

非线性采样控制系统的 Lagrange 稳定性

郭 戈

(大连海事大学 自动化学院, 辽宁 大连 116026)

摘要: 针对由具有外部慢时变输入信号的非线性被控对象和线性数字控制器构成的非线性采样系统, 采用非线性跳跃系统方法及其线性化策略, 得到了这类系统在理想离散化方式和无限字长数字控制器作用下(即不考虑量化因素)的 Lagrange 稳定(最终有界)条件. 并指出, 当考虑数字控制器和接口器件的非线性量化因素影响时, 只要非线性量化环节及其相应偏导数有界, 则所得稳定性结论仍然成立.

关键词: 采样系统; Lagrange 稳定性; 量化影响; 非线性跳跃系统

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Lagrange stability of nonlinear sampled-data control systems

GUO Ge

(School of Automation, Dalian Maritime University, Dalian Liaoning 116026, China)

Abstract: For nonlinear sampled-data systems consisting of a nonlinear plant with slowly varying exogenous input signal and a linear digital controller, the well established methodology for nonlinear systems with jumps and corresponding linearization approach are used to obtain Lagrange stability (ultimate boundedness) conditions for such systems under ideal discretization and infinite word-length digital controller (i. e. without quantization effect). When the nonlinear quantization effects of the digital controller and the interface elements are considered, the stability result still holds given that the nonlinearity and its partial derivatives are bounded.

Key words: sampled-data system; Lagrange stability; quantization effect; nonlinear system with jumps

1 引言 (Introduction)

采样控制系统的研究已有数十年的历史^[1-3], 但大多数研究结果都没有考虑数字控制器和接口器件的量化影响. 文献[4]研究了量化因素对线性采样控制系统的影响, L. Hou 等^[5]进而研究了由非线性被控对象

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + Ke(t), \\ y(t) &= Lx(t) \end{aligned}$$

和线性数字控制器

$$\begin{aligned} u(k+1) &= Mw(k) + Du(k), \\ p(k) &= Nu(k) \end{aligned} \quad (1)$$

构成的非线性采样系统在量化因素下的稳定性. 其中: $x \in \mathbb{R}^n, y, w \in \mathbb{R}^l, u \in \mathbb{R}^p, e, p \in \mathbb{R}^m, K, L, D$ 和 M 为适当维数的实矩阵, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为连续可微函数且 $f(0) = 0$. 对无限字长数字控制器(即不考虑量化因素), $B = KN, C = ML, e(k) = p(k) = Nu(k), w(k) = y(k) = Lx(k)$. 文献[5]证明, 如

果上述非线性采样控制系统满足如下条件, 则其原点平衡点一致渐近稳定:

$$\rho \left(\begin{bmatrix} e^{AT} & \int_0^T e^{A\tau} B d\tau \\ C & D \end{bmatrix} \right) < 1. \quad (2)$$

其中: $A = \partial f(0) / \partial x, \rho(A)$ 表示方阵 A 的谱半径. 当考虑量化因素影响时, 该文献证明上述非线性系统在满足该条件的前提下的一致有界.

本文研究具有慢时变输入信号的非线性采样控制系统的 Lagrange 稳定性, 得到了其稳定条件.

2 不考虑量化因素时的稳定性 (Stability without quantization effect)

本节考虑的非线性采样系统的数字控制器与式(1)相同, 其被控对象则具有一个慢时变外部输入信号, 即

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), d(t)) + Ke(t), \\ y(t) &= Lx(t). \end{aligned}$$

其中: $d(t)$ 为慢时变外部输入信号, $f(x, d)$ 为包含原点的某开连通集上的二次连续可微函数, 且 $f(0, 0) = 0$.

