

文章编号: 1000-8152(2006)03-0329-07

数值界不确定性关联大系统分散鲁棒 H_∞ 控制

谢永芳, 蒋朝辉, 桂卫华

(中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083)

摘要: 针对一类状态阵, 控制输入阵及关联阵中存在数值界不确定性的关联大系统, 研究其分散鲁棒 H_∞ 状态反馈和输出反馈控制器设计问题. 基于有界实引理, 推导出了其存在分散鲁棒 H_∞ 控制器的充分条件, 即一组矩阵不等式有解. 利用 Schur 补引理, 通过固定不同变量, 提出了一种构建分散控制器的同伦迭代线性矩阵不等式方法. 所获得的控制器使闭环大系统鲁棒稳定, 并且达到给定的 H_∞ 性能指标. 最后用数值例子说明了所提的设计方法的有效性.

关键词: 数值界不确定性; 分散控制; 鲁棒 H_∞ 控制; 矩阵不等式; 同伦迭代方法

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Decentralized robust H-infinity control for value-bounded uncertain large-scale interconnected systems

XIE Yong-fang, JIANG Zhao-hui, GUI Wei-hua

(College of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410083, China)

Abstract: For a class of large-scale interconnected systems with value-bounded uncertainties existing in the state, control input and interconnected matrices, the design of decentralized robust H-infinity state feedback and decentralized robust H-infinity output feedback controllers is investigated in this paper. Based on the bounded-real lemma, sufficient conditions for the existence of a decentralized robust H-infinity controller are obtained in terms of a set of matrix inequalities. According to Schur complement, a homotopy iterative linear matrix inequality method is then put forward to construct a decentralized robust H-infinity controller by fixing different variables. The controller obtained enables the closed-loop large-scale systems to be robustly stable and to achieve the given H-infinity performance. Finally, a numerical example is given which illustrates the effectiveness of the proposed method.

Key words: value bounded uncertainty; decentralized control; robust H-infinity control; matrix inequality; homotopy iterative method

1 引言 (Introduction)

由于其实现的可靠性、实时性和经济性, 分散控制成为大系统理论中一个重要分支. 一般情况下, 系统模型中含有不确定性, 按照标称参数设计的控制器可能达不到预期的性能, 因而控制器的设计必须考虑不确定性的影响. 目前, 具有范数界或满足匹配条件的不确定性大系统鲁棒 H_∞ 控制问题得到了较深入研究^[1-3], 在实际系统中, 不确定项往往具有数值界表达形式, 这种形式不需要满足匹配条件, 更具一般性^[4]. 对具有数值界不确定性控制问题的研究取得了一些进展, 但主要集中在鲁棒镇定, 鲁棒跟

踪, 鲁棒容错等方面^[4-7], 而对具有数值界不确定性大系统鲁棒分散 H_∞ 控制的研究却很少涉及. 本文针对一类状态阵、控制阵及关联阵中含有数值界不确定性关联大系统, 用线性矩阵不等式 (LMI) 方法^[8], 研究其状态反馈和输出反馈情形下的分散鲁棒 H_∞ 控制问题, 利用有界实引理, 将控制器的设计归结为一组矩阵不等式求解问题. 通过选取适当的同伦函数, 迭代求解分散鲁棒 H_∞ 控制器, 使闭环大系统鲁棒稳定, 并且满足给定的 H_∞ 性能指标.

2 问题描述 (Problem description)

考虑一类由 N 个子系统组成的不确定性关联大

系统,其子系统方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = (A_{ii} + \Delta A_{ii})x_i(t) + B_{1i}\omega_i(t) + \\ (B_{2i} + \Delta B_{2i})u_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N (A_{ij} + \Delta A_{ij})x_j(t), \\ z_i(t) = C_{1i}x_i(t) + D_{12i}u_i(t), \\ y_i(t) = C_{2i}x_i(t) + D_{21i}\omega_i(t). \end{cases} \quad (1)$$

式中: $i = 1, \dots, N, x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}, \omega_i(t) \in \mathbb{R}^{r_i}, u_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}, z_i(t) \in \mathbb{R}^{l_i}, y_i(t) \in \mathbb{R}^{p_i}$ 分别为第 i 个子系统的状态, 扰动输入, 控制输入, 被控输出和可测量输出向量; 矩阵 $A_{ii}, B_{1i}, B_{2i}, C_{1i}, C_{2i}, D_{12i}, D_{21i}$ 为具有相应维数的常数阵; A_{ij} 为第 j 个子系统与第 i 个子系统的关联阵; 矩阵 $\Delta A_{ii}, \Delta B_{2i}$ 和 ΔA_{ij} 分别为状态阵, 控制输入阵和关联阵的不确定性, 它们有如下数值界^[4]:

$$|\Delta A_{ij}| < R_{ij}, |\Delta B_{2i}| < S_i, i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

其中 R_{ij} 和 S_i 为具有非负元素的实常数阵, 并分别与 ΔA_{ij} 和 ΔB_{2i} 同维. $|\Delta| < \bar{\Delta}$ 的含义是 $|e_{ij}| \leq \bar{e}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, N, e_{ij}$ 和 \bar{e}_{ij} 分别为矩阵 Δ 和 $\bar{\Delta}$ 的第 (i, j) 个对应元素.

