第23卷第2期
2006年4月
控制理论与应用
Control Theory & Applications
Vol. 23 No. 2
Apr. 2006

文章编号: 1000-8152(2006)02-0279-04

切换拟对称组合系统的降阶方法及稳定性分析

李建华, 李彦平, 赵 军
(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘要: 切换拟对称组合大系统其结构上的特殊性,为这种切换系统的简化降阶提供了有效方法. 从简化后的切换系统入手,可方便地研究原系统的稳定性问题:a)在任意切换律下,切换拟对称组合系统二次稳定;b)构造切换律,使切换拟对称组合系统二次稳定. 最后,通过仿真验证文中结论的正确性. 这对于某些实际问题,如大型电力供应系统、军事系统中的舰队护航、多直升机吊物系统及大范围动物种群生态系统等有着重要的理论与应用价值.

关键词: 对称组合系统; 切换系统; 相似变换; 权矩阵; 二次稳定
中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Approach of reducing-order and the analysis of stability for switched para-symmetry composite systems

LI Jian-hua, LI Yan-ping, ZHAO Jun
(School of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: Using the structural features of the switched para-symmetry composite systems, an approach of order reduction for this switched system is given in this paper. From the reduced system, it is very convenient to study the stability of original switched system, including: a) the switched system is quadratically stable under arbitrary switching laws, b) the switched system is quadratically stable under the designed switching law. Finally, results in this paper are validated by simulation. These results are of the significance in both theory and practice to some pragmatic problems such as the large-scale power system, the armada convoy system, the lift system by helicopters and the large-scale animal system.

Key words: symmetry composite system, switched system, similar transformation, weight matrix, quadratic stable.

1 引言(Introduction)

对称组合系统的特点是:具有相同的子系统和对称的互联项,Lunze[1]称这类大系统为对称组合系统(symmetric composite systems). 对称组合系统广泛存在于电力、加工、冶金机械、计算机网络等领域中[1,2]. 正是因为这类系统结构上的特殊性,它的很多分析和设计得到简化[1~4]. 文献[5]把切换的概念应用到对称组合系统中,称为切换对称组合系统,并对此作了专门的研究,从而得到一些有关稳定性的结果.

本文提出比切换对称组合系统更为广泛的切换系统,称这类系统为"切换拟对称组合系统". 利用这种系统在结构上的特性,并在一个很一般的条件下,求得一个公共的状态变换,将该切换系统的状态同时按块解耦. 事实上,这个结论也是许多文献[1~4,6]所使用的变换在理论上的完善. 从变换后的切换系统入手,可方便地研究原切换系统的两个有关稳定性问题:a) 在任意切换律下,系统的二次稳定; b) 构造切换律,使系统二次稳定. 最后,通过例子对文中的主要结果仿真验证.

2 系统描述(Systems description)

本节首先回忆拟对称组合矩阵的定义,然后给出切换拟对称组合系统的描述. 最后,引进完备集的概念以及与完备集有关的引理.

定义 1[6] 矩阵

收稿日期: 2004-05-17; 收修改稿日期: 2005-06-15.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60274009, 60274027);教育部博士点基金资助项目(2002145007);辽宁省自然科学基金资助项目(20032020).

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} M+a_{11}H & a_{12}H & \cdots & a_{1N}H \\ a_{21}H & M+a_{22}H & \cdots & a_{2N}H \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1}H & a_{N2}H & \cdots & M+a_{NN}H \end{bmatrix}=$$
$$I\otimes M+A\otimes H \tag{1}$$
称为拟对称组合矩阵. 其中矩阵$A=[a_{ij}]_{N\times N}(a_{ij}\in R)$称为$\tilde{A}$的权矩阵.

定义 2 系统
$$\dot{X}=\tilde{A}_\sigma X(\sigma=1,2,\cdots,k) \tag{2}$$
称为切换拟对称组合系统,如果
$$\tilde{A}_\sigma=\begin{bmatrix} M_\sigma+a_{11}H_\sigma & a_{12}H_\sigma & \cdots & a_{1N}H_\sigma \\ a_{21}H_\sigma & M_\sigma+a_{22}H_\sigma & \cdots & a_{2N}H_\sigma \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1}H_\sigma & a_{N2}H_\sigma & \cdots & M_\sigma+a_{NN}H_\sigma \end{bmatrix}=$$
$$I\otimes M_\sigma+A\otimes H_\sigma, \tag{3}$$
其中$M_\sigma\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $H_\sigma\in\mathbb{R}^{n\times n}(\sigma=1,2,\cdots,k)$为切换子系统矩阵和子系统间的关联阵,矩阵$A\in\mathbb{R}^{N\times N}$为固定的权矩阵,$X=(x_1^{\mathrm{T}},\ x_2^{\mathrm{T}},\ \cdots,\ x_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\cdot N}$为状态.