对于理想接口器件和理想数字控制器, 由于 $e(k) = p(k) = Nu(k), w(k) = y(k) = Lx(k)$, 故上述系统可写为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), d(t)) + Bu(t), \\ u(t) = u(k), \\ u(k+1) = Cx(k) + Du(k). \end{cases} \quad (3)$$

由于该系统包含一个慢时变外部输入信号 $d(t)$, 所以此时系统不一定在原点平衡点一致渐近稳定, 甚至可能不存在原点平衡点. 因此本文研究这类系统的有界性, 或 Lagrange 稳定性.

首先假定采样系统对应于时变外部输入信号的定常值 $d(t) = \alpha$ 具有一组定常工作点, 并假定某包含原点的紧致凸集 Γ 上存在连续可微函数 $\bar{x}(\cdot)$ 和 $\bar{u}(\cdot)$ 满足

$$\begin{aligned} f(\bar{x}(\alpha), \alpha) &= 0, \\ \bar{u}(\alpha) &= C\bar{x}(\alpha) + D\bar{u}(\alpha), \quad \alpha \in \Gamma. \end{aligned} \quad (4)$$

定义采样系统(3)的状态为

$$x_e(t) = [x^T(t), u^T(k+1)]^T,$$

进而有定常工作点

$$\bar{x}_e(\alpha) = [\bar{x}^T(\alpha), \bar{u}^T(\alpha)]^T.$$

记被控系统关于定常工作点的线性化系统矩阵为

$$A(\alpha) = \frac{\partial f(\bar{x}(\alpha), \alpha)}{\partial x}, \quad (5)$$

并做如下假设:

A1) 非线性采样系统(3)的定常工作点 $\bar{x}_e(\alpha)$ 对所有 $\alpha \in \Gamma$ 均满足

$$\rho \left[\begin{array}{c|c} e^{A(\alpha)T} & \int_0^T e^{A(\alpha)\tau} B d\tau \\ \hline C & D \end{array} \right] \leq \lambda < 1, \quad (6)$$

即该系统在所有的 $\bar{x}_e(\alpha)$ 处一致渐近稳定;

A2) 对任意 $t_0 \geq 0$, 连续可微外部输入信号 $d(t) \in \Gamma$ 均满足

$$\|x_e(t_0) - \bar{x}_e(d(t_0))\| < \gamma_1,$$

$$\sup_{t \geq t_0} \|\dot{d}(t)\| < \gamma_2, \quad t \geq t_0.$$

其中 γ_1 和 γ_2 为正常数.

定理 1 对于满足定常工作点条件(4) 以及假设 A1) 和 A2) 的非线性采样系统(3), 存在 $t_1 \geq t_0$ 使系统满足下述最终有界性, 即 Lagrange 稳定性:

$$\|x_e(t) - \bar{x}_e(d(t))\| \leq \xi e^{-\delta(t-t_0)} \|x_e(t_0) - \bar{x}_e(d(t_0))\|, \quad t_0 \leq t < t_1,$$

$$\|x_e(t) - \bar{x}_e(d(t))\| \leq b(\sup_{t \geq t_0} \|\dot{d}(t)\|), \quad t \geq t_1.$$

其中: ξ 和 δ 为正常数, $b(\cdot)$ 为严格递增连续函数, 且 $b(0) = 0$.

证 非线性采样系统(3)可写为非线性跳跃系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= f_c(x_e(t), d(t)), \quad t > 0, \quad t \neq kT, \\ x_e(kT) &= f_j(x_e(kT^-), d(kT^-)), \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

其中

$$f_j(x_e(kT^-), d(kT^-)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_j(x_e(kT - \varepsilon), d(kT - \varepsilon)),$$

$$f_j(x_e, d) = \begin{bmatrix} x \\ Cx + Du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix} x_e,$$

$$f_c(x_e, d) =$$

$$\begin{bmatrix} f(x, d) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} f(x, d) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_e,$$

且假设对定常外部输入 $d(t) = \alpha (\alpha \in \Gamma)$, 有

$$f_c(\bar{x}_e(\alpha), \alpha) = 0, \quad f_j(\bar{x}_e(\alpha), \alpha) = \bar{x}_e(\alpha).$$

