文章编号: 1000-8152(2006)02-0287-05

两类模糊系统具有插值性的充要条件

侯 健[1,2], 李洪兴[1], 王加银[1]
(1. 北京师范大学 数学科学学院,北京 100875; 2. 山西财经大学 应用数学系,山西 太原 030006)

摘要: 当模糊系统具有插值性时,它必具有泛逼近性. 因此,由插值性可以分析模糊系统的逼近能力. 本文讨论了由“交”和“并”的方式聚合推理规则所生成的两类模糊系统的插值性问题. 首先,通过分析由“单点”模糊化方法、CRI(compositional rule of inference)算法以及“重心法”构造的模糊系统,指出模糊系统是否具有插值性关键取决于模糊蕴含算子的第二个变量为0和1时的表达式或取值. 在此基础上,得到两类模糊系统具有插值性的充要条件. 最后给出了满足这两个充要条件的一些常用的蕴涵算子.

关键词: 模糊蕴涵算子; CRI算法; 模糊系统; 插值性; 泛逼近性

中图分类号: O159 **文献标识码**: A

Sufficient and necessary conditions for fuzzy systems possessing interpolation property

HOU Jian[1,2], LI Hong-xing[1], WANG Jia-yin[1]
(1. School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;
2. Department of Applied Mathematics, Shanxi University of Finance and Economics, Shanxi Taiyuan 030006, China)

Abstract: Fuzzy system is universally approximating when it possesses interpolation property. Approximation ability of fuzzy system can be studied by its interpolation property. In this paper, we discussed respectively the interpolation properties of two types of fuzzy systems generated by inference rules of combination of “intersection” and “union”. First, fuzzy systems adopting “singleton” fuzzification, compositional rule of inference (CRI) algorithm and “barycenter method” defuzzification are studied, and it is pointed out that interpolation properties of these fuzzy systems depend on the expressions or values of implication operator when its second variable take 0 and 1. Based on it, the sufficient and necessary conditions for fuzzy systems possessing interpolation properties are proposed. Furthermore, some commonly applied fuzzy implication operators that satisfy the sufficient and necessary conditions are given.

Key words: fuzzy implication operators; CRI algorithm; fuzzy systems; interpolation property; universal approximation

1 引言(Introduction)

模糊系统的泛逼近性是模糊系统研究的主要论题之一. 1990年以来,众多学者从不同角度出发对这一问题进行了深入而系统的讨论. 文献[1~3]研究了由Mamdani蕴涵算子和Larsen蕴涵算子等几个常用模糊蕴涵算子构造的模糊系统的泛逼近性,文献[4]研究了模糊控制的插值机理问题,指出常用的基于CRI(compositional rule of inference)算法的模糊系统均可归结为某种插值方法,但这几个常用的蕴涵算子不能满足实际需要. 通常采用CRI算法并根据实际情况选用合适的蕴涵算子来构造模糊系统,在各种不同的环境下均取得了较好的应用效果[5~8]. 由于蕴涵算子对模糊系统的构造必不可少,文献[9~12]介绍了11种构造蕴涵算子的方法,构造并总结了400多个蕴涵算子. 大量的蕴涵算子为构造模糊系统提供了更多的选择,但同时也增加了算子选取的困难. 通常设计者希望构造的模糊系统具有插值性,从而具有泛逼近性. 文献[13,14]用文献[9~12]中的50多个蕴涵算子基于CRI算法构造了模糊系统并给出了输出函数,但其中只有少数模糊系统具有插值性. 本文通过分析模糊系统的一般算法,指出采用“单点”模糊化方法,CRI算法以及“重心法”构造的模糊系统是否具有插值性关键取决于蕴涵算子 $\theta(a,b)$ 在 $b=0$ 和 $b=1$ 时

收稿日期: 2005-01-10; 收修改稿日期: 2005-07-21.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60474023,60274016,60364001);教育部科学技术重点项目资助项目(03184);973国家重点基础研究发展规划基金资助项目(2002CB312200).

