i^{(k+1)}$，$P_i^{(k+1)}$，$\varepsilon_i^{(k+1)}$，$\delta_i^{(k+1)}$，且最优值记为 opt_k；

步骤4 如果 $|\mathrm{opt}_k-2N\cdot(n+\hat{n}+1)|>e$，则令 $k=k+1$ 并转到步骤2，否则转到步骤5；

步骤5 利用得到的最优解以及式(19)～(21)参数化降阶模型．

5 数值算例(Numerical example)

考虑两个模态的不确定马尔可夫切换系统 Σ_0，其中

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_{d1} & B_1 \\ E_1 & E_{d1} & F_1 \\ C_1 & C_{d1} & D_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc:cccc:c} -6.113 & -2.2192 & -1.6228 & -1.8999 & 1.2226 & 0.4438 & 0.3246 & 0.3800 & -0.3 \\ 2.3484 & -2.5205 & 2.6366 & 1.4956 & -0.4697 & 0.5041 & -0.5273 & -0.2991 & -1 \\ 2.2147 & 2.5209 & -2.4547 & 1.5981 & -0.4429 & -0.5006 & 0.4909 & -0.3196 & 0.3 \\ -3.0970 & -2.3403 & -3.1447 & -5.9118 & 0.6194 & 0.4681 & 0.6289 & 1.1824 & 0.5 \\ \hdashline -0.2433 & -0.5217 & -0.5106 & 0.533 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.06 \\ 0.1733 & 0.432 & 0.7435 & 0.0328 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0.6232 & -0.8701 & 0.8479 & -0.052 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.06 \\ -0.1786 & 0.5075 & -0.8299 & 0.3621 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ \hdashline 0.5 & -0.8 & 0.2 & 0.6 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} A_2 & A_{d2} & B_2 \\ E_2 & E_{d2} & F_2 \\ C_2 & C_{d2} & D_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc:cccc:c} -3.6907 & -0.2216 & 0.3834 & 0.0372 & -0.7381 & -0.0443 & 0.0767 & 0.0074 & -0.8 \\ 0.0792 & -4.2468 & 0.1298 & 0.2729 & 0.0158 & -0.8494 & 0.0260 & 0.0546 & -0.3 \\ -1.0277 & 0.568 & -5.2462 & 0.1099 & -0.2055 & 0.1136 & -1.0492 & 0.0220 & 0.8 \\ 0.1804 & 0.4753 & 0.1232 & -4.8163 & 0.0360 & 0.0951 & 0.0246 & -0.9633 & 0.7 \\ \hdashline 0.4427 & 0.7629 & -0.0063 & -0.7871 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.16 \\ 0.6111 & -0.2882 & 0.5245 & 0.752 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.06 \\ -0.0741 & -0.953 & 0.3643 & -0.1669 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.16 \\ 0.2018 & 0.7782 & 0.482 & -0.8162 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.14 \\ \hdashline 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

参数不确定性由以下矩阵决定：

$$M_{1i} = M_{2i} = [0.6\ \ 0.6\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}},$$

$$N_{1i} = N_{2i} = [0.6\ \ 0\ \ 0.6\ \ 0]^{\mathrm{T}},\ i = 1, 2,$$

且 $M_{31} = N_{31} = 0$，$M_{32} = N_{32} = 0.6$，$F_i(t) = \sin t$。由引理 3 容易判定 Σ_0 是渐近稳定的．

假设 $\gamma = 1$，$\lambda_{12} = 0.4$，$\lambda_{21} = 0.2$，$\tau(t) = 2$，$\tau = 0$．本文的目的在于设计形如系统(5)的二阶系统逼近上述系统．即误差系统渐近稳定且满足条件(6)．根据所给算法解式(12)～(14)并选取 $W_1 = 0.0435I_4$，$W_2 = 0.0606I_4$，$L_1 = L_2 = 0$，那么降阶模型 Σ_0 的参数可由式(19)～(21)计算得到：

$$\begin{bmatrix} A_1^r & A_{d1}^r & B_1^r \\ E_1^r & E_{d1}^r & F_1^r \\ C_1^r & C_{d1}^r & D_1^r \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc:c} -4.4857 & 0.8960 & 0 & 0 & 0.4550 \\ 2.1819 & -3.0325 & 0 & 0 & -1.5600 \\ \hdashline -0.0793 & -0.9045 & 0 & 0 & 0.4588 \\ -0.4818 & 1.3659 & 0 & 0 & 0.4588 \\ \hdashline 0.1011 & -1.2351 & 0 & 0 & -0.8871 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} A_2^r & A_{d2}^r & B_2^r \\ E_2^r & E_{d2}^r & F_2^r \\ C_2^r & C_{d2}^r & D_2^r \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc:c} -4.4857 & 0.8960 & 0 & 0 & 0.4550 \\ 2.1819 & -3.0325 & 0 & 0 & -1.5600 \\ \hdashline -0.0793 & -0.9045 & 0 & 0 & 0.4588 \\ -0.4818 & 1.3659 & 0 & 0 & 0.4588 \\ \hdashline 0.1011 & -1.2351 & 0 & 0 & -0.8871 \end{array}\right].$$