定义

$$A_c(\alpha) = \frac{\partial f_c}{\partial x_e}(\bar{x}_e(\alpha), \alpha),$$

$$A_j(\alpha) = \frac{\partial f_j}{\partial x_e}(\bar{x}_e(\alpha), \alpha).$$

由于函数 f_c 和 f_j 为光滑函数, 集合 Γ 为紧致凸集, 因此

$$\begin{cases} \|A_j(\alpha)\| \leq \eta_j, \quad \left\| \frac{\partial \bar{x}_e}{\partial \alpha}(\alpha) \right\| \leq \mu_x, \quad \alpha \in \Gamma, \\ \|A_c(\alpha_2) - A_c(\alpha_1)\| \leq \eta_c \|\alpha_2 - \alpha_1\|, \quad \alpha_2, \alpha_1 \in \Gamma, \end{cases}$$

据此可做如下展开:

$$f_c(\Phi + \bar{x}_e(\alpha), \alpha) = A_c(\alpha)\Phi + R_c(\Phi, \alpha),$$

$$f_j(\Phi + \bar{x}_e(\alpha), \alpha) = \bar{x}_e(\alpha) + A_j(\alpha)\Phi + R_j(\Phi, \alpha).$$

其中

$$\Phi(t) = x_e(t) - \bar{x}_e(d(t)),$$

$$R_c(\Phi, \alpha) = \int_0^\Phi \left[\frac{\partial f_c}{\partial x_e}(\varphi + \bar{x}_e(\alpha), \alpha) - A_c(\alpha) \right] d\varphi,$$

$$R_j(\Phi, \alpha) = \int_0^\Phi \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_e}(\varphi + \bar{x}_e(\alpha), \alpha) - A_j(\alpha) \right] d\varphi.$$

很显然, 对所有 $\alpha \in \Gamma, R_c(\Phi, \alpha)$ 和 $R_j(\Phi, \alpha)$ 在 $\Phi = 0$ 处趋于零, 且在该处对所有 $\alpha \in \Gamma$ 一致连续, 因此有

$$\dot{\Phi}(t) =$$

$$f_c(\Phi(t) + \bar{x}_e(d(t)), d(t)) - \frac{\partial \bar{x}_e}{\partial \alpha}(d(t)) \dot{d}(t) =$$

$$A_c(d(t))\Phi + R_c(\Phi, d(t)) - \frac{\partial \bar{x}_e}{\partial \alpha}(d(t)) \dot{d}(t),$$

$$\Phi(kT) = f_j(\Phi(kT^-) + \bar{x}_e(d(kT)), d(kT)) - \bar{x}_e(d(kT)) = A_j(d(kT))\Phi + R_j(\Phi, d(kT)).$$

根据 D. A. Lawrence^[6] 以及其中的 Lemma 1 可知, 特征根条件(6)等价于

$$\rho(e^{A_c(\alpha)^T} A_j(\alpha)) \leq \lambda < 1, \quad (7)$$

且当非线性采样系统(3)满足条件(4), 假设 A2) 以及 A1) (或式(7))时, 存在正定矩阵 $P(t, \alpha)$ 满足

$$\begin{aligned} \dot{P}(t, \alpha) + A_c^T(\alpha)P(t, \alpha) + p(t, \alpha)A_c(\alpha) + I &= 0, \\ A_j^T(\alpha)P(kT, \alpha)A_j(\alpha) + I &= P(kT, \alpha), \\ \kappa_1 I &\leq P(t, \alpha) \leq \kappa_2 I, \quad \alpha \in \Gamma, \end{aligned}$$

$$\|P(kT, \alpha_2) - P(kT, \alpha_1)\| \leq \eta_p \|\alpha_2 - \alpha_1\|.$$

其中: $t > 0, t \neq kT, \alpha_2, \alpha_1 \in \Gamma, k \geq 0, \kappa_1, \kappa_2$ 和 η_p 均为正常数. 现定义 Lyapunov 函数