的表达式或取值．在此基础上，得到了分别由“交”和“并”的方式聚合推理规则生成的两类模糊系统具有插值性的充要条件．进而由这两个充要条件验证了文献[9～12]中的蕴涵算子，得出当规则取并时有29个蕴涵算子构成的模糊系统具有插值性；当规则取交时有40个蕴涵算子构成的模糊系统具有插值性．利用此充要条件不仅可以使设计者有目的地选取已有的蕴涵算子，而且可以构造更多的具有插值性的蕴涵算子，为模糊控制器的设计提供了更多的方便．

首先，给出本文使用的概念和符号．给定某个论域X，$\mathscr{A}=\{A_i\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}$为$X$上一族正规模糊集，峰点为$x_i$（即满足$A_i(x_i)=1$的点），称$\mathscr{A}$为$X$上的一个模糊划分，如果满足条件

$$(\forall i,j)(i\neq j\Rightarrow x_i\neq x_j)\text{ 且 }$$

$$(\forall x\in X)(\sum_{i=1}^{n}A_i(x)=1),\tag{1}$$

其中A_i叫做$\mathscr{A}$的一个基元，亦称$\mathscr{A}$为X上的一个正规基元组．

规定下面常用的条件(＊)：设X,Y分别为输入和输出变量论域，无妨约定X与Y均为实数区间，即$X=[a,b]$，$Y=[c,d]$，$\mathscr{A}=\{A_i\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}$和$\mathscr{B}=\{B_i\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}$分别为$X$和$Y$上的模糊划分且$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，$c<y_1<y_2<\cdots<y_n<d$，其中$x_i,y_i$分别为$A_i,B_i$的峰点．

在下面的讨论中，把采用“单点”模糊化，CRI算法以及“重心法”构造的模糊系统记作$FS(\theta,CR)$，其中θ代表选用的蕴涵算子，CR代表规则的合成方法．在本文中主要讨论规则合成方法分别采用“交”和“并”的两种情形．

本文仅对单输入单输出的模糊系统加以讨论，对多输入单输出的模糊系统也有类似的结论．

2 确定$FS(\theta,CR)$输出函数的一般算法(General algorithm for determining output function of $FS(\theta,CR)$)

视$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$为语言变量，由此形成n条推理规则：

$$\text{if } x \text{ is } A_i \text{ then } y \text{ is } B_i,\ i=1,2,\cdots,n.\tag{2}$$

这里$x\in X$和$y\in Y$叫做基础变量．第i条规则的真域为X到Y的模糊关系$R_i(x,y)$，它由某个模糊蕴涵算子θ来确定，其中$R_i(x,y)\triangleq\theta(A_i(x),B_i(y))$．将这$n$条规则进行合成，可得到论域$X$到论域$Y$的模糊关系$R(x,y)$．给定$A^*\in F(X)$，由CRI算法确定的推理结果为$B^*\triangleq A^*\circ R$，这里

$$B^*(y)=\bigvee_{x\in X}(A^*(x)\wedge R(x,y)).\tag{3}$$

对于一个模糊系统，输入量为确切量，设为$x'\in X$，为了能使用式(3)，需将x'模糊化，即规定单点模糊集

$$A'(x)=\begin{cases}1,\ x=x',\\0,\ x\neq x',\end{cases}\tag{4}$$

代入式(3)便得到推理结果

$$B'(y)=R(x',y).\tag{5}$$

因B'是个模糊集，故需经清晰化得到确切数作为对实际控制对象的操作量．常用的方法为“重心法”：

$$y'=\int_{y\in Y}yB'(y)\mathrm{d}y/\int_{y\in Y}B'(y)\mathrm{d}y.\tag{6}$$

令$h_1=y_1-c$，$h_i=y_i-y_{i-1}(i=2,3,\cdots,n)$且$h=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{h_i\}$．因$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$为模糊划分，故它们具有Kronecker性质：$A_i(x_j)=\delta_{ij}=B_i(y_j)$．按照定积分的定义，便有

$$y'=\frac{\int_c^d yB'(y)\mathrm{d}y}{\int_c^d B'(y)\mathrm{d}y}\approx\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_iB'(y_i)h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}B'(y_i)h_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}h_iR(x',y_i)y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}h_iR(x',y_i)}.\tag{7}$$

由x'的任意性及式(7)，如果该模糊系统的输出函数可以确定的话，则取输出函数为

$$F(x)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}h_iR(x,y_i)y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}h_iR(x,y_i)}.\tag{8}$$