整个关联大系统可描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \Delta A)x + B_1\omega + (B_2 + \Delta B_2)u, \\ z = C_1x + D_{12}u, \\ y = C_2x + D_{21}\omega. \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= [A_{ij}]_{N \times N}, B_1 = \text{block-diag}\{B_{11}, \dots, B_{1N}\}, \\ B_2 &= \text{block-diag}\{B_{21}, \dots, B_{2N}\}, \\ C_1 &= \text{block-diag}\{C_{11}, \dots, C_{1N}\}, \\ C_2 &= \text{block-diag}\{C_{21}, \dots, C_{2N}\}, \\ D_{12} &= \text{block-diag}\{D_{121}, \dots, D_{12N}\}, \\ D_{21} &= \text{block-diag}\{D_{211}, \dots, D_{21N}\}, \\ \Delta A &= [\Delta A_{ij}]_{N \times N}, \\ \Delta B_2 &= \text{block-diag}\{\Delta B_{21}, \dots, \Delta B_{2N}\}, \\ x &= \text{col}\{x_1, \dots, x_N\}, \omega = \text{col}\{\omega_1, \dots, \omega_N\}, \\ u &= \text{col}\{u_1, \dots, u_N\}, z = \text{col}\{z_1, \dots, z_N\}, \\ y &= \text{col}\{y_1, \dots, y_N\}. \end{aligned}$$

本文目的是为每个子系统设计一个状态反馈控制器或者设计一个严格真的输出反馈控制器, 使闭环大系统鲁棒稳定, 并且使从扰动 ω 到被控输出 z 的传递函数 $T_{z\omega}(s)$ 满足 $\|T_{z\omega}(s)\|_\infty < \gamma$, 其中 γ 是预先给定的一个正常数.

引理 1 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, A \geq B$, 则有 $C^T A C \geq C^T B C, \forall C \in \mathbb{R}^{n \times k}$ 成立.

引理 2 设 X 和 Y 是具有适当维数的向量或矩阵, 则对任意正数 $\alpha > 0$, 有

$$X^T Y + Y^T X \leq \alpha X^T X + \alpha^{-1} Y^T Y$$

成立.

引理 3^[5] 若 $n \times m$ 阶矩阵 ΔA 满足 $|\Delta A| < D$, 则有

$$\Omega(D) \geq \Delta A \Delta A^T, \Gamma(D) \geq \Delta A^T \Delta A.$$

其中:

$$\Omega(D) =$$

$$\begin{cases} \|DD^T\|I, & \|DD^T\|I < n * \text{diag}(DD^T), \\ n * \text{diag}(DD^T), & \text{其它}, \end{cases}$$

$$\Gamma(D) =$$

$$\begin{cases} \|D^T D\|I, & \|D^T D\|I < m * \text{diag}(D^T D), \\ m * \text{diag}(D^T D), & \text{其它}. \end{cases}$$

这里, $\text{diag}(R) = \text{diag}(r_{11}, r_{22}, \dots, r_{mm}), R = (r_{ij})$ 为 n 阶对称实阵.

3 分散鲁棒状态反馈 H_∞ 控制器设计 (Decentralized robust state feedback H_∞ controller design)

对于状态反馈控制情形, 采用式(4)的控制律

$$u = K_d x, \quad (4)$$

其中

$$K_d = \text{block-diag}\{K_1, \dots, K_i, \dots, K_N\} \in \Phi,$$

Φ 为能在子系统水平上给出局部状态反馈控制的块对角阵的集合, $K_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i} (i = 1, 2, \dots, N)$. 相应的闭环大系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_2 K_d + \Delta A + \Delta B_2 K_d)x + B_1 \omega, \\ z = (C_1 + D_{12} K_d)x. \end{cases} \quad (5)$$

