

## 带有干扰的时变系统的变结构鲁棒控制

顾建忠<sup>1</sup>, 武玉强<sup>2</sup>

(1. 烟台师范学院 数学与信息学院, 山东 烟台 264025; 2. 曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165)

**摘要:** 对含有未知时变参数和外界干扰的单输入单输出线性时变系统, 给出了一种变结构鲁棒输出跟踪控制器. 系统参数不限定为慢时变或者结构已知的, 只要求光滑有界且所需高阶导数有界. 通过引入辅助信号和带有记忆功能的正规化信号, 以及适当选择控制器参数, 该变结构控制器能保证闭环系统所有信号的有界性, 跟踪误差能被调整到任意小的范围内.

**关键词:** 线性时变系统; 快时变参数; 变结构鲁棒控制; 辅助误差信号; 全局稳定性

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Variable structure robust controller for linear time-varying systems with disturbances

GU Jian-zhong<sup>1</sup>, WU Yu-qiang<sup>2</sup>

(1. School of Mathematics and Information, Yantai Normal University, Yantai Shandong 264025, China;

2. Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu Shandong 273165, China)

**Abstract:** A variable structure robust controller is given for single-input and single-output linear time-varying systems with disturbances. Time-varying parameters are not restricted to be either slow time-varying or of known structure. Here only the smooth condition and boundedness of system parameters are required. By introducing some auxiliary signals and normalized signals with memory functions and appropriate choice of controller parameters, the proposed variable structure robust control scheme guarantees the uniform boundedness of all signals in the closed-loop system and the convergence of the tracking error to stay in an arbitrarily small compact set.

**Key words:** linear time-varying systems; fast-varying parameters; variable structure robust control; auxiliary error signal; global stability

### 1 引言 (Introduction)

在实际控制过程中, 系统工作条件会在很大的范围内变动, 系统参数是时变且往往不是慢时变的. 从线性时不变的角度来建模和控制已远不能达到控制要求. 文[1]将线性定常系统的模型参考自适应控制(MRAC)引入线性时变系统中, 取得显著成果, 但并没有从本质上突破对时变参数的变化速度的限制.

变结构控制具有很强的鲁棒性, 能克服未建模动态和抑制外界干扰, 将模型参考控制(MRC)与变结构控制(VSC)结合, 可以解决一系列问题. 文献[2]针对相对阶为1的时变系统设计了不连续VSC, 能够保证渐近稳定. 文[3]基于一类特定的由状态方程描述的时变系统, 利用 Backstepping 方法,

在时变参数满足一定收敛性和干扰有界的条件下设计出渐近跟踪控制器. 文[4]对输入通道的干扰仅与输出信号有关的线性时变系统提出了一种控制器的设计方法, 当系统的相对阶为1时跟踪误差收敛到零, 而当相对阶大于1时跟踪误差一致最终有界. 本文考虑输入通道上存在干扰的线性时变系统的控制器设计, 将MRC和VSC结合, 通过引入误差辅助信号, 以及选择适当的控制参数, 设计一种变结构鲁棒控制器. 该设计机制对系统的相对阶以及参数的变化速度均无限制, 输入通道上的干扰没有有界性假设条件. 所设计的VSC能够保证闭环系统的全局稳定, 并且跟踪误差可调整到任意小.

### 2 问题描述 (Problem formulation)

考虑由I/O算子描述的单输入单输出线性时

变系统

$$A_p(s, t)[y(t)] = k_p(t)B_p(s, t)[u(t) + d(y, u, t)]. \quad (1)$$

其中:  $A_p(s, t) = s^n + a_{p1}(t)s^{n-1} + \dots + a_{pn}(t)$ ,  $B_p(s, t) = s^m + b_{p1}(t)s^{m-1} + \dots + b_{pm}(t)$ ,  $d(y, u, t)$  表示输入输出通道上的总干扰项. 假设系统(1) 满足如下条件:

