文章编号: 1000-8152(2006)02-0302-04

Hopfield网络的全局指数稳定性

朱培勇[1,2], 孙世新[3]
(1. 电子科技大学 应用数学学院,四川 成都 610054; 2. 西南民族大学 计算机科学与技术学院,四川 成都 610041;
3. 电子科技大学 计算机科学与工程学院,四川 成都 610054)

摘要: 在研究Hopfield神经网络时通常都假设输 出响应函数是光滑的增函数. 但实际应用中遇到的大多数函数都是非光滑函数. 因此,本文将 通常论文中Hopfield神经网络的输出响应函数连续可微的假设削弱为满足Lipschitz条件. 通 过引入Lyapunov函数的方法,证明了Hopfield神经网络全局指数收敛的一个充分性定理. 并且由此定理获得该类网络全局指数稳定的几个判据. 这定理与判据是近期相应文献主要结果的 极大改进.

关键词: Hopfield网络; 全局指数收敛; 全局指数稳定; 平衡点; Lipschitz条件
中图分类号: TN911 **文献标识码**: A

Globally exponential stability for Hopfield neural networks

ZHU Pei-yong[1,2], SUN Shi-xin[3]
(1. Shool of Applied Mathematics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu Sichuan 610054, China;
2. Shool of Computer Science & Technology, Southwest University for Nationalities, Chengdu Sichuan 610041, China;
3. School of Computer Science & Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu Sichuan 610054, China)

Abstract: Hopfield neural networks are usually discussed under the assumption that all output response functions are smooth and monotone increasing. However, output responses are nonsmooth in most practical applications. In this paper, continuous differentiable conditios of output response functions of Hopfied neural networks in usual papers is reduced to Lipschitz condition. A theorem on globally exponential convergence of solutions of the networks is shown by a Lapunov functional. Some new criteria on globally exponential stability of the networks are obtained. These results greatly improve the main results of recent related papers.

Key words: Hopfield neural networks; globally exponential convergence; globally exponentially stable; equilibrium point; Lipschitz condition

1 引言(Introduction)

2001年,文献[1]讨论了下列推广形式的Hopfield神经网络

$$C_i\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{u_i(t)}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}v_j+I_i,\ i=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

其中: $v_i=g_i(\lambda_iu_i)$, $T=(T_{ij})_{n\times n}$是系统(1)的关联矩阵; $C_i>0, R_i>0, \lambda_i>0$和$I_i$都是常数并且每个输出响应$g_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n)$都满足如下三个性质: H1) g_i连续可微; H2) g_i在$\mathbb{R}$上有界; H3) 导 函数g_i'在$\mathbb{R}$有界并且$\forall u_i\in\mathbb{R}, g_i'(u_i)>0$. 其中: $\mathbb{R}$表示全体的实数集.

下面两个结果分别是文献[1]中的主要结果: Lemma 1与Theorem 1.

S1) 如果输出响应$g_i(i=1,2,\cdots,n)$满足上面的条件H1)~H3),则系统(1)必有一个平衡点;

S2) 如果$\mu(T)=\lambda_{\max}[(T+T^{\mathrm{T}})]<h, h=1/\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sup\limits_{z}[\lambda_iR_ig_i'(z)]$,则对于任 何输入$I_i(i=1,2,\cdots,n)$,系统(1)有唯一的平衡点$u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$,并且存在常数$\gamma\geqslant1$使得对于$\forall t\geqslant0, \forall u_0=(u_1^{(0)},u_2^{(0)},\cdots,u_n^{(0)})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$,系统(1)的轨道$u(t;u_0)$满足

$$\|u(t;u_0)-u^*\|\leqslant n\gamma\|u_0-u^*\|\exp(-\frac{\eta\cdot t}{2\tau}). \tag{2}$$

其中: $\eta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\inf\limits_{z}[1-\lambda_iR_iu(T)^+g_i'(z)]\geqslant0$, $\mu(T)^+=\max(0,\mu(T))$并且$\tau=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(R_iC_i)$.

收稿日期: 2003-10-09; 收修改稿日期: 2005-04-20.
基金项目: 电子科技大学重点基金资助项目; 国家民委重点基金资助项目(20040816012).