定理 1 对于由式(1)组成的数值界不确定性大系统(3), γ 为任意给定的正数, 若存在 $\alpha > 0, \beta > 0$ 及块对角正定矩阵 P 和块对角矩阵 K_d (每一个子块的维数与相应子系统的维数相匹配), 满足

$$T(P, K_d, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \bar{A} & PB_1 & G^T \\ B_1^T P & -\gamma I & 0 \\ G & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

时, 存在分散状态反馈控制器(4), 且 K_d 就为一分散状态反馈增益矩阵, 使构成的闭环大系统(5) 渐近稳定, 并具有给定的 H_∞ 性能指标 γ . 其中

$$\bar{A} = PA + A^T P + PB_2 K_d + K_d^T B_2^T P + \alpha PP +$$

$$\beta PP + \alpha^{-1} \Gamma(R) + \beta^{-1} K_d^T \Gamma(S) K_d,$$

$$G = C_1 + D_{12} K_d,$$

$$\Gamma(R) = \Gamma([R_{ij}]_{N \times N}), i, j = 1, \dots, N,$$

$$\Gamma(S) = \text{block-diag}\{\Gamma(S_1), \dots, \Gamma(S_N)\}.$$

证 利用式(6)的解构造如下矩阵

$$M = P\Delta A + \Delta A^T P + P\Delta B_2 K_d + K_d^T \Delta B_2^T P,$$

$$N = \alpha PP + \alpha^{-1} \Gamma(R) + \beta PP + \beta^{-1} K_d^T \Gamma(S) K_d.$$

利用引理 1,2 和 3 可证

$$J = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leq 0.$$

定义矩阵

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & PB_1 & G^T \\ B_1^T P & -\gamma I & 0 \\ G & 0 & -\gamma I \end{bmatrix},$$

其中

$$\Theta_{11} = P(A + \Delta A) + (A + \Delta A)^T P +$$

$$P(B_2 + \Delta B_2) K_d + K_d^T (B_2 + \Delta B_2)^T P.$$

则 $\Theta = T(P, K_d, \alpha, \beta) + J$, 由式(6)及 $J \leq 0$ 可知 $\Theta < 0$. 由有界实引理^[9]可知定理1成立. 证毕.

在定理1中,式(6)为一非线性矩阵不等式(NLMI),为求解该NLMI,引入实数 $\lambda \in [0, 1]$,并定义矩阵

$$H(P, K_d, \alpha, \beta, \lambda) = T_1(P, K_d, \alpha, \beta) + \lambda T_2(P, K_d, \alpha, \beta),$$

其中

$$T_1(P, K_d, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \Omega_3 & PB_1 & G^T \\ B_1^T P & -\gamma I & 0 \\ G & 0 & -\gamma I \end{bmatrix},$$

$$T_2(P, K_d, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \Omega_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_3 = P(A + B_2 K_d) + [P(A + B_2 K_d)]^T,$$

$$\Omega_4 = \alpha PP + \beta PP + \alpha^{-1} \Gamma(R) + \beta^{-1} K_d^T \Gamma(S) K_d.$$

很显然

$$H(P, K_d, \alpha, \beta, \lambda) = \begin{cases} T_1(P, K_d, \alpha, \beta), & \lambda = 0, \\ T(P, K_d, \alpha, \beta), & \lambda = 1. \end{cases}$$

通过求解式(7)可以得到式(6)的解(即当 λ 从0变到1时就得到式(6)的解),

$$H(P, K_d, \alpha, \beta, \lambda) < 0, \lambda \in [0, 1]. \quad (7)$$

为求解式(7),应用 Schur 补引理^[8],可得到与式(7)等价的两个矩阵不等式(8)和(9)

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & PB_1 & G^T & \Gamma(R)^{\frac{1}{2}} & K_d^T \Gamma(S)^{\frac{1}{2}} \\ B_1^T P & -\gamma I & 0 & 0 & 0 \\ G & 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ \Gamma(R)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & -\lambda^{-1} \alpha I & 0 \\ \Gamma(S)^{\frac{1}{2}} K_d & 0 & 0 & 0 & -\lambda^{-1} \beta I \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_2 & PB_1 & G^T & P & P \\ B_1^T P & -\gamma I & 0 & 0 & 0 \\ G & 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & -\lambda^{-1} \alpha^{-1} I & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 & -\lambda^{-1} \beta^{-1} I \end{bmatrix} < 0. \quad (9)$$

其中

$$\Xi_1 = (A + B_2 K_d)^T P + P(A + B_2 K_d) + \lambda \alpha PP + \lambda \beta PP,$$

$$\Xi_2 = (A + B_2 K_d)^T P + P(A + B_2 K_d) + \lambda \alpha^{-1} \Gamma(R) + \lambda \beta^{-1} K_d^T \Gamma(S) K_d.$$

可以看出,对于固定的参数 P 和 λ ,式(8)是关于参数 K_d, α, β 的 LMI;如果固定参数 K_d 和 λ ,式(9)则是关于参数 $P, \alpha^{-1}, \beta^{-1}$ 的 LMI,因此可以通过逐步增加同伦参数 λ 和交替求解式(8)及式(9)以获得式(6)的解.