- i)  $m \leq n - 1$ ,  $A_p(s, t)$  和  $B_p(s, t)$  右互质;
- ii) 高频增益  $k_p(t)$  是光滑有界, 且存在正数  $k_{\min}$ ,  $k_{\max}$  使得  $k_{\min} < k_p(t) < k_{\max}$ ;
- iii) 系统参数  $a_{pi}(t)$ ,  $b_{pj}(t)$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ ) 未知但光滑有界, 且所需高阶导数也有界;
- iv) 多项式微分算子(PDO)  $B_p(s, t)$  是指数稳定的;
- v) 干扰  $d(y, u, t)$  满足  $|d(y, u, t)| \leq k(\sup_{\tau \leq t} |y(\tau)| + \mu \sup_{\tau \leq t} |u(\tau)| + 1)$ , 这里  $k > 0$  是某正常数,  $\mu$  是适当小的正数.

本文目的是针对系统(1) 设计一个变结构控制器, 使输出  $y(t)$  能够渐近跟踪参考输出  $y_m(t)$ , 且使闭环系统的所有信号有界. 参考模型描述为  $y_m(t) = G_m(s)[r(t)]$ , 其中

$$G_m(s) = k_m \frac{s^{m_m} + b_{m1}s^{m_m-1} + \dots + b_{mm_m}}{s^{n_m} + a_{m1}s^{n_m-1} + \dots + a_{mm_m}} \triangleq k_m \frac{B_m(s)}{A_m(s)}, \quad (2)$$

这里:  $r(t)$  是光滑有界的参考输入信号,  $A_m(s)$ ,  $B_m(s)$  是互质的首项系数为一的 Hurwitz 多项式, 且  $n_m - m_m = n^*$ . 不失一般性设  $B_m(s) = 1$ ,  $A_m(s) = (s + \alpha)^{n^*}$ ,  $\alpha > 0$ .

形如(1)的实际被控对象如直流电机的模型为

$$L\dot{i} + R(t)i + K_b\omega = u, \quad J\dot{\omega} + F(t)\omega + T(t) = K_t i,$$

其中:  $i$  是电枢电流,  $u$  是电压,  $\omega$  是角速度,  $T(t)$  是有界的负载力矩.  $J$  (转子惯性),  $L$  (电枢绕组的自感),  $K_b$  (反电势) 及  $K_t$  (转矩电机参数) 均是未知常参数.  $R(t)$  和  $F(t)$  分别为电阻和摩擦系数, 随时间

变化. 令  $x_1 = i$ ,  $x_2 = -\frac{K_b}{L}\omega + \frac{F(t)}{J}i$ , 则

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1(t) & 1 \\ a_2(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 \\ b_2(t) \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ d_2(t) \end{bmatrix},$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

其中:  $a_1(t) = -\frac{R(t)}{L} - \frac{F(t)}{J}$ ,  $b_2(t) = \frac{F(t)}{J}$ ,  $a_2(t) =$

$$-\frac{F(t)R(t)}{JL} + \frac{\dot{F}(t)}{J} - \frac{K_b K_t}{LJ}, \quad d_2(t) = \frac{K_b T(t)}{JL},$$

实际中  $b_2(t) > 0$ . 令  $y(t) = x_1(t)$ , 得到 PDO 表示的形式

$$[s^2 + \hat{a}_1(t)s + \hat{a}_2(t)]y(t) = L^{-1}[s + \hat{b}_2(t)][u(t) + \hat{d}(t)]. \quad (3)$$

这里:  $\hat{a}_1(t) = -a_1(t)$ ,  $\hat{a}_2(t) = -(a_1(t) + a_1(t)b_2(t) + a_2(t))$ ,  $\hat{b}_2(t) = b_2(t)$ ,  $\hat{d}(t) = L(s + b_2(t))^{-1}d_2(t)$ .

