文章编号: 1000-8152(2006)03-0455-03

Butterworth最优控制的逆问题

李钟慎, 王永初
(华侨大学 机电及自动化学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 为了认识Butterworth最优控制的本质, 揭开Butterworth最优传递函数与加权矩阵Q, R的相互关系, 本文研究Butterworth最优控制的逆问题. 首先用Butterworth最优控制确定状态反馈增益阵K, 然后给出计算加权矩阵Q的参数化公式, 最后用一个例子说明这种确定加权矩阵Q, R的方法的有效性和简便性.

关键词: Butterworth; 最优控制; 状态反馈增益阵; Riccati方程; 加权矩阵
中图分类号: TP273　　**文献标识码:** A

Inverse problems of Butterworth optimal control

LI Zhong-shen, WANG Yong-chu
(College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, Quanzhou Fujian 362021, China)

Abstract: In order to understand the essence of Butterworth optimal control, uncover the correlation between the Butterworth optimal transfer functions and the weighting matrices Q and R, the inverse problems of Butterworth optimal control are studied in this paper. Firstly, the state feedback gain matrix K is designed by the method of Butterworth optimal control. Then, the parametric formula for calculating the weighting matrix Q is given. Finally, an example is given to illustrate the effectiveness and simplicity of the method for choosing the weighting matrix Q.

Key words: Butterworth; optimal control; state feedback gain matrix; Riccati equation; weighting matrix

1 引言(Introduction)

一般控制系统的闭环频率特性具有低通滤波器特性[1], Butterworth滤波器是一种具有最大平坦幅度响应的低通滤波器, 具有本质的稳定性, 因此, Butterworth滤波器的传递函数可作为系统的最优传递函数[2]. 在最优控制系统设计中, 使系统的闭环传递函数等于Butterworth最优传递函数, 通过简单的代数运算就可求得状态反馈增益阵K, 将系统设计成最优控制系统, 这就是Butterworth最优控制[3], 它实际上是一种最优极点配置方法, 将n个闭环极点均匀地分布在复平面的Butterworth圆周上, 相邻两个极点之间的相位差为$180°/n$[4]. 最优控制系统也常用线性二次型方法设计, 但它需解Riccati方程才能求得状态反馈增益阵K, 且最优性能指标中的加权矩阵Q, R的选择具有许多人为因素, 系统性能严重依赖于加权矩阵Q, R的选择[5]. 为了揭开Butterworth最优传递函数与二次型性能指标中加权矩阵Q, R的相互关系, 作者从文[6]闭环极点与加权矩阵Q和R的关系得到启发, 将上述两种最优控制系统设计方法联系起来, 先用Butterworth最优控制确定状态反馈增益阵K, 然后根据线性二次型方法反过来选择加权矩阵Q, R, 从而得到计算加权矩阵Q的参数化公式, 最后用一个例子来说明这种确定加权矩阵Q, R的方法的有效性和简便性.

2 Butterworth最优控制(Butterworth optimal control)

Butterworth最优传递函数为

$$\phi(s)=\frac{\omega_c^n}{s^n+\beta_{n-1}\omega_c s^{n-1}+\cdots+\beta_1\omega_c^{n-1}s+\beta_0\omega_c^n}. \tag{1}$$

文[7]给出了式(1)中的系数, 如表1所示.

收稿日期: 2004-12-31; 收修改稿日期: 2005-08-16.
基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(A0410020).

记 Butterworth 最优传递函数的状态方程标准型为

$$\dot{x} = A_M x + B_M u. \tag{2}$$

式中

$$A_M = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_{n-1} \\ \hline -\beta_0\omega_c^n & -\beta_1\omega_c^{n-1} \cdots -\beta_{n-1}\omega_c \end{array}\right],\ B_M = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

对于一个单输入可控系统,总存在一个线性变换,使之成为可控标准形.不失一般性,假定

$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{4}$$

式中

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_{n-1} \\ \hline -a_0 & -a_1 \quad -a_2 \quad \cdots \quad -a_{n-1} \end{array}\right],\ B_M = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

反馈控制律

$$u = -Kx, \tag{6}$$

则闭环系统为

$$\dot{x} = (A - BK)x. \tag{7}$$

式中

$$(A - BK) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_{n-1} \\ \hline (-a_0 - k_0) & (-a_1 - k_1) \ \cdots \ (-a_{n-1} - k_{n-1}) \end{array}\right]. \tag{8}$$