首先在式(7)中,令 $\lambda = 0$ 的解为初始解,即通过求解 $T_1(K_d, P, \alpha, \beta) < 0$ 来获得初始值.为方便求出初值,在 $T_1(K_d, P, \alpha, \beta) < 0$ 两边左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{P^{-1}, I, I\}$,并令 $X = P^{-1}, W = K_d P^{-1}$,可知求解 $T_1(K_d, P, \alpha, \beta) < 0$,等价于求解

$$\begin{bmatrix} \Xi_3 & B_1 & (C_1 X + D_{12} W)^T \\ B_1^T & -\gamma I & 0 \\ C_1 X + D_{12} W & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (10)$$

其中 $\Xi_3 = AX + B_2 W + (AX + B_2 W)^T$,且 P 和 K_d 由式(11)决定

$$P = X^{-1}, K_d = WP. \quad (11)$$

下面给出求解控制器的同伦迭代算法:

Step 1 求初始值,当 $\lambda = 0$ 时求解式(10)和式(11),得初值 P_0, K_0 ;

Step 2 设 m 为一正整数,并确定 m 的上限 m_{\max} . 设迭代次数为 k ,并令 $k = 0$;

Step 3 令 $k = k + 1$ 和 $\lambda_k = k/m$. 固定 P_{k-1} 求解式(8),如果无解,则转至 Step 4;如果有解,则求得块对角阵 K_d 并令 $K_k = K_d$,固定 K_k 求解式(9)得到相应的解 P ,且令 P_k 并转至 Step 6;

Step 4 固定 K_{k-1} 求解式(9). 如果无解,则转至 Step 5;如果有解,则求得 P 且令 P_k ,固定 P_k 求解式(8),得到相应解 K_d ,且令 $K_k = K_d$,并转至 Step 6;

Step 5 令 $m = 2m$ 且满足约束条件: $m \leq m_{\max}$. 假设 $P_{2(k-1)} = P_{k-1}, K_{2(k-1)} = K_{k-1}, k = 2(k-1)$,转至 Step 3. 如果 m 的值不能再增大,则该算法无解;

Step 6 如果 $k < m$,则转至 Step 3. 如果 $k = m$,矩阵 P_k 和 K_k 为满足式(6)的解.

4 分散鲁棒输出反馈 H_∞ 控制器设计 (Decentralized robust output feedback H_∞ controller design)

对于输出反馈控制情形,采用式(12)的控制律

$$\begin{cases} \dot{x}_{ci} = A_{ci}x_{ci} + B_{ci}y_i, & i = 1, \dots, N, \\ u_i = C_{ci}x_{ci}. \end{cases} \quad (12)$$

这里, $x_{ci} \in \mathbb{R}^{n_{ci}}$ 为第 i 个局部控制器的状态, A_{ci}, B_{ci}, C_{ci} 为需要确定的常数矩阵. 相应的闭环大系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_{cl} = A_{cl}x_{cl} + B_{cl}\omega, \\ z = C_{cl}x_{cl}. \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$x_{cl} = \text{col}\{x, x_c\}, x_c = \text{col}\{x_{c1}, \dots, x_{cN}\},$$

$$A_c = \text{block-diag}\{A_{c1}, \dots, A_{cN}\},$$

$$B_c = \text{block-diag}\{B_{c1}, \dots, B_{cN}\},$$

$$C_c = \text{block-diag}\{C_{c1}, \dots, C_{cN}\},$$

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + \Delta A & (B_2 + \Delta B_2)C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}, B_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_c D_{21} \end{bmatrix},$$

$$C_{cl} = [C_1 \quad D_{12}C_c].$$

定理 2 对任意给定的 $\gamma > 0$, 若存在 $\alpha > 0, \beta > 0$ 及块对角正定矩阵 X, Y 和块对角矩阵 F, L, Q (每一个子块的维数与相应子系统的维数相匹配) 满足

$$T(X, Y, F, L, Q, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21}^T & B_1 & W_1^T \\ J_{21} & J_{22} & W_2 & C_1^T \\ B_1^T & W_2^T & -\gamma I & 0 \\ W_1 & C_1 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0, \quad (15)$$