### 3 VSC 控制器设计 (Design of VSC controller)

定义辅助信号

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = A_0\omega_1 + \theta_1(t)u(t), \\ \dot{\omega}_2 = A_0\omega_2 + \theta_2(t)y(t). \end{cases} \quad (4)$$

这里  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t) \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ ,  $A_0 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  是稳定的常矩阵, 由文[4] 可知, 当系统(1) 无干扰并满足假设 i) ~ v) 时, 存在有界参数  $\theta_i^*(t)$ , ( $i = 0, 1, 2$ ),  $k^*(t)$ , 当控制律为

$$U^*(\theta^*(t), \omega^*(t)) = k^*(t)r(t) + \theta_0^*(t)y(t) + b_0^T\omega_1^* + b_0^T\omega_2^*, \quad (5)$$

闭环系统内部稳定, 且  $r(t)$  到  $y(t)$  的 I/O 算子为  $G_m(s)$ . 向量  $b_0 \in \mathbb{R}^{(n-1)}$  使  $(A_0, b_0)$  是可观测的,  $\theta^*(t) \triangleq [k^*(t), \theta_0^*(t), [\theta_1^*(t)]^T, [\theta_2^*(t)]^T]^T$ ,  $\omega^*(t) \triangleq [r(t), y(t), [\omega_1^*(t)]^T, [\omega_2^*(t)]^T]^T$ ,  $\omega_1^*$ ,  $\omega_2^*$  是当  $\theta_i(t) = \theta_i^*(t)$ , ( $i = 1, 2$ ) 时由式(4) 确定的,  $k^*(t) = k_m/k_p(t)$ .

因为系统(1) 存在干扰, 将  $U(t) = u(t) + d(y, u, t)$  作为原系统的总输入, 由前面分析当

$$\begin{aligned} U(t) &= u(t) + d(y, u, t) = \\ &U^*(\theta^*(t), \omega^*(t)) = \\ &k^*(t)r(t) + \theta_0^*(t)y(t) + b_0^T\omega_1^* + b_0^T\omega_2^* \end{aligned} \quad (6)$$

时, 所以系统输出为

$$y(t) = G_m(s) \{ r(t) + k^{*-1}(t)[u(t) + d(y, u, t) - U^*(\theta^*(t), \omega^*(t))] \}. \quad (7)$$

定义输出跟踪误差  $e_0(t) = y_m(t) - y(t)$ , 所以<sup>[4]</sup>

$$e_0(t) = \bar{G}_m(s) [-\beta^{-1}(s)k_m^{-1}k_p(t)u(t) + \bar{d}(y, u, t)], \quad (8)$$

其中  $\bar{d}(y, u, t) = \beta^{-1}(s)k^{*-1}(t)[U^*(\theta^*(t), \omega^*(t)) - d(y, u, t)]$ , 而  $\beta(s) = (s + \alpha)^{n^*-1}$  是使  $\bar{G}_m(s) = G_m(s)\beta(s) = 1/(s + \alpha)$  严格正实 (SPR).

以下将分  $k_p(t)$  已知和  $k_p(t)$  未知两部分进行

VSC 设计与分析.

1)  $k_p(t)$  已知, VSC 设计.

不失一般性, 设  $k_p(t) = 1$ . 式(8) 表示的误差动态的状态空间方程为

$$\dot{e}_0(t) = -\alpha e_0(t) - \beta^{-1}(s)[k_m^{-1}u(t)] + \bar{d}(y, u, t), \quad (9)$$

由  $U^*(\theta^*(t), \omega^*(t))$  和  $k^*(t)$  的定义, 得到

$$\begin{aligned} \bar{d}(y, u, t) = & \beta^{-1}(s)[r(t) + k_m^{-1}\theta_0^*(t)y(t) + \\ & k_m^{-1}b_0^T(sI - A_0)^{-1}\theta_1^*(t)u(t) + \\ & k_m^{-1}b_0^T(sI - A_0)^{-1}\theta_2^*(t)y(t) - \\ & k_m^{-1}d(y, u, t)]. \end{aligned} \quad (10)$$