定义 3[7] 设$F_1,F_2,\cdots,F_k$为Hermite矩阵,则矩阵集$\{F_1,F_2,\cdots,F_k\}$称为严格完备的,如果对任意的$x\in C^n\backslash\{0\}$,存在$m\in\{1,2,\cdots,k\}$,使得$x^{\mathrm{H}}F_m x<0$.

引理[8] 对于矩阵集$\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$,如果存在k个非负数$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_k$,使$A=\sum\alpha_jA_j$为Hurwitz,则存在Hermite正定阵$P$,使得矩阵集$\{A_1^{\mathrm{H}}P+PA_1,\ A_2^{\mathrm{H}}P+PA_2,\ \cdots,\ A_k^{\mathrm{H}}P+PA_k\}$是严格完备的.

3 主要结果(Main results)

文献[6]指出,在一个很一般的条件下拟对称组合矩阵(1)可以相似于分块对角阵,并且,相似变换阵仅与权矩阵A有关. 利用这个特性,可找到一个公共的状态变换将切换拟对称组合系统(2)按状态解耦,显然,这为研究系统的稳定性提供了较大的方便.

定理 1 在切换拟对称组合系统(2)中,如果矩阵A相似对角阵,即有可逆阵$G\in C^{N\times N}$,使$G^{-1}AG=\mathrm{diag}(\omega_1,\ \omega_2,\cdots,\ \omega_N)$. 则存在公共的状态变换$X=\tilde{G}\bar{X}$,使切换拟对称组合系统(2)变换成如下形式的切换系统:
$$\dot{\bar{X}}=\tilde{B}_\sigma\bar{X}(\sigma=1,2,\cdots,k). \tag{4}$$
其中
$$\tilde{B}_\sigma=\mathrm{diag}(M_\sigma+\omega_1H_\sigma,\ M_\sigma+\omega_2H_\sigma,\cdots,\ M_\sigma+\omega_NH_\sigma).$$

证 对系统(2)取公共的状态变换$X=\tilde{G}\bar{X}$,这里$\tilde{G}=G\otimes I$及$\tilde{G}^{-1}=G^{-1}\otimes I$,则系统(2)变换成$\dot{\bar{X}}=\tilde{B}_\sigma\bar{X}$. 其中
$$\begin{aligned}&\tilde{B}_\sigma=\tilde{G}^{-1}\tilde{A}_\sigma\tilde{G}=\\&(G^{-1}\otimes I)(I\otimes M_\sigma+A\otimes H_\sigma)(G\otimes I)=\\&(G^{-1}\otimes I)(I\otimes M_\sigma)(G\otimes I)+\\&(G^{-1}\otimes I)(A\otimes H_\sigma)(G\otimes I)=\\&(G^{-1}IG)\otimes(IM_\sigma I)+(G^{-1}AG)\otimes(IH_\sigma I)=\\&I\otimes M_\sigma+(\mathrm{diag}(\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_N))\otimes H_\sigma=\\&I\otimes M_\sigma+\mathrm{diag}(\omega_1H_\sigma,\ \omega_2H_\sigma,\cdots,\ \omega_NH_\sigma)=\\&\mathrm{diag}(M_\sigma+\omega_1H_\sigma,\ M_\sigma+\omega_2H_\sigma,\cdots,\ M_\sigma+\omega_NH_\sigma).\end{aligned}$$
如果记$\bar{X}^{\mathrm{T}}=(\bar{x}_1^{\mathrm{T}},\ \bar{x}_2^{\mathrm{T}},\ \cdots,\ \bar{x}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, 切换系统(4)就是
$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}_1=(M_\sigma+\omega_1H_\sigma)\bar{x}_1,\\ \dot{\bar{x}}_2=(M_\sigma+\omega_2H_\sigma)\bar{x}_2,\ (\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ k).\\ \vdots\\ \dot{\bar{x}}_N=(M_\sigma+\omega_NH_\sigma)\bar{x}_N.\end{cases} \tag{5}$$
很明显,切换系统(5)的特点是已按“块”解耦,这对于研究稳定性问题是非常方便的.