本文首先证明:在 S1)中,条件 H1)是不必要的并且 H3)不是完全必要的. 即,只要保留 H2)并且把 H3)削减为每个 g_i 满足 Lipschitz 条件,就有 S1)完全相同的结果. 从而,S2)的条件和结论也得到大的简化. 并且通过本文所获得的结果得到了关于如下 Hopfield 神经网络的几个推论:

$$C_i\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{u_i(t)}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}g_j(u_j(t))+I_i,\ i=1,2,\cdots,n. \tag{3}$$

最后,为了加深读者对本文结果的理解,用一个例子说明本文结果在理论与应用方面的价值.

定义 1 一个函数 g 称为在实直线 $\mathbb{R}$ 是满足 Lipschitz 条件的,如果存在一个常数 k 使得 $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$,有 $|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant k|x_1-x_2|$. 称常数 k 是函数 g 的 Lipschitz 常数,如果 $k=\inf\{\alpha\in\mathbb{R}^+:|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant\alpha|x_1-x_2|,\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$.

不难看出:1) 在 $\mathbb{R}$ 上满足 Lipschitz 条件的函数必是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数;2) 满足条件 H3)的函数 g_i 必在 $\mathbb{R}$ 满足 Lipschitz 条件. 但是,在 $\mathbb{R}$ 上满足 Lipschitz 条件的函数未必满足条件 H3). 因为能够找到函数 $g(x)=\dfrac{|x+1|-|x-1|}{2}$,它在 $\mathbb{R}$ 满足 Lipschitz 条件但在 $\mathbb{R}$ 上不是连续可微的.

定义 2[2,3] 设 $u^*(t)=(u_1^*(t),u_2^*(t),\cdots,u_n^*(t))^{\mathrm{T}}$ 是一个系统(正如系统(1)或系统(3))的一个特解,这系统被称为是全局指数收敛于 $u^*(t)$ 的,如果存在常数 $\alpha>0$ 和 $M\geqslant 1$ 使得它的任一个解 $u(t)$ 当 $t\geqslant 0$ 时,恒有

$$\|u(t)-u^*(t)\|\leqslant M\|u(0)-u^*(0)\|\mathrm{e}^{-\alpha t}. \tag{4}$$

其中 $\|u-u^*\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u_i-u_i^*)^2}$.

系统(1)或系统(3)的一个平衡点 $u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)^{\mathrm{T}}$ 称为是全局指数稳定的,如果该系统全局指数收敛于 u^* 的.

2 主要结果及其证明(Main results and their proof)

根据 Brouwer 不动点定理,可以平凡地推证下述定理的正确性.

定理 1 在系统(1)中,如果每一个输出响应 $g_i(u_i)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界并且连续,则该系统至少有一个平衡点.

这结果表明:将 S1)中 Lemma 1 条件 H1)的每个 g_i 连续可微削减为连续,H3)削减为每个 g_i 满足 Lipschitz 条件并且保留条件 H2),就有 S1)完全相同的结果. 下面定理是 S2)的一种改进:

定理 2 假设系统(1)的每个输出响应 g_i 都满足 Lipschitz 条件,如果

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda_jk_j|T_{ij}|+\lambda_ik_i|T_{ji}|)<\frac{2}{R_i},\ i=1,2,\cdots,n, \tag{5}$$

则存在两个常数 $\varepsilon>0$ 和 $M\geqslant 1$ 使得对于系统(1)的任何一对解 $u(t)$ 和 $v(t)$,对于 $\forall t\geqslant 0$ 时,有

$$\|u(t)-v(t)\|\leqslant M\|u(0)-v(0)\|\mathrm{e}^{-\varepsilon t}. \tag{6}$$

其中 k_i 是 g_i 的 Lipschitz 常数.

证 根据式(5),可取到充分小的 $\varepsilon>0$ 使得对于每个 $i(i=1,2,\cdots,n)$,有

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda_jk_j|T_{ij}|+\lambda_ik_i|T_{ji}|)<2(\frac{1}{R_i}-\varepsilon C_i). \tag{7}$$

假设 $u(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))^{\mathrm{T}}$ 和 $v(t)=(v_1(t),v_2(t),\cdots,v_n(t))^{\mathrm{T}}$ 是系统(1)的任意一对解,则对于每个 $i(i=1,2,\cdots,n)$,有

$$C_i(u_i(t)-v_i(t))'=-\frac{u_i(t)-v_i(t)}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}[g_j(\lambda_ju_j(t))-g_j(\lambda_jv_j(t))]. \tag{8}$$

现在取 Lyapunov 函数 $W(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}C_i(u_i(t)-v_i(t))^2\mathrm{e}^{2\varepsilon t}$,则对于 $t\geqslant 0$,有