**引理 3.1**<sup>[5]</sup> a) 设  $\Delta(s)$  是一个正则的稳定传递函数, 令  $z(t) = \Delta(s)u(t)$ , 则对于任意分段连续函数  $u(t)$ , 存在正常数  $M$ , 使得  $|z(t)| \leq M(\sup_{\tau \leq t} |u(\tau)| + \varepsilon(t))$ . ( $\varepsilon(t)$  是指数收敛的)

b) 对(10)定义的  $\bar{d}(y, u, t)$ , 存在正数  $L > 0$  使得

$$|\bar{d}(y, u, t)| \leq L(\sup_{\tau \leq t} |y(\tau)| + \mu \sup_{\tau \leq t} |u(\tau)| + 1 + \varepsilon(t)). \quad (\mu \text{ 是适当小的正数}) \quad (11)$$

现在考虑误差系统(9), 引入下列辅助输出信号及辅助误差信号:

$$\dot{y}_1(t) = -\alpha y_1(t) + v_1(t) + \beta^{-1}(s)[k_m^{-1}u(t)], \quad (12)$$

$$e_1(t) = e_0(t) + y_1(t), \quad (13)$$

$$e_2(t) = -L_{n-2}(s)H(s)v_1(t) - L_1^{-1}(s)[k_m^{-1}u(t)], \quad (14)$$

$$e(t) = e_0(t) - L_{n-1}^{-1}(s)e_2(t), \quad (15)$$

定义  $H(s) = a^{n^*}/(s+a)^{n^*}$ , ( $a$  是充分大的正数),  $L_i(s) = (s+\alpha)^i$ , ( $\alpha > 0$ ). 取

$$v_1(t) = -\text{sgn}(e_1(t))K_1^*[\sup_{\tau \leq t} |y(\tau)| + 1] - \text{sgn}(e_1(t))K_2^* \sup_{\tau \leq t} |u(\tau)|, \quad (16)$$

其中  $K_i^*$  ( $i = 1, 2$ ) 是适当的正数, 满足  $K_1^* > L + 1$ ,  $K_2^* > L\mu$ . ( $L, \mu$  如(11) 及假设 v) 所示)  $v_1(t)$  的设计将使得  $e_1(t)$  在有限时间内趋于零. 由(9)(12)得

$$\dot{e}_1(t) = -\alpha e_1(t) + v_1(t) + \bar{d}(y, u, t), \quad (17)$$

对(17) 变形得  $v_1(t) = L_1(s)e_1(t) - \bar{d}(y, u, t)$ , 代入(14) 得到  $e_2(t)$  的状态空间实现为

$$\dot{e}_2(t) = -\alpha e_2(t) - k_m^{-1}u(t) - H(s)L_{n-1}(s)e_1(t) + H(s)L_{n-1}(s)\bar{d}(y, u, t). \quad (18)$$

**引理 3.2**<sup>[6]</sup> 令  $sH_1 \triangleq 1 - H(s)$ ,  $\bar{h}_1(t)$  为

$H_1(s)$  的脉冲响应函数, 则

$$\|\bar{h}_1(t)\|_1 \triangleq \int_0^\infty |\bar{h}_1(t)| dt = n^*/a.$$

针对跟踪误差系统(9), 变结构控制器设计如下

$$u(t) = -2\text{sgn}(e_2(t))k_m K^* [\sup_{\tau \leq t} |y(\tau)| + \sup_{\tau \leq t} |e_2(\tau)| + 1]. \quad (19)$$

其中  $K^*$  是满足某条件的正常数. ( $K^*$  与推导过程中的待定常数有关)