定理 2 如果对于每一个$m(m=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$,存在Hermite正定阵$P_m\in\mathbb{R}^{n\times n}$,使得
$$(M_\sigma+\omega_mH_\sigma)^{\mathrm{H}}P_m+P_m(M_\sigma+\omega_mH_\sigma)<0,\quad(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ k), \tag{6}$$
则切换拟对称组合系统(2)在任意切换律下是二次稳定的,其公共的二次李雅谱诺夫函数为
$$V(X)=X^{\mathrm{H}}(\tilde{G}^{-1})^{\mathrm{H}}P\tilde{G}^{-1}X. \tag{7}$$
这里$P=\mathrm{diag}(P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_N)$.

证 很明显,矩阵$(\tilde{G}^{-1})^{\mathrm{H}}P\tilde{G}^{-1}$仍为Hermite正定阵,下面只需说明$(\tilde{A}_\sigma)^{\mathrm{H}}[(\tilde{G}^{-1})^{\mathrm{H}}P\tilde{G}^{-1}]+[(\tilde{G}^{-1})^{\mathrm{H}}P\tilde{G}^{-1}]\tilde{A}_\sigma$是负定阵即可. 对此作合同变换:左乘$\tilde{G}^{\mathrm{H}}$,右乘$\tilde{G}$得
$$\begin{aligned}&\tilde{G}^{\mathrm{H}}\{(\tilde{A}_\sigma)^{\mathrm{H}}[(\tilde{G}^{-1})^{\mathrm{H}}P\tilde{G}^{-1}]+[(\tilde{G}^{-1})^{\mathrm{H}}P\tilde{G}^{-1}]\tilde{A}_\sigma\}\tilde{G}=\\&(\tilde{G}^{-1}\tilde{A}_\sigma\tilde{G})^{\mathrm{H}}P+P(\tilde{G}^{-1}\tilde{A}_\sigma\tilde{G})=\\&(\mathrm{diag}(M_\sigma+\omega_1H_\sigma,\ M_\sigma+\omega_2H_\sigma,\ \cdots,\\&M_\sigma+\omega_NH_\sigma))^{\mathrm{H}}\mathrm{diag}(P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_N)+\\&\mathrm{diag}(P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_N)\mathrm{diag}(M_\sigma+\omega_1H_\sigma,\\&M_\sigma+\omega_2H_\sigma,\ \cdots,\ M_\sigma+\omega_NH_\sigma)=\\&\mathrm{diag}((M_\sigma+\omega_1H_\sigma)^{\mathrm{H}}P_1+P_1(M_\sigma+\omega_1H_\sigma),\\&(M_\sigma+\omega_2H_\sigma)^{\mathrm{H}}P_2+P_2(M_\sigma+\omega_2H_\sigma),\ \cdots,\\&(M_\sigma+\omega_NH_\sigma)^{\mathrm{H}}P_N+P_N(M_\sigma+\omega_NH_\sigma))<0.\end{aligned}$$

因而对任意的$\sigma(\sigma = 1, 2, \cdots, k)$,有

$$(\tilde{A}_\sigma)^{H}[(\tilde{G}^{-1})^{H}P\tilde{G}^{-1}] + [(\tilde{G}^{-1})^{H}P\tilde{G}^{-1}]\tilde{A}_\sigma < 0.$$

定理2的意义在于,将一个$n\cdot N$维的切换拟对称组合系统(2)在任意切换律下的二次稳定性问题,转化为N个n维切换系统:$\dot{\bar{x}} = (M_\sigma + \omega_m H_\sigma)\bar{x}(\sigma = 1, 2, \cdots, k)$在任意切换律下的二次稳定性问题. 这显然是对原问题一个较大的简化. 此外,如果条件(6)不被满足,比如说切换拟对称组合系统(2)中至少有一个子系统不稳定,则这个切换系统就不能在任意切换律下二次稳定. 为此,作者寻找更为宽松的条件,在这个条件下构造切换律,使系统(2)在此切换律下是二次稳定的. 借助于完备集理论可知,对于矩阵集$\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_k\}$,如果存在Hermite正定阵$P$,使得矩阵集

$$\{\tilde{A}_1^{H}P + P\tilde{A}_1, \tilde{A}_2^{H}P + P\tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_k^{H}P + P\tilde{A}_k\} \quad (8)$$