取初值为 $x(0) = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}$，$x^r(0) = [0\ \ 0]^{\mathrm{T}}$，初始模态 $\sigma(0) = \sigma_0 = 1$，则原模型 Σ_0 与降阶模型 Σ_0^r 的输出响应如图 1 所示．

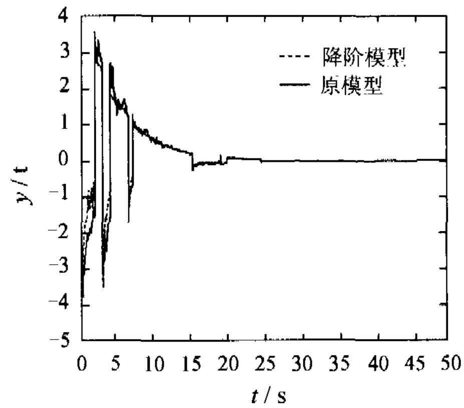

图 1　$u(t) = 4e^{-0.2t}$ 时原模型 Σ_0 的输出响应

Fig. 1　Output response of system Σ_0 with $u(t) = 4e^{-0.2t}$

6　结论(Conclusion)

本文就马尔可夫切换时滞模型的 H_∞ 模型降阶问题进行了讨论．建立了使该问题可解的充分条件，并构造相应的降阶模型使误差系统渐近稳定且具 H_∞ 范数界．根据 CCL 方法给出了相应的迭代算法．仿真算例说明了所给方法的有效性．

参考文献(References)：

[1] KRASOVSKII N N, LIDSKII E A. Analytical design of controllers in systems with random attributes, I [J]. *Automaion and Remote Control*, 1961, 22: 1021 – 1025.

[2] FENG X, LOPARO K A, JI Y, et al. Stochastic stability properties of jump linear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(1): 38 – 53.

[3] JI Y D, CHIZECK H J. Controllability, stabilizability, and continuous-time markovian jump linear quadratic control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1990, 35(7): 777 - 788.

[4] 邓飞其,陈金堂,刘永清. 多模态 Ito 随机系统的均方稳定性与鲁棒镇定[J]. 控制理论与应用,2000: 17(4): 569 - 572.
(DENG Feiqi, CHEN Jintang, LIU Yongqing. Mean-squre stability and robust stabilization of multiple-mode Ito stochastic systems [J]. *Control Theory & Applicarions*, 2000:17(4):569 - 572.)

[5] MOORE B. Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1981, 26(5): 17 - 31.

[6] GLOVER K. All optimal Hankel norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ -error bounds [J]. *Int J Control*, 1984, 39(12): 1115 - 1193.

[7] KAVRANOGLU D. H_∞ norm approximation of systems by constant matrices and related results [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(5):1006 - 1009.

[8] ZHANG L, HUANG B, LAM J. H_∞ model reduction of Markovian jump linear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2003, 50(2):103 - 118.

[9] IWASAKI T, SKELTON R E. All controllers for the general H_∞ problem: LMI existence conditions and state space formulas [J]. *Automatica*, 1994, 30(8): 1307 - 1317.

[10] XU S, CHEN T. Robust H_∞ control for uncertain stochastic systems with state delay [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(12): 2089 - 2094.

[11] KOLMANOVSKII V B, MYSHKIA A D. *Applied Theory of Functional Differential Equations* [M]. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1992.

[12] EI GHAOUI L, OUSTRY F, AITRAMI M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problem [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(8):1171 - 1176.

作者简介:

孙敏慧 (1980—),女,博士生,研究兴趣为鲁棒控制、随机系统,E-mail: sunny_mh@163.com;

邹 云 (1962—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为非线性系统、奇异系统等, E-mail: zouyun@vip.163.com;

徐胜元 (1968—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为鲁棒控制、奇异系统等, E-mail: syxu02@yahoo.com.cn.