$$V(t, \Phi) = \Phi^T P(t, d(kT))\Phi, \quad t \in [kT, (k+1)T).$$

对所有正常数 κ_1 和 κ_2 , 该函数均满足

$$\kappa_1 \|\Phi\|^2 \leq V(t, \Phi) \leq \kappa_2 \|\Phi\|^2.$$

另外, 由假设 A2) 可知, 对于 $t \in [kT, (k+1)T]$,

$$\|d(t) - d(kT)\| \leq (t - kT)\gamma_2 \leq \gamma_2 T,$$

因此有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \Phi) &= \Phi^T \dot{P}(t, d(kT))\Phi + 2\Phi^T P(t, d(kT))\dot{\Phi}(t) = \\ &= 2\Phi^T P(t, d(kT))R_c(\Phi, d(t)) + \\ &= 2\Phi^T P(t, d(kT))[A_c(d(t)) - A_c(d(kT))]\Phi - \\ &= 2\Phi^T P(t, d(kT))\frac{\partial \bar{x}_e}{\partial \alpha}(d(t))\dot{d}(t) - \|\Phi\|^2 \leq \\ &= -[1 - 2\kappa_2\eta_c\gamma_2 T]\|\Phi\|^2 + \\ &= (2\kappa_2\mu_x\gamma_2 - 2\kappa_2\|R_c(\Phi, d(t))\|)\|\Phi\| \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} V(kT, \Phi(kT)) - V(kT^-, \Phi) &= \Phi^T(kT)P(kT, d(kT))\Phi(kT) - \\ &= \Phi^T P(kT^-, d((k-1)T))\Phi \leq \\ &= -[1 - \eta_p\gamma_2 T]\|\Phi\|^2 + \\ &= \kappa_2(2\eta_j\|R_j(\Phi, d(kT))\| + \|R_c(\Phi, d(kT))\|^2). \end{aligned}$$

其中 $V(kT^-, \Phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V(kT - \varepsilon, \Phi)$. 根据文献[6] 和上述两个不等式, 便可直接证明定理 1.

3 考虑量化因素时的稳定性 (Stability with quantization effect)

当考虑接口器件和数字控制器的量化影响时 (这里考虑常用的定点量化^[5]), 有下述关系:

$$w(k) = Q(y(k)) = Lx(k) + q_y(k),$$

$$\begin{aligned} u(k+1) &= Q(Mw(k) + Du(k)) = \\ &= Mw(k) + Du(k) + q_u(k), \end{aligned}$$

$$e(k) = p(k) = Q(Nu(k)) = Nu(k) + q_p(k).$$

其中: $Q(\theta) = \theta + q(\theta)$, 对所有 $\theta \in \mathbb{R}^n$ 均有 $|q(\theta)| < \varepsilon$, 正常数 ε 的选择取决于所需的量化精度, q_y, q_u 和 q_p 表示包含量化项的向量, 且存在独立于 ε 的正常数 J_ζ , 满足

$$\|q_\zeta(k)\| \leq J_\zeta \varepsilon, \quad \zeta = y, u, p, \quad k = 0, 1, \dots \quad (8)$$

下面将非线性系统(3)写为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), d(t)) + KNu(k) + Kq_p(k), \\ u(k+1) = MLx(k) + Du(k) + q_u(k) + Mq_y(k), \end{cases} \quad (9)$$

并假设

A3) 对于任意 $t_0 \geq 0$, 连续可微量化因素满足

$$\sup_{t \geq t_0} \left\| \frac{\partial q_y(t)}{\partial x} \right\| < \gamma_y, \quad \sup_{t \geq t_0} \left\| \frac{\partial q_u(t)}{\partial u} \right\| < \gamma_u,$$

$$\sup_{t \geq t_0} \left\| \frac{\partial q_p(t)}{\partial u} \right\| < \gamma_p, \quad t \geq t_0.$$

其中 γ_y, γ_u 和 γ_p 为正常数.