**定理 3.1** 对系统(1), 满足假设条件 i) ~ v), 辅助信号如(12) ~ (15) 所定义,  $a$  是一个充分大的数, 变结构控制器(19) 保证闭环系统中的所有信号都是有界的,  $t$  充分大时, 跟踪误差满足  $e_0(t) = O(1/a)$ . 即如果取  $a$  是一个充分大的正数, 那么跟踪误差  $e_0(t)$  就会充分小. 当  $a$  趋向无穷大时, 跟踪误差  $e_0(t)$  趋于零. (证明见附录)

**注** 1) 控制律(19) 是针对辅助误差系统(18) 设计, 而不是传统意义下针对实际跟踪误差系统(9) 来设计. 2) 从附录中定理的证明将看出, 不管  $a$  有多大, 在(12) ~ (15) 中引入的辅助误差信号仍然有界, 其界独立于  $a$ , 即  $a$  的选择不影响闭环系统中所有信号的上界.

2)  $k_p(t)$  未知, VSC 设计.

因为式(8) 的状态方程形式与式(9) 一样, 因此控制律为

$$u(t) = -2\text{sgn}(e_2(t))(k_m K^*/k_p(t))[\sup_{\tau \leq t} |y(\tau)| + \sup_{\tau \leq t} |e_2(\tau)| + 1]. \quad (20)$$

由于  $k_p(t)$  未知, 控制律不能实现. 令区间  $\bar{T} \in [K^*/k_{\max}, K^*/k_{\min}]$ . 在(20) 中, 可任意选择一个属于区间  $\bar{T}$  的正数, 去代替  $K^*/k_p(t)$ . 所以定理 3.1 对  $k_p(t)$  未知的情况仍成立.

#### 4 仿真例子 (Simulation example)

考虑直流伺服电机控制模型(3), 其中的参数

特性如下:  $R(t) = 1.5 + \sin t$ ,  $L = 0.08$ ,  $K_b = \frac{3}{2\pi}$ ,

$J = 0.196$ ,  $K_t = 30$ ,  $T(t) = 10 + 2\cos t$ ,  $F(t) =$

$0.02 + 0.01\sin t$ ,  $y_m(t) = 0.5\sin t$ . 设计控制律为

$u(t) = -0.5\text{sgn}(e(t))[\sup_{\tau \leq t} |e(\tau)| + \sup_{\tau \leq t} |e_2(\tau)| + 1]$ ,

这里  $e(t)$  表示跟踪误差,  $e_2(t)$  为辅助误差信号. 跟踪误差和控制律的变化曲线为图 1、图 2 所示, 从图中可以看到跟踪误差可以调整到任意小的范围内, 且保证控制信号有界. 变结构控制使系统产生震颤, 所以在实际仿真过程中, 为避免高频震颤, 将符号函数  $\text{sgn}(e(t))$  用  $e(t)/(|e(t)| + \delta)$  近似, ( $\delta$  取得很小), 这里取  $\delta = 0.05$ .

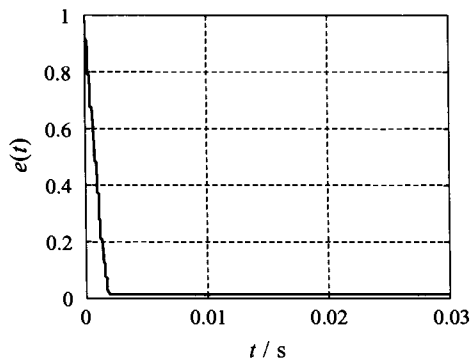


图1 跟踪误差变化曲线

Fig. 1 Curve of tracking error

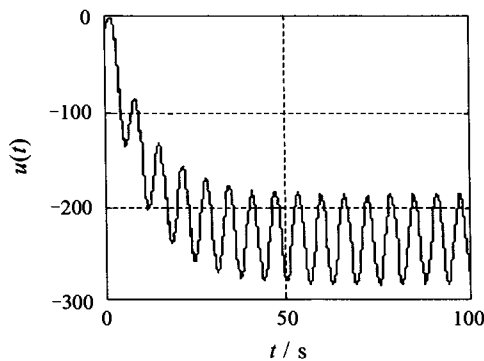


图2 控制律变化曲线

Fig. 2 Curve of control signal

## 五 结论(Conclusion)

针对带有干扰的单输入单输出线性时变系统,本文运用变结构控制方法给出了一种新的控制器设计方案.文中对系统相对阶无限制,且系统参数可以是快时变.通过引入增广误差信号,并适当选择控制器的参数,使得VSC可以保证闭环系统的所有信号是有界的,并且跟踪误差任意小,从而达到渐近跟踪的目的.