式(3)中的$R(x,y)$代表的是n条规则合成的推理关系，文献[15]给出了确定$R(x,y)$的两种方法，即规则合成方法分别取为“$\vee$”，“$\wedge$”的两种情形，它们是

$$R(x,y)=\bigwedge_{k=1}^{n}R_k(x,y)=\bigvee_{k=1}^{n}\theta(A_k(x),B_k(y))\tag{9}$$

和

$$R(x,y)=\bigwedge_{k=1}^{n}R_k(x,y)=\bigvee_{k=1}^{n}\theta(A_k(x),B_k(y)).\tag{10}$$

综上所述，要验证哪些蕴涵算子基于CRI算法构造的模糊系统具有插值性，只需确定$B'(y_i)$，然后将其代入式(8)，求出$F(x)$，再加以判断即可．对任意给定的输入x，由式(5)和式(9)知

$$B'(y_i)=\bigvee_{k=1}^{n}\theta(A_k(x),B_k(y_i)).$$

又由条件(*)知,$\{B_i\}_{(1\le i\le n)}$ 为 Y 上正规模糊集,且 y_i 为 B_i 的峰点,有

$$B_k(y_i)=\begin{cases}1,\ k=i,\\0,\ k\neq i,\end{cases}$$

则有

$$B'(y_i)=\bigvee_{k\neq i}\theta(A_k(x),0)\vee\theta(A_i(x),1).$$

类似地,由式(5)和式(10)知

$$B'(y_i)=\bigwedge_{k=1}^{n}\theta(A_k(x),B_k(y_i)).$$

结合条件(*)可得

$$B'(y_i)=\bigwedge_{k\neq i}\theta(A_k(x),0)\wedge\theta(A_i(x),1).$$

因此,蕴涵算子基于CRI算法构造的模糊系统是否具有插值性关键取决于蕴涵算子 $\theta(a,b)$ 在 $b=0$ 和 $b=1$ 时的表达式或取值.

下面分别研究模糊系统 $FS(\theta,\vee)$ 及 $FS(\theta,\wedge)$ 的插值性,给出这两类模糊系统具有插值性的充要条件.

3 $FS(\theta,\vee)$ 具有插值性的充要条件(Sufficient and necessary conditions for $FS(\theta,\vee)$ possessing interpolation property)

首先,给出模糊系统 $FS(\theta,\vee)$ 具有插值性的充要条件.

定理1 在条件(*)下,存在一组基函数 $\mathscr{A}'=\{A'_i\}_{(1\le i\le n)}$ 使得由蕴涵算子 θ 构造的模糊系统近似为以 A'_i 为基函数的一元分段插值函数的充要条件为

i) 对任意的 $x\in X$, 至少存在一个 i, 使得 $\theta(A_i(x),1)>0$ 或至少存在一个 $k\neq i,\theta(A_k(x),0)>0$, 其中 $i,k=1,2,\cdots,n$, 且对任意的 k,i, $\bigvee_{k\neq i}\theta(A_k(x),0)\vee\theta(A_i(x),1)$ 不恒为常数;

ii) $\theta(0,0)=\theta(1,0)=\theta(0,1)=0,\theta(1,1)>0$.

此时 $F(x)=\sum_{i=1}^{n}A'_i(x)y_i$,且基函数组 $\mathscr{A}'$ 恰为 X 的一个模糊划分.

证 充分性.由式(9)知,对任意的 $x\in X$, 有

$$B'(y_i)=\bigvee_{k=1}^{n}\theta(A_k(x),B_k(y_i))=\bigvee_{k\neq i}\theta(A_k(x),0)\vee\theta(A_i(x),1).$$

由式(8)知,输出函数可取为

$$F(x)=\frac{\sum_{i=1}^{n}h_iB'(y_i)y_i}{\sum_{i=1}^{n}h_iB'(y_i)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}h_i[\bigvee_{k\neq i}\theta(A_k(x),0)\vee\theta(A_i(x),1)]y_i}{\sum_{i=1}^{n}h_i[\bigvee_{k\neq i}\theta(A_k(x),0)\vee\theta(A_i(x),1)]}.$$