在此基础上, 给出关于变输入非线性采样控制系统在量化因素作用下的 Lagrange 稳定性结论.

定理 2 如果非线性采样系统(9)满足条件(8)以及假设 A1) ~ A3), 则该系统 Lagrange 稳定的充分条件是

$$\rho \left(\begin{bmatrix} e^{A(\alpha)^T} & \Psi(\alpha) & 0 \\ C + M \frac{\partial q_y}{\partial x} & 0 & D + \frac{\partial q_u}{\partial u} \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \right) < 1,$$

即

$$\|x_e(t) - \bar{x}_e(d(t))\| \leq$$

$$\tilde{\xi} e^{-\tilde{\delta}(t-t_0)} \|x_e(t_0) - \bar{x}_e(d(t_0))\|, \quad t_0 \leq t < t_1,$$

$$\|x_e(t) - \bar{x}_e(d(t))\| \leq \tilde{b}(\sup_{t \geq t_0} \|\dot{d}(t)\|, \tilde{\omega}), \quad t \geq t_1.$$

其中: $\Psi(\alpha) = \int_0^T e^{A(\alpha)\tau} (B + K \frac{\partial q_p}{\partial u}) d\tau, \tilde{\xi}$ 和 $\tilde{\delta}$ 为正常数, $g(0, 0, 0) = 0$, 函数 $\tilde{b}(\cdot)$ 为严格递增连续函数, 且 $\tilde{b}(0, 0) = 0$, 连续函数

$$\tilde{\omega} = g \left(\sup_{t \geq t_0} \left\| \frac{\partial q_y(t)}{\partial x} \right\|, \sup_{t \geq t_0} \left\| \frac{\partial q_y(t)}{\partial x} \right\|, \sup_{t \geq t_0} \left\| \frac{\partial q_y(t)}{\partial x} \right\| \right).$$

证 首先定义一个中间变量

$$z(k+1) = MLx(k) + Du(k) + q_u(k) + Mq_y(k).$$

令 $\tilde{x}_e(t) = [x^T(t), z^T(k+1), u^T(k)]^T, u(k) = z(k)$ 和第 2 节类似, 设连续可微函数 $\tilde{x}(\cdot), \tilde{z}(\cdot)$ 和 $\tilde{u}(\cdot)$ 满足

$$\begin{aligned} f(\bar{x}(\alpha), \alpha) &= 0, \\ \bar{z}(\alpha) &= C\bar{x}(\alpha) + D\bar{u}(\alpha) + c(\alpha), \\ \bar{u}(\alpha) &= \bar{z}(\alpha), \alpha \in \Gamma. \end{aligned}$$

其中 c 对于每个 $\alpha \in \Gamma$ 都为常数. 此时, 系统(9)等价于非线性跳跃系统

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_e(t) = \tilde{f}_c(\tilde{x}_e(t), d(t)), t > 0, t \neq kT, \\ \tilde{x}_e(kT) = \tilde{f}_j(\tilde{x}_e(kT^-), d(kT^-)), k \geq 0. \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{f}_c(\tilde{x}_e, d) &= f_c(\tilde{x}_e, d) + \begin{bmatrix} Kq_p(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{f}_j(\tilde{x}_e, d) &= f_j(\tilde{x}_e, d) + \begin{bmatrix} 0 \\ Mq_y(t) + q_u(t) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} f_c(\tilde{x}_e, d) &= \begin{bmatrix} f(x, d) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}_e, \\ f_j(\tilde{x}_e, d) &= \begin{bmatrix} x \\ Cx + Du \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ C & 0 & D \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}_e, \end{aligned}$$