是完备集,则可以构造一个切换律,使得切换拟对称组合系统(2)在这个切换律下是二次稳定,并且以$V(X) = X^{H}PX$为公共二次李雅普诺夫函数. 然而,对于一般的矩阵集$\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_k\}$,选取Hermite正定阵$P$,使得由式(7)确定的矩阵集是完备集并非易事. 利用引理和矩阵集$\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_k\}$的特殊性,可以将此问题简化. 由定理1,对每个$\tilde{A}_\sigma(\sigma = 1, 2, \cdots, k)$,存在公共的可逆阵$\tilde{G}$,使得

$$\tilde{G}^{-1}\tilde{A}_\sigma\tilde{G} = \mathrm{diag}(M_\sigma + \omega_1 H_\sigma, M_\sigma + \omega_2 H_\sigma, M_\sigma + \omega_N H_\sigma).$$

再结合引理,有下面的定理.

定理3 如果存在k个非负数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$,使得对每个$m(m = 1, 2, \cdots, N)$都有$\alpha_1(M_1 + \omega_m H_1) + \alpha_2(M_2 + \omega_m H_2) + \cdots + \alpha_k(M_k + \omega_m H_k)$为Hurwitz,则可设计一个切换律,使切换拟对称组合系统(2)在这个切换律下是二次稳定的.

证 在已知的条件下,可得$\tilde{A} = \sum \alpha_j\tilde{A}_j$为Hurwitz,由引理存在Hermite正定阵$P$,使矩阵集$\{A_1^{H}P + PA_1, A_2^{H}P + PA_2, \cdots, A_k^{H}P + PA_k\}$是严格完备. 令$\Omega_j = \{X \mid X^{H}(\tilde{A}_j^{H}P + P\tilde{A}_j)X < 0\}(j = 1, \cdots, k)$,再令$\bar{\Omega}_1 = \Omega_1, \bar{\Omega}_2 = \Omega_2 - \bar{\Omega}_1, \cdots, \bar{\Omega}_k = \Omega_k - \bar{\Omega}_{k-1} - \cdots - \bar{\Omega}_1$,考虑到完备性,有$\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \cup \cdots \cup \bar{\Omega}_k = \mathbb{R}^{N\cdot n}\setminus\{0\}$. 取函数$V(X) = X^{H}PX$,设计切换律如下:当$X \in \Omega_j$时,$\sigma(X) = j$. 则不论状态$X$如何,都有$\dot{V}(X) < 0$,即$V(X) = X^{H}PX$为切换拟对称组合系统(2)的公共李雅普诺夫函数.

4 仿真(Simulations)

研究切换系统$\dot{X} = \tilde{A}_\sigma X(\sigma = 1, 2)$的稳定性. 其中系统矩阵$\tilde{A}_\sigma = I \otimes M_\sigma + A \otimes H_\sigma$,并且权矩阵$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$,子系统矩阵分别为$M_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 1.5 \\ 1.5 & -1 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -2.5 & 0 \end{bmatrix}$;关联阵为$H_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ 1.5 & -2 \end{bmatrix}$, $H_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$. 计算得$G^{-1}AG = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,其中$G = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,$\omega_1 = 1$和$\omega_2 = -1$是$A$的特征值. 容易得出矩阵$\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$都不是Hurwitz,因此本切换系统不能在任意切换律下二次稳定. 再分别计算矩阵

$$M_1 + \omega_1 H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \; M_2 + \omega_1 H_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_1 + \omega_2 H_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; M_2 + \omega_2 H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

选取α_1, α_2,使$\alpha_1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$和$\alpha_1\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$均为Hurwitz,因为它们都是二阶矩阵,不难得出$\alpha_1 = 3$和$\alpha_2 = 4$. 因此,$\tilde{A} = 3\tilde{A}_1 + 4\tilde{A}_2$是Hurwitz. 继续求得满足$\tilde{A}^{H}P\tilde{A} < 0$的Hermite正定阵

$$P = \begin{bmatrix} 21.06 & -5.22 & 21.97 & -5.89 \\ -5.22 & 5.10 & -5.00 & 6.75 \\ 21.97 & -5.00 & 23.40 & -5.67 \\ -5.89 & 6.75 & -5.67 & 9.32 \end{bmatrix}.$$

令

$$\Omega_1 = \{X \mid X^{H}(\tilde{A}_1^{H}P + P\tilde{A}_1)X < 0\},$$

$$\Omega_2 = \{X \mid X^{H}(\tilde{A}_2^{H}P + P\tilde{A}_2)X < 0\},$$

再令$\bar{\Omega}_1 = \Omega_1, \bar{\Omega}_2 = \Omega_2 - \bar{\Omega}_1$. 设计切换律如下:

$$\begin{cases} \text{如果 } X \in \bar{\Omega}_1, \ \sigma(X) = 1, \\ \text{如果 } X \in \bar{\Omega}_2, \ \sigma(X) = 2. \end{cases} \quad (9)$$

取公共李雅普诺夫函数$V(X) = X^{H}PX$,则不论$X(t)$在什么状态,有$\dot{V}(X) < 0$. 即切换系统在由式(8)所确定的切换律下是二次稳定. 取初始值$X(0) = (-1, -4, 1, 3)^{T}$,仿真结果见图1.