则数值界不确定大系统(1), 存在分散输出反馈控制器(12), 使构成的闭环大系统(13) 渐近稳定, 且具有给定的 H_∞ 性能指标 γ . 在此情形下, 控制器的参数可取为

$$A_c = V^{-1}QU^{-T}, B_c = V^{-1}L, C_c = FU^{-T}, \quad (16)$$

且

$$UV^T = I - XY. \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} J_{11} &= AX + XA^T + B_2F + F^TB_2^T + (\alpha + \beta)I + \\ &\quad \alpha^{-1}X\Gamma(R)X + \beta^{-1}F^T\Gamma(S)F, \\ J_{21} &= A^T + YAX + LC_2X + YB_2F + Q + \\ &\quad (\alpha + \beta)Y + \alpha^{-1}\Gamma(R)X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{22} &= YA + A^TY + LC_2 + (LC_2)^T + \\ &\quad (\alpha + \beta)Y^2 + \alpha^{-1}\Gamma(R), \end{aligned}$$

$$\Gamma(R) = \Gamma([R_{ij}]_{N \times N}), i, j = 1, \dots, N,$$

$$\Gamma(S) = \text{block-diag}\{\Gamma(S_1), \dots, \Gamma(S_N)\},$$

$$W_1 = C_1X + D_{12}F, W_2 = YB_1 + LD_{21}.$$

证 利用式(14)(15)(17)的解构造分块对称矩阵

$$P = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & U^{-1}XYXU^{-T} - U^{-1}XU^{-T} \end{bmatrix},$$

由式(15)和 Schur 补引理可证 P 是正定矩阵. 令 $Q = VA_cU^T, L = VB_c, F = C_cU^T$ 并代入式(14), 利用引理 1, 2 和 3, 经过推导, 可以证明下式成立:

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + PA_{cl} & PB_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P & -\gamma I & 0 \\ C_{cl} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0.$$

由有界实引理可知定理 2 成立. 证毕.

在定理 2 中, 式(14)为 NLMI, 可以采用与状态反馈情形相似的同伦算法进行迭代求解. 引入实数 $\lambda \in [0, 1]$ 并定义矩阵

$$\begin{aligned} H(X, Y, F, L, Q, \alpha, \beta, \lambda) &= \\ G(X, Y, F, L, Q) + \lambda K(X, Y, F, L, Q, \alpha, \beta), \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$G(X, Y, F, L, Q) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21}^T & B_1 & W_1^T \\ A_{21} & A_{22} & W_2 & C_1^T \\ B_1^T & W_2^T & -\gamma I & 0 \\ W_1 & C_1 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$A_{11} = AX + XA^T + B_2F + F^TB_2^T,$$

$$A_{21} = A^T + YAX + LC_2X + YB_2F + Q,$$

$$A_{22} = YA + A^TY + LC_2 + C_2^TL^T,$$

$$K(X, Y, F, L, Q, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{21}^T & 0 & 0 \\ Z_{21} & Z_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$Z_{11} = J_{11} - A_{11}, Z_{21} = J_{21} - A_{21}, Z_{22} = J_{22} - A_{22}$. 故有

$$\begin{aligned} H(X, Y, F, L, Q, \alpha, \beta, \lambda) &= \\ \begin{cases} G(X, Y, F, L, Q), & \lambda = 0, \\ T(X, Y, F, L, Q, \alpha, \beta), & \lambda = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

通过求解式(20)可以得到式(14)的解,

$$H(X, Y, F, L, Q, \alpha, \beta, \lambda) < 0, \lambda \in [0, 1]. \quad (20)$$

再次利用 Schur 补引理,可得到与式(20)等价
的两个矩阵不等式(21)和(22).

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{21}^T & B_1 & W_1^T & X & F^T \\ M_{21} & M_{22} & W_2 & C_1^T & I & 0 \\ B_1^T & W_2^T & -\gamma I & 0 & 0 & 0 \\ W_1 & C_1 & 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ X & I & 0 & 0 & -\alpha\lambda^{-1}\Gamma(R)^{-1} & 0 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta\lambda^{-1}\Gamma(S)^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{21}^T & B_1 & W_1^T & I & I \\ N_{21} & N_{22} & W_2 & C_1^T & Y & Y \\ B_1^T & W_2^T & -\gamma I & 0 & 0 & 0 \\ W_1 & C_1 & 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ I & Y & 0 & 0 & -\alpha^{-1}\lambda^{-1}I & 0 \\ I & Y & 0 & 0 & 0 & -\beta^{-1}\lambda^{-1}I \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} M_{11} &= AX^T + XA^T + B_2F + F^TB_2^T + \lambda(\alpha + \beta)I, \\ M_{21} &= A^T + YAX + LC_2X + YB_2F + Q + \lambda(\alpha + \beta)Y, \\ M_{22} &= Y^TA + A^TY + LC_2 + C_2^TL^T + \lambda(\alpha + \beta)Y^2, \\ N_{11} &= AX^T + XA^T + B_2F + F^TB_2^T + \alpha^{-1}\lambda X\Gamma(R)X + \\ &\quad \beta^{-1}\lambda F^T\Gamma(S)F, \\ N_{21} &= A^T + YAX + LC_2X + YB_2F + Q + \\ &\quad \alpha^{-1}\lambda\Gamma(R)X, \\ N_{22} &= Y^TA + A^TY + LC_2 + C_2^TL^T + \alpha^{-1}\lambda\Gamma(R). \end{aligned}$$