进而有

$$\begin{aligned} \bar{A}_c(\alpha) &= \frac{\partial \tilde{f}_c}{\partial \tilde{x}_e}(\tilde{x}_e(\alpha), \alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + q_c(\alpha), \\ \bar{A}_j(\alpha) &= \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial \tilde{x}_e}(\tilde{x}_e(\alpha), \alpha) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ C & 0 & D \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} + q_j(\alpha), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} q_c(\alpha) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & K \frac{\partial q_p}{\partial u} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ q_j(\alpha) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M \frac{\partial q_y}{\partial x} & 0 & \frac{\partial q_u}{\partial u} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

从定理1的证明可以看出, 要证明定理2, 只需证明非线性跳跃系统(10)满足 $\rho(e^{\lambda_c(\alpha)T} \bar{A}_j(\alpha)) \leq \bar{\lambda} < 1$ 即可. 由于通过简单的数学推演可得

$$e^{\lambda_c(\alpha)T} \bar{A}_j(\alpha) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_c(\alpha)T} \Psi(\alpha) & 0 \\ C + M \frac{\partial q_y}{\partial x} & 0 & D + \frac{\partial q_u}{\partial u} \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}.$$

于是结合题设条件便可以证明定理2.

4 实例(Example)

考虑文献[7]例13.3中的光盘播放器速度控制问题, 锭子电机的特性可用非线性微分方程描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= f_1(\theta, \omega, T_{in}), \\ \dot{\theta} &= f_2(\theta, \omega, T_{in}). \end{aligned}$$

其中 ω 和 θ 分别表示锭子角速度(rad/s)和转动角度(rad), T_{in} 为输入扭矩(N·m),

$$f_1(\theta, \omega, T_{in}) = k_\omega [T_d(\omega) + T_{in}],$$

$$f_2(\theta, \omega, T_{in}) = k_\theta \omega.$$

这里: K_ω 表示负载惯性的倒数($s^2/N \cdot m$), k_θ 为传感器增益, T_d 表示惯性负载上的摩擦扭矩(N·m), 且满足

$$T_d(\omega) = k_{vf} \omega + k_{cf} \text{sgn}(\omega) + k_{sf} \text{sgn}(\omega) P(\omega).$$

k_{vf}, k_{cf}, k_{sf} 分别表示线性粘性阻力系数(N·m·s/rad)、库仑摩擦扭矩(N·m)以及静态摩擦扭矩(N·m); $p(\omega) = e^{-|\omega/\sigma|}$, σ 为速度常数(rad/s); 符号函数 $\text{sgn}(\omega)$ 定义如下:

$$\text{sgn}(\omega) = \begin{cases} +1, & \omega > 1, \\ -1, & \omega < 1. \end{cases}$$

该系统线性化后可写为

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\omega k_{vf} & 0 \\ k_\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_\omega \\ 0 \end{bmatrix} T_{bias} + \begin{bmatrix} k_\omega \\ 0 \end{bmatrix} T_{in}.$$

其中

$$T_{bias} = -K_{cf} \text{sgn}(\omega).$$

施加于该被控系统的外部时变扰动输入项为一个可以用符号函数描述的扭矩信号, 且满足 $\sup_{t \geq t_0} |d(t)| = 2k_{cf}$, 即条件A2)成立. 另外, 式(5)中所定义的 $A(\alpha)$ 此时为常数矩阵, 文中的条件(6)等价于式(2). 而且, 对于 $\omega = 0$, 可设计控制器

$$u(k+1) = Mw(k),$$

使闭环系统的原点平衡点(定常工作点)一致渐近稳定, 即条件A1)可以满足. 这里, $u(t) = T_{in}(t)$. 同时, 容易验证在原点处条件(4)满足. 如果不考虑量化因素, 由定理1可知该系统有界. 当考虑量化因素时, 假设量化过程选择为取整处理, 即