又由条件i)可知对任意的 $x\in X$, 至少存在一个 i 使得 $\bigvee_{k\neq i}\theta(A_k(x),0)\vee\theta(A_i(x),1)>0$, 且对任意的 k,i, $\bigvee_{k\neq i}\theta(A_k(x),0)\vee\theta(A_i(x),1)$ 不恒为常数. 因此,对任意的 $x\in X,F(x)$ 有意义且不为阶跃输出函数. 令

$$A_i(x')\triangleq\frac{h_i[\bigvee_{k\neq i}\theta(A_k(x),0)\vee\theta(A_i(x),1)]}{\sum_{j=1}^{n}h_j[\bigvee_{k\neq j}\theta(A_k(x),0)\vee\theta(A_j(x),1)]},$$

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}A'_i(x)y_i.$$

为避免符号重复,用 $x_l(l=1,2,\cdots,n)$ 记基函数组 $A_l(x)$ 的 n 个峰点. 再利用条件ii),对任意的 $1\le l\le n$, 可得

$$F(x_l)=\sum_{i=1}^{n}A'_i(x_l)y_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i[\bigvee_{k\neq i}\theta(A_k(x_l),0)\vee\theta(A_i(x_l),1)]}{\sum_{j=1}^{n}h_j[\bigvee_{k\neq j}\theta(A_k(x_l),0)\vee\theta(A_j(x_l),1)]}y_i=$$

$$\frac{\sum_{i\neq l}h_i\{\theta(1,0)\vee[\bigvee_{\substack{k\neq j\\k\neq l}}\theta(0,0)]\vee\theta(0,1)\}y_i+h_l\{[\bigvee_{k\neq l}\theta(0,0)]\vee\theta(1,1)\}y_l}{\sum_{j\neq l}h_j\{\theta(1,0)\vee[\bigvee_{\substack{k\neq j\\k\neq l}}\theta(0,0)]\vee\theta(0,1)\}+h_l\{[\bigvee_{k\neq l}\theta(0,0)]\vee\theta(1,1)\}}=\frac{h_ly_l}{h_l}=y_l.$$

这说明 $F(x)$ 是插值函数,故 $F(x)$ 是以 A'_i 为基函数的一元分段插值函数. 此外,$\forall x\in X$,不难验证 $\sum_{i=1}^{n}A'_i(x)=1$,即 A' 恰为 X 的一个模糊划分.

必要性. 在条件(*)下,由式(8)知

$$(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i B'(y_i) y_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i B'(y_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i [\bigvee_{k\neq i} \theta(A_k(x),0) \vee \theta(A_i(x),1)] y_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i [\bigvee_{k\neq i} \theta(A_k(x),0) \vee \theta(A_i(x),1)]}.$$

若要使 $F(x)$ 为插值函数，首先必须要求 $F(x)$ 有意义且不是阶跃输出函数;其次，对任意的 $1 \leqslant l \leqslant n$，应有 $F(x_l) = y_l$. 因此,由 $F(x)$ 有意义且不是阶跃输出函数可知,对任意的 x,至少存在某个 i,使得 $B'(y_i) = \bigvee_{k\neq i} \theta(A_k(x),0) \vee \theta(A_i(x),1) \neq 0$,且对任意的 i,$B'(y_i)$ 不恒为常数. 此即蕴涵算子 θ 满足定理中的条件 i). 同时,

$$F(x_l) = \sum_{i=1}^{n} A_i'(x_l) y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i [\bigvee_{k\neq i} \theta(A_k(x_l),0) \vee \theta(A_i(x_l),1)]}{\sum_{j=1}^{n} h_j [\bigvee_{k\neq j} \theta(A_k(x_l),0) \vee \theta(A_j(x_l),1)]} y_i =$$

$$\frac{\sum_{i\neq l} h_i \{\theta(1,0) \vee [\bigvee_{\substack{k\neq i\\ k\neq l}} \theta(0,0)] \vee \theta(0,1)\} y_i + h_l \{[\bigvee_{k\neq l} \theta(0,0)] \vee \theta(1,1)\} y_l}{\sum_{j\neq l} h_j \{\theta(1,0) \vee [\bigvee_{\substack{k\neq j\\ k\neq l}} \theta(0,0)] \vee \theta(0,1)\} + h_l \{[\bigvee_{k\neq l} \theta(0,0)] \vee \theta(1,1)\}}.$$

要使 $F(x_l) = y_l$ 成立，必有 $\theta(0,0) \vee \theta(1,0) \vee \theta(0,1) = 0$, 且 $\theta(0,0) \vee \theta(1,1) > 0$, 即 $\theta(0,0) = \theta(1,0) = \theta(0,1) = 0$ 且 $\theta(1,1) > 0$. 此即蕴涵算子 θ 满足定理中的条件 ii). 证毕.