很显然固定变量 Y 和 L , 式(21) 是关于变量 X, F, Q, α 和 β 的 LMI; 固定变量 X 和 F , 式(22) 是关于变量 Y, L, Q, α^{-1} 和 β^{-1} 的 LMI, 同状态反馈情形相似, 可以通过逐步增加 λ 和交替求解式(21) 和(22) 来获得满足式(20) 和(15) 约束的解, 下面给出迭代求解算法.

Step 1 取 $\lambda = 0$ 时的值为初始值. 当 $\lambda = 0$ 时求解(20) 式等价于求解 $G(X, Y, F, L, Q) < 0$. 在式(19) 中约束 A_{21} 为块对角结构矩阵 Q_F , 计算满足 $G(X, Y, F, L, Q_F) < 0$ 和式(15) 的块对角约束解作为初始值 X_0, Y_0, F_0, L_0 ;

Step 2 设 m 为一正整数, 并确定 m 的上限 m_{\max} . 设迭代次数为 k , 并令 $k = 0$;

Step 3 令 $k = k + 1$ 和 $\lambda_k = k/m$. 固定 Y_{k-1}, L_{k-1} 求解式(21) 和式(15). 如果无解, 则转至 Step 4; 如果有解, 则求得块对角阵 X, F , 并令 $X_k = X, F_k = F$. 固

定 X_k, F_k 求解式(22) 和(15), 得相应的解 $Y, L, Q, \alpha^{-1}, \beta^{-1}$ 且令 $Y_k = Y, L_k = L, Q_k = Q$, 并转至 Step 6;

Step 4 固定 X_{k-1}, F_{k-1} 求解式(22) 和式(15). 如果无解, 则转至 Step 5; 如果有解, 则求得 Y, L 且令 $Y_k = Y, L_k = L$. 固定 Y_k, L_k 通过求解式(21) 和式(15), 得到相应的解 X, F, Q, α, β 且令 $X_k, F_k = F, Q_k = Q$, 并转至 Step 6;

Step 5 令 $m = 2m$ 且满足约束条件: $m \leq m_{\max}$. 假设 $X_{2(k-1)} = X_{k-1}, Y_{2(k-1)} = Y_{k-1}, F_{2(k-1)} = F_{k-1}, L_{2(k-1)} = L_{k-1}, k = 2(k-1)$, 转至 Step 3. 如果 m 的值不能再增大, 则该算法无解;

Step 6 如果 $k < m$, 则转至 Step 3. 如果 $k = m$, 矩阵 X_k, Y_k, F_k, L_k, Q_k 和正数 α, β 为式(14) 和(15) 的解;

Step 7 通过 $UV^T = I - X_k Y_k$ 进行奇异值分解求出 U, V , 进而利用式(16) 求得控制器(12) 的参数.

5 仿真示例 (Numerical example)

考虑由两个子系统构成的不确定性关联大系统(1), 其中

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ A_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{121} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C_{21} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T, D_{211} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T, A_{22} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \\ B_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \\ C_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{122} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \\ D_{212} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T, R_{11} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.15 & 0 \end{bmatrix}, S_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \\ R_{22} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.15 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, R_{21} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0.1 & 0.05 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

用本文的方法, 在 $\gamma = 10, m = 8$ 的条件下, 求得的分散 H_∞ 状态反馈控制器为

$$K_d = \begin{bmatrix} -27.3658 & -40.3248 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.0614 & -34.3211 \end{bmatrix},$$