要想使该系统的闭环传递函数等于 Butterworth 最优传递函数,则

$$A - BK = A_M. \tag{9}$$

表 1 Butterworth 最优传递函数的系数

Table 1 Coefficient of Butterworth optimal transfer functions

n	β_7	β_6	β_5	β_4	β_3	β_2	β_1	β_0
1								1.0000
2							1.4142	1.0000
3						2.0000	2.0000	1.0000
4					2.6131	3.4142	2.6131	1.0000
5				3.2361	5.2361	5.2361	3.2361	1.0000
6			3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637	1.0000
7		4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940	1.0000
8	5.1258	13.1371	21.8462	25.6884	21.8462	13.1371	5.1258	1.0000

定理 1 若矩阵 A,B 为可控标准形,则 Butterworth 最优控制的状态反馈增益阵

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n] = [\beta_0\omega_c^n - a_0 \quad \beta_1\omega_c^{n-1} - a_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}\omega_c - a_{n-1}]. \tag{10}$$

证 将式(3)和式(8)代入式(9)即得式(10).

3 确定加权矩阵 Q,R 的方法(The method of choosing weighting matrix Q and R)

对于单输入系统(4)来说,二次型性能指标为

$$J = \int_0^{+\infty} (x^{\mathrm{T}}Qx + r^2u^2)\mathrm{d}t. \tag{11}$$

式中 $r^2 > 0$,Q 为加权矩阵,要求 Q 是对称矩阵,并且是半正定矩阵.

由最优控制理论可知,使(11)极小的最优控制律为

$$u = -Kx = -\frac{1}{r^2}B^{\mathrm{T}}Px, \tag{12}$$

式中 P 是对称矩阵,并且是半正定矩阵,为 Riccati 方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - \frac{1}{r^2}PBB^{\mathrm{T}}P + Q = 0 \tag{13}$$

的解.

根据定理 1 和式(12)可得

$$p_{ni} = r^2k_i = r^2\beta_{i-1}\omega_c^{n-i+1} - r^2a_{i-1}, \quad i = 1,2,\cdots,n, \tag{14}$$

式中 p_{ni} 表示矩阵 P 的第 n 行第 i 列元素.

定理 2 对于单输入系统(4)来说,若取加权矩阵 $R = r^2 > 0$,那么使闭环系统(7)的传递函数等于 Butterworth 最优传递函数(1)的加权矩阵 Q 由下式确定

$$q_{ij} = r^2\beta_{i-1}\beta_{j-1}\omega_c^{2n-i-j+2} - r^2\alpha_{i-1}\alpha_{j-1} - p_{i(j-1)} - p_{j(i-1)}, \tag{15}$$

式中 $i = 1,2,\cdots,n, j = 1,2,\cdots,n$, q_{ij} 表示矩阵 Q 的第 i 行第 j 列元素,且规定 $p_{i0} = p_{j0} = 0$.

证 将式(5)和(14)代入式(13)就可确定加权矩阵 Q,式(15)得证.

由式(1)和表 1 可以看出,Butterworth 最优传递函数只需选一个参数 ω_c,根据定理 1,选定了参数 ω_c,状态反馈增益阵 K 就确定了,选取加权矩阵 R 后,由式(14)可知矩阵 P 第 n 行(或第 n 列)的 n 个元素也就确定了,因此矩阵 P 中有 $n(n-1)/2$ 个自

由参数,式(15)中的加权矩阵 Q 也包含 $n(n-1)/2$ 个自由参数. 当取不同的自由参数 $p_{ij}(i=1,2,\cdots,n-1,j=1,2,\cdots,n-1)$ 时,将对应有不同的加权矩阵 Q. 求得的矩阵 P 和 Q 不一定是半正定矩阵,这时还须适当选取参数 ω_c,加权矩阵 R,矩阵 P 中的自由参数 $p_{ij}(i=1,2,\cdots,n-1,j=1,2,\cdots,n-1)$,使 $P\geqslant 0, Q\geqslant 0$.

4 例子(Example)

给定3阶系统如式(4)所示,其中

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-8&-6&-3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\tag{16}$$

可以证明该系统是可控的.