注 1 由定理1中的充要条件易验证文献[9 ~ 12]中有29个蕴涵算子构造的模糊系统 $FC(\theta, \vee)$ 均具有插值性,它们分别为 $\theta_{13},\cdots,\theta_{16},\theta_{27},\theta_{32},\cdots,\theta_{36},\theta_{39},\theta_{41},\theta_{43},\theta_{44},\theta_{96},\theta_{97},\theta_{107},\theta_{111},\theta_{112},\theta_{122},\theta_{124},\theta_{125},\theta_{127},\theta_{129},\theta_{130},\theta_{131},\theta_{133},\theta_{436}$ 和 θ_{437},其具体表达式见文献[9 ~ 12],其中 θ_{13},θ_{14} 分别为 Mamdani 蕴涵算子和 Larsen 蕴涵算子.

4 $FS(\theta,\wedge)$ 具有插值性的充要条件(Sufficient and necessary conditions for $FS(\theta, \wedge)$ possessing interpolation property)

下面不加证明地给出模糊系统 $FS(\theta, \wedge)$ 具有插值性的充要条件.

定理 2 在条件(*)下, 存在一组基函数 $\mathscr{A}' = \{A_i'\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}$ 使得由蕴涵算子 θ 构造的模糊系统近似为以 A_i' 为基函数的一元分段插值函数的充要条件为

i) 对任意的 $x \in X$, 至少存在一个 i, 使得 $\theta(A_i(x),1) \cdot \theta(A_k(x),0) > 0$, 其中 $i = 1,2,\cdots,n$, $k \neq i$,且对任意的 k,i, $\bigwedge_{k\neq i} \theta(A_k(x),0) \wedge \theta(A_i(x),1)$ 不恒为常数;

ii) $\theta(1,0) \cdot \theta(0,1) = 0, \theta(0,0) \cdot \theta(1,1) > 0$.

此时 $F(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i'(x) y$,且基函数组 $\mathscr{A}'$ 恰为 X 的一个模糊划分.

注 2 由定理2中的充要条件易验证文献[9 ~ 12]中有40个蕴涵算子构造的模糊系统 $FC(\theta,\wedge)$ 均具有插值性,它们分别为 $\theta_0, \cdots, \theta_3, \theta_6, \theta_9, \theta_{21}, \theta_{29}, \theta_{30}, \theta_{31}, \theta_{101}, \theta_{109}, \theta_{113}, \theta_{114}, \theta_{116}, \theta_{117}, \theta_{119}, \theta_{120}, \theta_{181}, \theta_{183}, \theta_{438}, \theta_{64}, \cdots, \theta_{67}, \theta_{75}, \theta_{198}, \theta_{203}, \theta_{211}, \theta_{219}, \theta_{220}, \theta_{221}, \theta_{278}, \theta_{284}, \theta_{285}, \theta_{287}, \cdots, \theta_{291}$ 和 θ_{341}.

5 结论(Conclusion)

如果一个模糊系统具有插值性,那么该模糊系统具有泛逼近性. 本文考虑了由具有某些性质的蕴涵算子构造的模糊系统的插值性,得到的具体结果如下:

1) 通过分析确定模糊系统的输出函数一般算法,指出由蕴涵算子构造模糊系统是否具有插值性关键取决于模糊蕴涵算子 $\theta(a,b)$ 在 $b = 0$ 和 $b = 1$ 时的表达式或取值;

2) 由蕴涵算子的性质分别给出了模糊系统 $FC(\theta, \vee)$ 与 $FS(\theta, \wedge)$ 具有插值性的充要条件;

3) 由此充要条件验证了在规则取并时29个蕴涵算子构成的模糊系统具有插值性;在规则取交时40个蕴涵算子构成的模糊系统具有插值性.

参考文献(References):

[1] WANG Lixin. Fuzzy systems are universal approximators [C] *Proc of IEEE Int Conf on Fuzzy Systems*. San Diego, CA: [s. n.],1992:1163 - 1170.