$$Q(v) = \text{round}(v),$$

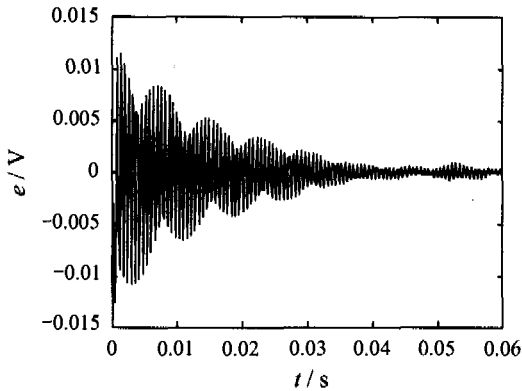
则有

$$u(t) = u(k) + q_u(k),$$

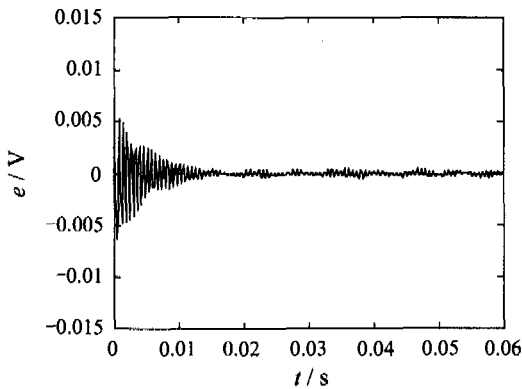
$$w(k) = \bar{y}(t) + q_y(k),$$

$$q_p(k) = 0.$$

其中 $\bar{y}(t)$ 为 $y(t)$ 的整数部分. 该过程可保证假设 A3) 成立. 上述量化过程和控制器设计可以保证定理 2 的题设条件成立, 因此, 该锭子速度控制系统有界.



(a) 文献[8]



(b) 仿真结果

图1 仿真结果

Fig. 1 Simulation results

事实上,可采用文献[8]的方法得到类似的有界性结果,只是此时将量化因素与线性化误差的影响等同处理. 相比而言,本文的方法更优越. 图1(图中 e 为跟踪误差)给出了光盘播放器锭子速度控制系统的仿真结果对比,其中采样周期为 0.2ms.

5 结论(Conclusion)

本文提出了变输入非线性采样控制系统的 Lagrange 稳定性定理,通过证明指出,在考虑量化因素和不考虑量化因素两种情况下,只要时变输入非线性采样系统对应于时变输入的定常值,存在一组渐近稳定的定常工作点,且初始状态离该组工作点足够近,该非线性系统的 Lagrange 稳定性总能得到保证.

参考文献(References):

- [1] CHEN T, FRANCIS B A. Input-output stability of sampled - data systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(1): 50 - 54.
- [2] FRANCIS B A, GEORGIU T T. Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controllers [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1988, 33(2): 820 - 832.
- [3] KHALIL H K, KOKOTOVIC P V. On stability properties of nonlinear systems with slowly varying inputs [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(1): 229.
- [4] MILLER R K, MICHEL A N, FARRELL J A. Quantizer effects on steady-state error specifications of digital feedback control systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(2): 651 - 654.
- [5] HOU L, MICHEL A N, YE H. Some quantitative properties of sampled-data control systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(12): 1721 - 1725.
- [6] LAWRENCE D A, RUGH W J. On a stability theorem for nonlinear systems with slowly varying inputs [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1990, 35(2): 860 - 864.
- [7] FRANKLIN G F, POWELL J D, WORKMAN M. *Digital Control of Dynamic Systems* [M]. 3rd ed. Boston: Addison Wesley Longman, Inc., 1998: 553 - 556.
- [8] HU B, MICHEL A N. Stability analysis of digital feedback control systems with time-varying sampling periods [J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 875 - 905.

作者简介

郭戈 (1972—), 男, 教授, 博士生导师, 1994年毕业于东北大学, 1998在东北大学获博士学位, 主要研究方向为工业过程建模与控制、控制系统分析与设计等, E-mail: geguo@yeah.net.