分散 H_∞ 输出反馈控制器为

$$\begin{aligned} A_{c1} &= \begin{bmatrix} -5.8587 & -2.3394 \\ -114.5800 & -54.9100 \end{bmatrix}, \\ B_{c1} &= \begin{bmatrix} -6.5504 \\ -15.4650 \end{bmatrix}, C_{c1} = [17.3721 \quad 7.5380], \\ A_{c2} &= \begin{bmatrix} -3.9546 & -0.6067 \\ -0.9429 & -10.2951 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$B_{c2} = \begin{bmatrix} 11.1509 \\ -16.1209 \end{bmatrix}, C_{c2} = [0.5702 \quad 1.1306].$$

当 ΔA_{ij} 和 ΔB_{2i} 在各自的摄动界内取不同值时, 其对应的闭环系统 H_∞ 性能指标如表1所示, 对应的

最大奇异值曲线如图1和图2所示. 仿真结果表明在不同的不确定性影响下, 闭环系统的最大奇异值 (H_∞ 范数) 均小于预先指定的 $\gamma = 10$, 系统控制器的设计达到了要求.

表1 闭环系统的 H_∞ 性能指标及曲线对应关系

Table 1 H_∞ performance index of closed-loop systems vs. its corresponding plot of Figs

不确定性		H_∞ 性能指标		对应的最大奇异值曲线	
ΔA_{ij}	ΔB_{2i}	状态反馈	输出反馈	状态反馈	输出反馈
0	0	2.7534	5.8069	图1左图实线	图2左图实线
R_{ij}	S_i	2.6330	5.7883	图1左图虚线	图2左图虚线
R_{ij}	$-S_i$	3.0570	5.8340	图1左图点连线	图2左图点连线
$-R_{ij}$	S_i	2.5226	5.7878	图1左图点划线	图2左图点划线
$-R_{ij}$	$-S_i$	2.9084	5.8332	图1右图实线	图2右图实线
$0.5R_{ij}$	$0.5S_i$	2.6895	5.7970	图1右图虚线	图2右图虚线
$-0.5R_{ij}$	$-0.5S_i$	2.8259	5.8187	图1右图点连线	图2右图点连线
$-0.75R_{ij}$	$0.25S_i$	2.6607	5.8014	图1右图点划线	图2右图点划线

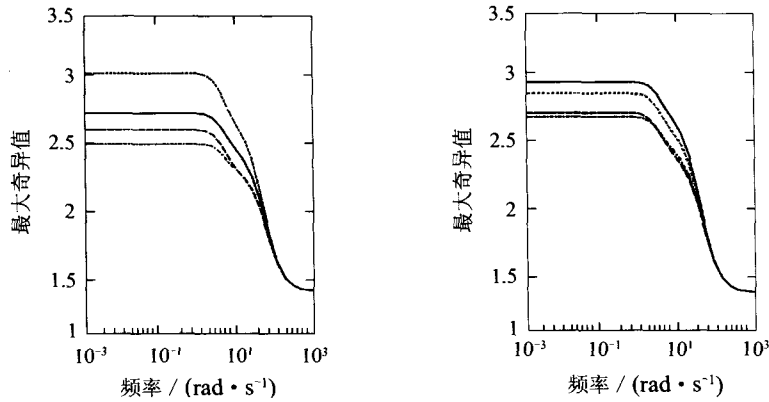


图1 状态反馈情形下闭环系统最大奇异值曲线图

Fig. 1 Greatest singular value plots of closed-loop systems; state feedback case

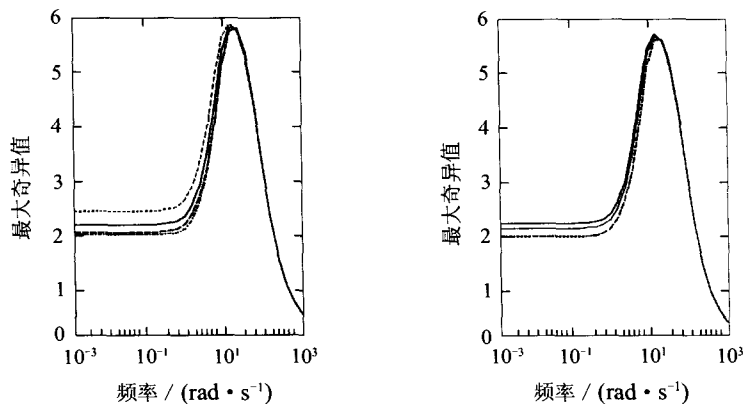


图2 输出反馈情形下闭环系统最大奇异值曲线图

Fig. 2 Greatest singular value plots of closed-loop systems; output feedback case

6 结论 (Conclusion)

针对一类状态阵、控制阵和关联阵中存在数值界不确定性关联大系统, 研究其分散鲁棒 H_∞ 状态反馈和输出反馈控制器的设计方法. 将控制器的解归

结为一组矩阵不等式有解, 采用同伦算法迭代求解控制器, 所得控制器使闭环不确定性大系统鲁棒稳定, 且满足给定的 H_∞ 性能指标. 仿真结果验证了该方法的有效性.