取该系统的闭环传递函数为 $\omega_c=3$ rad/s 的3阶 Butterworth 最优传递函数,则由定理1得状态反馈增益阵

$$K=[19\quad 12\quad 3].\tag{17}$$

取加权矩阵 $R=r^2=0.25$,由式(14)得

$$P=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&4.75\\p_{12}&p_{22}&3\\4.75&3&0.75\end{bmatrix}.\tag{18}$$

根据定理2中的式(15)可得

$$Q=\begin{bmatrix}166.25&109.5-p_{11}&34.5-p_{12}\\109.5-p_{11}&72-2p_{12}&17.75-p_{22}\\34.5-p_{12}&17.75-p_{22}&0.75\end{bmatrix},\tag{19}$$

式中 p_{11},p_{12},p_{22} 为自由参数,若取 $p_{11}=109.5, p_{12}=34.5, p_{22}=17.75$,则

$$P=\begin{bmatrix}109.50&34.50&4.75\\34.50&17.75&3.00\\4.75&3.00&0.75\end{bmatrix}>0,\tag{20}$$

$$Q=\begin{bmatrix}166.25&0&0\\0&3.00&0\\0&0&0.75\end{bmatrix}>0,\tag{21}$$

把式(16)(20)(21)代入方程(13)的左边,用 MATLAB 语言计算得到的结果为:

$$A^{\mathrm T}P+PA-\frac{1}{0.25}PBB^{\mathrm T}P+Q=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.\tag{22}$$

说明式(20)中的矩阵 P 是 Riccati 方程(13)的解,而后由式(12)不难验证此时的最优控制律为

$$u=-[19\quad 12\quad 3]x,\tag{23}$$

这就进一步说明了本文结论的正确性.

5 结束语(Conclusion)

二次型性能指标中加权矩阵 Q,R 的选择是一个既复杂又困难的问题,本文给出了计算加权矩阵 Q 的参数化公式,有助于这个难题的解决,其优点是:状态反馈增益阵按 Butterworth 最优控制的方法确定,使闭环系统的传递函数等于 Butterworth 最优传递函数,在选取加权矩阵 R 的基础上,加权矩阵 Q 的选取只须进行简单的代数运算,避开了求解复杂的 Riccati 方程,而且由于 Butterworth 最优传递函数含有可选参数 ω_c 和矩阵 P 含有自由参数 $p_{ij}(i=1,2,\cdots,n-1,j=1,2,\cdots,n-1)$,使加权矩阵 Q 的选取具有很大的灵活性. 同时本文的研究对认识 Butterworth 最优控制的本质有重要的参考价值.

参考文献(References):

[1] MORARI M, ZAFIRIOU E. *Robust Process Control* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.

[2] 王永初. Butterworth 滤波器在过程控制中的应用(Ⅰ)[J]. 工业仪表与自动化装置,1994,(6):13-15.
(WANG Yongchu. The application of Butterworth filter in the process control (Ⅰ) [J]. *Industrial Instrumentation & Automation*, 1994, (6): 13-15.)

[3] 王伟,郑耀林. 一种采用 Butterworth 滤波器原理设计的具有高鲁棒性的状态反馈系统[J]. 电子测量与仪器学报,2001,15(4):16-20.
(WANG Wei, ZHENG Yaolin. Design of high-robustness state feedback system with Butterworth filter Principle [J]. *Journal of Electronic Measurement and Instrument*, 2001, 15(4): 16-20.)

[4] 李钟慎,王永初. 一种设计状态反馈控制器的改进方法[J]. 南昌大学学报(工科版),2002,24(4):74-78.
(LI Zhongshen, WANG Yongchu. An improved method to design the state feedback controller[J]. *Journal of Nanchang University (Engineering & Technology)*, 2002, 24(4): 74-78.)

[5] FRANK L LEWIS. *Optimal Control* [M]. New York: Wiley-Interscience Publication, 1991.

[6] 谢宋和,李人厚. 一种新的最优极点配置方法[J]. 控制理论与应用,1993,10(1):113-116.
(XIE Songhe, LI Renhou. A new method for the optimal pole assignment[J]. *Control Theory & Applications*, 1993, 10(1): 113-116.)

[7] 洪健,李钟慎. 改进的 Butterworth 最佳传递函数标准型[J]. 计算技术与自动化,2005,24(2):13-15.
(HONG Jian, LI Zhongshen. The improved standard form of Butterworth optimum transfer function [J]. *Computing Technology and Automation*, 2005, 24(2):13-15.)

作者简介:

李钟慎 (1971—),华侨大学副教授,1995年于华侨大学获硕士学位,现在华侨大学在职攻读博士学位,目前主要从事最优控制和时滞系统的研究,E-mail:lzscyw@hqu.edu.cn;

王永初 (1937—),男,华侨大学教授,博士生导师,目前主要从事鲁棒控制,优化控制和预测控制等研究.