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{u(t)-v(t)}=\\
&\mathrm{e}^{2\varepsilon t}\sum_{i=1}^{n}C_i[(u_i(t)-v_i(t))(u_i(t)-\\
&v_i(t))'+\varepsilon(u_i(t)-v_i(t))^2]=\\
&\mathrm{e}^{2\varepsilon t}\sum_{i=1}^{n}\{(u_i(t)-v_i(t))[-\frac{u_i(t)-v_i(t)}{R_i}+\\
&\sum_{j=1}^{n}T_{ij}(g_j(\lambda_ju_j(t))-g_j(\lambda_jv_j(t)))]+\\
&\varepsilon C_i(u_i(t)-u_i(t))^2\}\leqslant\\
&\mathrm{e}^{2\varepsilon t}\sum_{i=1}^{n}\{-(\frac{1}{R_i}-\varepsilon C_i)(u_i(t)-v_i(t))^2+\\
&\sum_{j=1}^{n}|T_{ij}||g_j(\lambda_ju_j(t))-g_j(\lambda_jv_j(t))||u_i(t)-v_i(t)|\}\leqslant\\
&\mathrm{e}^{2\varepsilon t}\sum_{i=1}^{n}[-(\frac{1}{R_i}-\varepsilon C_i)(u_i(t)-v_i(t))^2+
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j k_j|T_{ij}|\frac{(u_j(t)-v_j(t))^2+(u_i(t)-v_i(t))^2}{2}]\leqslant$$

$$-\frac{e^{2\varepsilon t}}{2}\sum_{i=1}^{n}\{-2(\frac{1}{R_i}-\varepsilon C_i)+\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j k_j|T_{ij}|+$$

$$\lambda_i k_i|T_{ji}|)\}(u_i(t)-v_i(t))^2\leqslant 0,$$

即 $W(t)$ 在无穷区间 $[0,+\infty)$ 上是单调递减的. 从而

$$\frac{1}{2}\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{C_j\}\cdot\|u(t)-v(t)\|^2e^{2\varepsilon t}\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}C_i(u_i(t)-v(t))^2e^{2\varepsilon t}=$$

$$W(t)\leqslant W(0)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}C_i(u_i(0)-v_i(0))^2\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{C_j\}\cdot\|u(0)-v(0)\|^2.$$

记

$$M=\sqrt{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{C_i\}/\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{C_i\}},$$

则

$$\|u(t)-v(t)\|\leqslant M\|u(0)-v(0)\|e^{-\varepsilon t}.$$

由定理1和式(6),可直接推得下一定理:

定理 3 假设系统(1)的每个输出响应 g_i 在 $\mathbb{R}$ 上是有界的并且满足 Lipschitz 条件,如果对于任何 $i(i=1,2,\cdots,n)$,有 $\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j k_j|T_{ij}|+\lambda_i k_i|T_{ji}|)<2/R_i$,则下面两结论都成立:

1° 系统(1)有唯一的平衡点; 2° 系统(1)的每一个解都全局指数收敛于这唯一平衡点. 即,系统的唯一平衡点是全局指数稳定的.

特别地,如果对于每个 i,取 $\lambda_i=1$,则根据定理1和定理3,下列3个推论成立是平凡的.

推论 1 对于系统(3),如果每个输出响应 g_i 在 $\mathbb{R}$ 有界且连续,则该系统至少有一个平衡点.

推论 2 假设系统(3)的每个输出响应 g_i 在 $\mathbb{R}$ 有界且满足 Lipschitz 条件,如果每个 i,有 $\sum_{j=1}^{n}(k_j|T_{ij}|+k_i|T_{ji}|)<\frac{2}{R_i}$,则系统(3)有唯一的平衡点 u^* 并且该平衡点是全局稳定的.

当每个输出响应 $g_i(x)=\frac{1}{2}(|x+1|-|x-1|)$ 时,系统(3)是特殊的细胞神经网络. 因此,有

推论 3 假设 $(T_{ij})_{n\times n}$ 是一个对称矩阵并且每个 $g_i(x)=\frac{1}{2}(|x+1|-|x-1|)$,如果对于每个 i,有 $\sum_{j=1}^{n}|T_{ij}|<\frac{1}{R_i}$,则细胞神经网络(3)有唯一的平衡点并且该平衡点是全局指数稳定的.