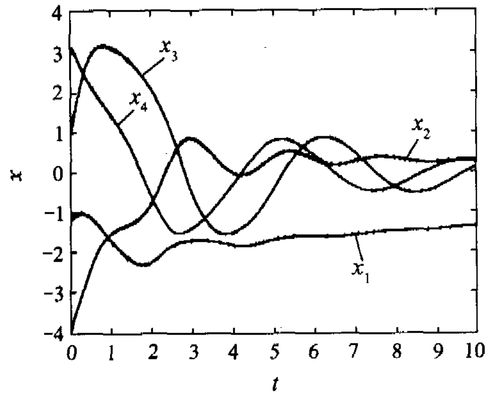

图1 切换系统在切换律(8)下的状态轨迹

Fig. 1 State respond of the switched system

5 结束语(Conclusion)

本文研究的切换拟对称组合系统的有关稳定性结果是在"权矩阵A相似于对角阵"条件下得到的．但如果这个条件不满足,即在"权矩阵A相似于若当阵"时,利用本文所给的状态变换,可将切换拟对称组合系统变换成状态按块"单向"解耦的切换系统一子系统矩阵均为分块"上三角"矩阵．文献[9]专门研究这种切换系统的稳定性．当然,所得到的结论要比本文的结论"复杂"些．

参考文献(References):

[1] LUNZE J. Dynamics of strongly coupled symmetric composite systems [J]. *Int J Control*, 1986, 44 (6): 1617 - 1640.

[2] HOVD M, SKOGESTAD S. Control of symmetrically interconnected plants [J]. *Automatica*, 1994, 30(6):957 - 973.

[3] Liu Xiaoping. Output regulation of strongly coupled symmetric composite systems [J]. *Automatica*, 1992, 28(5):1037 - 1041.

[4] 黄守东，张嗣瀛．循环组合系统的结构性质 [J]．自动化学报,1998, 24(6):778 - 801.
(HUANG Shoudong, ZHANG Siying. Structural properties of circulant composite systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 24 (6):778 - 801.)

[5] 李建华，李浚圣，李彦平．拟对称组合大系统的稳定性分析[J]．控制理论与应用,2002,19(5):801 - 803.
(LI Jianhua, LI Junsheng, LI Yanping. Stability analysis for similar symmetry large-scale combined systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2002,19(5):801 - 803.)

[6] 孙洪飞，赵军．切换对称组合系统的稳定性[J]，控制理论与应用,2003,20(3):441 - 444.
(SUN Hongfei, ZHAO Jun. Stability of a class of switched symmetric composite systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(3):441 - 444.)

[7] POGROINSKY A Y, JIRSTRAND M, SPANGENS P. On stability and passivity of a class of hybird systems [J]. *Proc of the 37th IEEE Conf on Decision & control.* Tampa, Florida: [s. n.], 1998: 3705 - 3710.

[8] SKAFIDAS E, EVANS R J, SAVKIN A V, et al. Stability results for switched controller systems [J]. *Automatica*, 1999, 35(4):553 - 564.

[9] CHENG Daizhan, GUO Lei, HUANG Jie. On quadratic Lyapunov functions [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(5):885 - 890.

作者简介:

李建华 (1957—),男,东北大学博士生,沈阳大学教授，研究方向为组合系统的结构分析、切换系统和切换组合系统的稳定性, E-mail: lihsr@163.com, sr2000@163.com;

李彦平 (1957—),男,沈阳大学教授,研究方向为复杂系统理论及应用、计算机控制与仿真, E-mail: liyp988@sina.com;

赵 军 (1957—),男,东北大学教授,博士生导师,现为中国自动化学会控制论委员会委员,研究方向为复杂非线性系统的结构研究、混杂系统、切换系统稳定性,E-mail: zdongbo@pub.ln.cninfo.net.