## 参考文献(References):

- [1] TSAKALIS K S, IOANNOU P A. *Linear Time-Varying Systems: Control and Adaptation* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.
- [2] CHIEN C J, FU L C. A new approach to model reference control of a class of arbitrarily fast time-varying unknown plant[J]. *Automatica*, 1992, 28(2):437-440.
- [3] MARINO R, TOMEI P. Robust adaptive regulation of linear time-varying systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000,45(7):33-48.
- [4] QU Z, KAMEN F W, DORSEY J F. Continuous I/O robust control of SISO time-varying systems[J]. *Automatica*, 1997, 33(4):533-550.
- [5] WU Y Q, YU X. Variable structure control design for uncertain dynamic systems with disturbances in input and output channels [J]. *Automatica*, 1999,35(2):311-319.

- [6] TAO G, IOANNOU P A. Robust adaptive control-a modified scheme[J]. *Int J Control*, 1991,54(1):241-256.

## 附录 定理3.1的证明(Appendix Proof of theorem 3.1)

证 a) 证明  $v_1(t)$  使  $e_1(t)$  在有限时间内趋向于零. 取  $V_1(e_1(t)) = \frac{1}{2}e_1^2$ , 存在  $T$ , 当  $t > T$  时,  $V_1$  沿(17)的时间导数满足  $\dot{V}_1(t) \leq -\alpha e_1^2(t) - |e_1(t)|$ , 则  $e_1(t)$  在有限时间内达到零并保持为零.

b) 证明 VSC 律  $u(t)$  使  $e_2(t)$  在有限时间内达到零. 分析式(18)的各项, 给出一个独立于  $a$  的上界估计. 先考虑  $L_{n^*-1}(s)\bar{d}(y, u, t)$ , 存在常数  $M'_1 > 0$ , 有下式成立

$$|L_{n^*-1}(s)\bar{d}(y, u, t)| \leq M'_1 \left( \sup_{\tau \leq t} |y(\tau)| + \sup_{\tau \leq t} |u(\tau)| + 1 + \varepsilon(t) \right). \quad (\text{A.1})$$

将式(10)变形得到  $\bar{d}(y, u, t) = \beta^{-1}(s)[f_d(t) + f_f(t)] + f_u(t)$ , 其中记

$$\begin{aligned} f_f(t) &= r(t) + k_m^{-1}\theta_0^*(t)y(t) + \\ &\quad k_m^{-1}b_0^T(sI - A_0)^{-1}\theta_2^*(t)y(t), \\ f_d(t) &= -[k_m^{-1}d(y, u, t) + k_m^{-1}b_0^T(sI - \\ &\quad A_0)^{-1}\theta_1^*(t)d(y, u, t)], \\ f_u(t) &= k_m^{-1}\beta^{-1}(s)b_0^T(sI - A_0)^{-1}\theta_1^*(t) \cdot \\ &\quad B_p^{-1}(s, t)k_p^{-1}(t)A_p(s, t)[y(t)] \triangleq \\ &\quad G_m(s, t)[y(t)]. \end{aligned}$$