3 例子(Example)

例 考虑下列特殊的 Hopfield 神经网络(也是特殊的细胞神经网络)

$$\begin{bmatrix}\frac{du_1}{dt}\\ \frac{du_2}{dt}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}1&-0.5\\-0.5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g(u_1(t))\\g(u_2(t))\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.1\\0.2\end{bmatrix}. \tag{9}$$

其中 $g(u_i)=\frac{1}{2}(|u_i-1|-|u_i-1|),i=1,2.$

因为系统(9)的输出响应函数 $g(u_1),g(u_2)$ 连续且在 $\mathbb{R}$ 上不可微,故不能用 S1)和 S2)来判断该系统是否有唯一平衡点,更谈不上其平衡点是否是全局指数稳定的. 但是,本文的推论3可以判定系统有唯一平衡点并且该平衡点是全局指数稳定的.

事实上,按式(3)的记号,有

$$C_1=C_2=1,\ T_{11}=1,$$

$$T_{12}=T_{21}=-0.5,\ T_{22}=3,$$

$$\frac{1}{R_1}=2,\ \frac{1}{R_2}=4.$$

即

$$|T_{11}|+|T_{12}|=1.5<2=\frac{1}{R_1},$$

$$|T_{21}|+|T_{22}|=3.5<4=\frac{1}{R_2}.$$

根据推论3,系统(9)有唯一的平衡点 $u^*=(u_1^*,u_2^*)^T$ 并且该平衡点是全局指数稳定的 u^*.

另一方面,能够直接求得系统(9)的唯一平衡点是 $u^*=(0,0.2)^T$ 并且该系统的通解为

$$\begin{cases}u_1(t)=Ae^{-1.5t}+Be^{-0.5t},\\ u_2(t)=-7.5Ae^{-1.5t}-2.5Be^{-0.5t}+0.2.\end{cases} \tag{10}$$

其中 A 和 B 都是任意常数. 从而,对于系统(9)的任意一个解 $u(t)=(u_1(t),u_2(t))^T$,当 $t\geqslant 0$ 时,有

$$\|u(t)-u^*\|\leqslant\|u(0)-u^*\|e^{-0.5t}. \tag{11}$$

4 结束语(Conclusion)

本文就连续型 Hopfield 网络的输出响应函数是非光滑的情况下,对具有时滞的连续型 Hopfield 网络的平衡点的存在唯一性和全局指数稳定性进行了讨论. 在不增加任何其他条件的情况下,削弱文献[1]中所讨论的 Hopfield 网络的输出响应的光滑条

件的条件后,得到了文献[1]中各定理完全相同的判据.最后的例子说明所得到的判据在应用中的价值.在上面讨论的 Hopfield 网络中,如果每个输出响应函数都取非光滑函数 $g(u_i) = \frac{1}{2}(|u_i+1| - |u_i-1|)$,则所讨论的网络模型(1)就是 1988 年 L. O. Chua 和 L. Yang 所研究的细胞神经网络模型(参见文献[4,5]).因此,具有这种输出响应函数的神经网络模型在工程应用中的重要性是不言而喻的.

参考文献(References):

[1] CAO Jinde. Global exponential stability of Hopfield neural networks [J]. *Int J of Systems Science*, 2001, 32(2): 233 - 236.

[2] ZHANG Qiang, WEI Xiaopeng, XU Jin. Global exponential stability of Hopfield neural networks with continuously distributed delays [J]. *Physics Letters A*, 2003, 315: 431 - 436.

[3] 张继业, 戴焕云, 邬平波. Hopfiled 神经网络系统的全局稳定性分析[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(2): 180 - 184.
(ZHANG Jiye, DAI Huanyun, WU Pingbo. Global stability analysis in Hopfield neural networks [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(2): 180 - 184.)

[4] CHUA L O, YANG L. Cellular neural networks: theory [J]. *IEEE Trans on Circuits Systems*, 1988, 35(10): 1257 - 1272.

[5] TAKAHASHI N. A new sufficient condition for complete stability of cellular neural networks with delay [J]. *IEEE Trans on Circuits Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2000, 47(6): 793 - 799.

作者简介:

朱培勇　(1956—),男,教授,博士,主要研究方向为拓扑学及其应用、神经网络及其混沌行为的理论与应用,E-mail: zpy6940@sina. con. cn;

孙世新　(1940—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为并行计算与网络算法设计,E-mail: Shxinsun@uestc. edu. cn.