参考文献(References):

[1] SCORLETTI C, DUC G. An LMI approach to decentralized H_∞ control[J]. *Int J Control*, 2001, 74(3): 211 - 224.

[2] CAO Y Y, SUN Y X, MAO W J. Output feedback decentralized Stabilization: ILMI approach [J]. *Systems & Control Letters*, 1998,35(3):183 - 194.

[3] 甘永梅, 王兆安. 不确定性关联大系统的分散鲁棒状态反馈 H_∞ 控制[J]. *控制理论与应用*, 2002, 19(2): 297 - 301. (GAN Yongmei, WANG Zhaoan. Decentralized state feedback robust H_∞ control design for uncertain interconnected large-scale systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(2): 297 - 301.)

[4] MEHDI D, HAMID M A, PERRIN F. Robustness and optimality of linear quadratic controller for uncertain systems [J]. *Automatica*, 1996,32(7):1081 - 1083.

[5] 刘新宇, 高立群, 张文力. 不确定线性组合系统的分散镇定与输出跟踪[J]. *信息与控制*, 1998, 27(5): 342 - 350. (LIU Xinyu, GAO Liqun, ZHANG Wenli. Decentralized robust control for linear uncertain interconnected systems [J]. *Information and Control*, 1998, 27(5): 342 - 350.)

[6] 沃松林, 邹云. 参数不确定广义大系统的分散鲁棒镇定控制 [J]. *控制与决策*, 2004, 19(8): 931 - 934. (WO Songlin, ZOU Yun. Decentralized robust stabilization for

singular large scale systems with parameter uncertainty [J]. *Control and Decision*, 2004, 19(8): 931 - 934.)

[7] 孙继涛, 邓飞其, 刘永清. 变时滞不确定关联系统的分散鲁棒容错控制[J]. *控制与决策*, 2001, 16(6): 968 - 970. (SUN Jitao, DENG Feiqi, LIU Yongqing. Decentralized fault-tolerant robust control for uncertain interconnected systems with time-varying delays[J]. *Control and Decision*, 2001, 16(6): 968 - 970.)

[8] BOYD S P, CHAOU L E, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory* [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

[9] IWASAKI T, SKELTON R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas[J]. *Automatica*, 1994,30(8):1307 - 1317.

作者简介:

谢永芳 (1972—),男,博士,副教授,主要研究方向为分散控制和鲁棒控制,生产过程控制, E-mail: yfxie@mail.csu.edu.cn;

蒋朝辉 (1978—),男,硕士研究生,研究方向为大系统分散控制;

桂卫华 (1950—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为工业大系统递阶和分散控制理论及应用,鲁棒控制,复杂生产过程建模与控制等.

下 期 要 目

应用递归神经网络学习周期运动吸引子轨迹 韩 敏, 史志伟, 席剑辉

无标度网络度秩指数的变化范围 王 林, 戴冠中

具有慢速时滞机动目标三维跟踪 保 宏, 段宝岩, 陈光达

T-S 模糊系统输出反馈控制器的稳定性分析与设计 修智宏, 王 伟

提高矩阵变换器电压传输比的新型调制策略 郭有贵, 喻寿益, 朱建林

轴向运动弦线横向振动控制的 Lyapunov 方法 张 伟, 陈立群

随机平稳策略下半 Markov 决策过程的仿真优化算法 代桂平, 唐 昊, 奚宏生

具连续分布时滞的抛物型系统的变结构控制 罗毅平, 邓飞其, 胡根生

对 Preisach 类的迟滞非线性神经网络建模 赵新龙, 谭永红

基于混合观测器的混合反馈控制 陈国培, 李俊民, 陈为胜, 杨 莹

无模型自适应控制的现状与展望 侯忠生

无线传感器网络的改进 GASA 优化设计 王 雪, 姜爱国, 王 晟

无线传感器网络中基于移动智能体的目标追踪 臧传治, 梁 犇, 于海斌

不确定非线性切换系统的鲁棒 H_∞ 控制 赵胜芝, 赵 军, 张庆灵, 付 俊

带非线性扰动的不确定多时变时滞系统 H_∞ 鲁棒稳定性 马新军, 向少华, 胥布工, 黄德先

n 涡卷 Chua 电路的混沌控制 邹艳丽, 朱 杰, 罗晓曙

一类 SISO 系统的预测函数控制及其鲁棒稳定性分析 张 彬, 张卫东