这里  $G_m(s, t) = k_m^{-1}\beta^{-1}(s)b_0^T(sI - A_0)^{-1}\theta_1^*(t)B_p^{-1}(s, t)k_p^{-1}(t) \cdot A_p(s, t)$  正则稳定. 所以

$$\begin{aligned} H(s)L_{n^*-1}(s)\bar{d}(y, u, t) &= \\ H(s)L_{n^*-1}(s)\beta^{-1}(s)[f_d(t) + f_f(t)] + \\ H(s)L_{n^*-1}(s)f_u(t). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

下面主要估计  $H(s)L_{n^*-1}(s)f_u(t)$ , 由式(9), (15) 及式(18) 得到

$$e(t) = -\alpha e(t) + H_1(s)L_1(s)\bar{d}(y, u, t) - \alpha H_1(s)\bar{d}(y, u, t) + L_1(s)H(s)e_1(t), \quad (\text{A.3})$$

进而得

$$y(t) = H_1(s)\bar{d}(y, u, t) - \alpha H_1(s)L_1^{-1}(s)\bar{d}(y, u, t) + H(s)e_1(t) + L_{n^*-1}^{-1}(s)e_2(t) + y_m(t), \quad (\text{A.4})$$

所以

$$\begin{aligned} H(s)L_{n^*-1}(s)f_u(t) &= H(s)L_{n^*-1}(s)G_m(s, t)H_1(s) \cdot \\ &\quad \bar{d}(y, u, t) + f_m(t) - \alpha H(s)L_{n^*-1}(s) \cdot \\ &\quad G_m(s, t)H_1(s)L_1^{-1}(s)\bar{d}(y, u, t) + \\ &\quad H(s)L_{n^*-1}(s)G_m(s, t)L_{n^*-1}^{-1}(s)e_2(t). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

这里  $f_m(t) = H(s)L_{n^*-1}(s)G_m(s, t)[H(s)e_1(t) + y_m(t)]$ , 满足  $|f_m(t)| \leq K_2 + \varepsilon(t)$ ,  $K_2$  是独立于  $a$  的正数. 对于 (A.5) 的第1项, 由式(A.1) 以及引理3.1, 存在独立于  $a$  的

正数  $K_3$ , 使得

$$\begin{aligned} & |H(s)L_{n^*-1}(s)G_m(s,t)H_1(s)\bar{d}(y,u,t)| = \\ & |H(s)L_{n^*-1}(s)G_m(s,t)L_{n^*-1}^{-1}(s)H_1(s)L_{n^*-1}(s) \cdot \\ & \bar{d}(y,u,t)| \leq \end{aligned}$$

$$(n^*/a)K_3(\sup_{\tau \leq t} |y(\tau)| + \sup_{\tau \leq t} |u(\tau)| + 1 + \varepsilon(t)),$$

对于(A.5)的第2,3项也类似于第1项处理. 综合以上分析, 存在独立于  $a$  的正数  $M_1$ , 且当  $a$  足够大时, 存在一个适当小的正数  $\mu^*$  ( $\mu^* > \mu$ ) 和时间  $T_1$ , 当  $t > T_1$  时

$$\begin{aligned} & |H(s)L_{n^*-1}(s)\bar{d}(y,u,t)| \leq \\ & M_1(\sup_{\tau \leq t} |e_2(\tau)| + \\ & \sup_{\tau \leq t} |y(\tau)| + \mu^* \sup_{\tau \leq t} |u(\tau)| + 1 + \varepsilon(t)), \quad (A.6) \end{aligned}$$

易知存在独立于  $a$  的正常数  $M_2$  和时间  $T_2$ , 当  $t > T_2$  时  $|H(s)L_{n^*}(s)e_1(t)| \leq M_2$ . 选择控制律(19)的参数  $K^*$  满足  $K^* > 2(M_1 + M_2)$ , 这样  $M_1\mu^* < \frac{1}{2}$ . 可以得到

$$\begin{aligned} & |u(t)| = \sup_{\tau \leq t} |u(\tau)| \geq \\ & k_m(|H(s)L_{n^*-1}(s)\bar{d}(y,u,t)| + \\ & |H(s)L_{n^*}(s)e_1(t)| + 1). \quad (A.7) \end{aligned}$$