[2] YING Hao. Sufficient conditions on general fuzzy systems as function approximator [J]. *Automatica*, 1994, 30(3): 521 - 525.

[3] YING Hao, Chen G R. Necessary conditions for some typical fuzzy systems as universal approximators [J]. *Automatica*, 1997, 33(7):1333-1338.

[4] LI Hongxing. Interpolation mechanism of fuzzy control [J]. *Science in China (Series E)*, 1998, 41(3):312-320.

[5] 吴望名. 模糊推理的原理和方法[M]. 贵阳:贵州科技出版社, 1994.
(WU Wangming. *Principle & Methods of Fuzzy Inference* [M]. Guizhou: Guizhou Science and Technology Press, 1994.)

[6] DUBOIS D, PRADE H. Fuzzy sets in approximate reasoning, part 1 and part 2 [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1991, 40(1): 143-244.

[7] 汪培庄,李洪兴. 模糊系统理论与模糊计算机[M]. 北京:科学出版社, 1995.
(WANG Peizhuang, LI Hongxing. *The theory of Fuzzy System and Fuzzy Computer* [M]. Beijing: Science Press, 1995.)

[8] 李洪兴, 王加银, 苗志宏. 模糊控制系统建模中的边缘线性化方法[J]. 自然科学进展, 2003, 13(5):466-472.
(LI Hongxing, WANG Jiayin, MIAO Zhihong. Margin linearization method in modeling on fuzzy control [J]. *Progress in Natural Science*, 2003, 13 (5): 466-472.)

[9] 尤飞,冯艳宾,李洪兴. 模糊蕴涵算子及其构造(Ⅰ)[J]. 北京师范大学学报, 2003, 39(5):606-611.
(YOU Fei, FENG Yanbin, LI Hongxing. Fuzzy implication operators and their construction (Ⅰ) [J]. *J of Beijing Normal University (Natural Science)*, 2003, 39 (5):606-611.)

[10] 尤飞,冯艳宾,王加银,等. 模糊蕴涵算子及其构造(Ⅱ)[J]. 北京师范大学学报, 2004, 40(2):168-176.
(YOU Fei, FENG Yanbin, WANG Jiayin, et al. Fuzzy implication operators and their construction (Ⅱ) [J]. *J of Beijing Normal University (Natural Science)*, 2004, 40(2):168-176.)

[11] 尤飞, 李洪兴. 糊蕴涵算子及其构造模(Ⅲ) [J]. 北京师范大学学报, 2004, 40(4):427-432.
(YOU Fei, LI Hongxing. Fuzzy implication operators and their construction (Ⅲ) [J]. *J of Beijing Normal University (Natural Science)*, 2004, 40(4): 427-432.)

[12] 尤飞, 李洪兴. 糊蕴涵算子及其构造模(Ⅳ) [J]. 北京师范大学学报, 2004, 40 (5): 588-599.
(YOU Fei, LI Hongxing. Fuzzy implication operators and their construction (Ⅳ). *J of Beijing Normal University (Natural Science)*, 2004, 40(5):588-599.)

[13] 李洪兴, 彭家寅, 王加银. 常见模糊蕴涵算子的模糊系统及其响应函数[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(2):341-347.
(LI Hongxing, PENG Jiayin, WANG Jiayin. Fuzzy systems and their response functions based on commonly used fuzzy implication operators [J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(2):341-347.)

[14] 李洪兴,尤飞,彭家寅,等. 基于某些模糊蕴涵算子的模糊控制器及其响应函数[J]. 自然科学进展, 2003, 13(10): 1073-1077.
(LI Hongxing, YOU Fei, PENG Jiayin, et al. Fuzzy controllers based on some fuzzy implication operators and their response functions [J]. *Progress in Natural Science*, 2003, 13 (10): 1073-1077.)

[15] BUCKLEY J, HAYASHI Y. Can approximate reasoning be consistent [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, 65(1):13-18.

作者简介:

侯 健 (1971—), 女, 博士研究生, 主要研究方向为模糊系统与智能控制等, E-mail: houjian0351@163.com;

李洪兴 (1953—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为模糊系统、智能控制、知识表示与数据挖掘等, E-mail: lhxqx@bnu.edu.cn;

王加银 (1974—), 男, 副教授, 主要研究方向为智能控制, E-mail: wjy@bnu.edu.cn.