对辅助误差系统(18)取切换面  $S = e_2$ , 则 Lyapunov 函数  $V(e_2(t)) = \frac{1}{2}e_2^2(t)$  沿(18)的时间导数为  $\dot{V}(e_2(t)) \leq -\alpha e_2^2(t) - |e_2(t)|$ , 即  $e_2(t)$  在有限时间内趋向零并永远为零.

c) 证明  $e(t) = O(1/a)$ . 因为  $|H(s)e_1(t)| + |L_{n^*-1}^{-1}(s)e_2(t)| + |y_m(t)| \leq K_y + \varepsilon(t)$ , 这里  $K_y$  是某独立于  $H(s)$  的正数. 由引理 3.1 和 3.2 得

$$\begin{aligned} & |H_1(s)\bar{d}(y,u,t)| \leq (n^*/a)L'[\sup_{\tau \leq t} |y(\tau)| + \\ & \sup_{\tau \leq t} |u(\tau)| + 1 + \varepsilon(t)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |H_1(s)\alpha L_1^{-1}(s)\bar{d}(y,u,t)| \leq \\ & (n^*/a)L''[\sup_{\tau \leq t} |y(\tau)| + \sup_{\tau \leq t} |u(\tau)| + 1 + \varepsilon(t)], \end{aligned}$$

不妨设  $K_y \geq \max\{L', L''\}$ , 代入式(A.4), 再左右两边在区间  $[0, t]$  上取最大值, 得

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \leq t} |y(\tau)| \leq \frac{n^*K_y}{a - n^*K_y}[\sup_{\tau \leq t} |u(\tau)| + 1] + \frac{a}{a - n^*K_y}K'_y, \end{aligned} \quad (A.8)$$

其中  $K'_y$  是与初始状态有关的常数. 将(A.8)代入(19)中得到

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \leq t} |u(\tau)| \leq & 2k_mK^* \left\{ \frac{n^*K_y}{a - n^*K_y}[\sup_{\tau \leq t} |u(\tau)| + 1] + \right. \\ & \left. \frac{a}{a - n^*K_y}K'_y \right\} + 2k_mK^*[\sup_{\tau \leq t} |e_2(\tau)| + 1]. \end{aligned}$$

只要下列不等式  $1 - 2k_mK^* [n^*K_y/(a - n^*K_y)] > 1/2$  成立,  $u(t)$  就是有界的, 且其界独立于  $a$ . 当  $a$  趋向无穷大时上面不等式总成立.  $u(t)$  的有界性保证输出  $y(t)$  的有界性. 综合前面分析, 闭环系统中所有信号均有界, 且界独立于  $a$ . 取  $V(e(t)) = \frac{1}{2}e^2(t)$ , 可得存在正常数  $M^*$ , 当  $t$  趋向无穷大时  $|e(t)| < M^*/a$ , 即当  $t$  充分大时,  $e(t) = O(1/a)$ .

d) 在(15)中,  $L_{n^*-1}^{-1}(s)e_2$  趋向零. 所以对于一个充分大的  $T$ , 当  $t > T$  时,  $|e_0(t)| \leq M^*/a + \varepsilon(t)$ , 即  $e_0(t) = O(1/a)$ . 这说明当选择  $a$  非常大时, 闭环系统的跟踪误差  $e_0(t)$  渐近收敛到原点附近的一个小邻域内, 当  $a$  趋向无穷大时, 跟踪误差  $e_0(t)$  趋向零.

作者简介:

顾建忠 (1977—), 女, 主要研究方向为时变系统控制与自适应控制, E-mail: giz7789@eyou.com;

武玉强 (1962—), 男, 曲阜师范大学教授, 东南大学博士生导师, 研究方向为变结构控制、非线性系统控制与自适应控制, E-mail: wyq@mail.qfnu.edu.cn.