

## 无标度网络度秩指数的变化范围

王 林<sup>1,2</sup>, 戴冠中<sup>2</sup>

(1. 西安理工大学 自动化学院, 陕西 西安 710048; 2. 西北工业大学 自动化学院, 陕西 西安 710072)

**摘要:** 实证研究表明, 绝大多数复杂网络的结点的度分布服从幂律分布, 该幂律分布的幂指数的绝对值(度分布指数)介于2和3之间. 然而, 至今尚未发现为什么度分布指数介于2和3之间的研究结果. 本文证明了度分布指数大于2, 从而部分回答了上述问题. 为此, 本文引进度秩指数, 并给出了度秩指数和度分布指数之间的关系. 通过对度秩指数与网络结构熵之间的关系的刻画, 发现了度秩指数与网络结构熵以及网络规模之间的函数依赖关系, 从而最终证明了度秩指数的临界值趋于1, 并给出了仿真结果.

**关键词:** 复杂网络; 无标度网络; 度分布; 度秩指数; 网络结构熵

**中图分类号:** N94, TP1      **文献标识码:** A

## Range of degree-rank exponent of scale-free networks

WANG Lin<sup>1,2</sup>, DAI Guan-zhong<sup>2</sup>

(1. School of Automation, Xi'an University of Technology, Xi'an Shaanxi 710048, China;

2. School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710072, China)

**Abstract:** Empirical study shows that most of complex networks are scale-free, and the node degrees of which obey the power-law distribution with the absolute value of the corresponding power exponent (known as degree distribution exponent) lying between 2 and 3. However, there is no research result on why the degree distribution exponent lies between 2 and 3 so far. The authors prove that the degree distribution exponent is greater than 2 and thus partially solve the problem mentioned above. First, the degree-rank exponent is introduced, the relation between the degree-rank exponent and the degree distribution exponent is also given. Through the characterization on the relation between the degree-rank exponent and the network structural entropy, functional dependent relations among the degree-rank exponent, the network structural entropy and the number of nodes of the network are then obtained and the result that the degree-rank exponent approaches one is proved. Finally, simulation results are given to illustrate the theoretical result.

**Key words:** complex network; scale-free network; degree distribution; degree-rank exponent; network structural entropy

### 1 引言(Introduction)

自然界中存在着大量的复杂网络, 如万维网(WWW)、因特网、电力网、科学家合作网、学术论文引文网以及电影明星合作网络等等. 这些网络规模庞大, 结点关系复杂, 结点间关系的结构性数据难以获得. 在Erdos, Renyi等人引入随机图理论后, 研究人员一直将这些网络作为随机图进行研究. 在随机图理论中, 网络中结点的度分布服从Poisson分布<sup>[1]</sup>.

随着计算机技术、数据处理技术以及计算机网络的发展, 研究人员可以获得各种复杂网络的结构性数据. Barabasi, Faloutsos等人在对WWW, Internet等复杂网络进行了充分的实证研究之后

发现<sup>[2~4]</sup>, 这些网络中结点的度分布并不是服从Poisson分布, 而是服从幂律分布, 即这些网络是无标度(scale-free)网络. 进一步研究发现, 不仅仅WWW和Internet为无标度网络, 自然界大多数复杂网络中结点的度分布都服从幂律, 即自然界大多数复杂网络都是无标度网络<sup>[2,4]</sup>.

研究结果还表明, 不仅复杂网络中的结点的度分布服从幂律, 网络中还存在许多其他形式的幂律<sup>[3]</sup>, 如结点对之间的Hop数<sup>[2]</sup>、Internet的连接率<sup>[5,6]</sup>等等. 为了叙述方便, 在此介绍一下Faloutsos等人引入的度秩指数的概念<sup>[3]</sup>. Faloutsos等人发现, 将复杂网络中的结点按照其度的大小排序之后, 结点的度 $d_i$ 与其序号 $i$ 之间的函数关系满足幂律:  $d_i \propto i^{-\alpha}$ ,

$i = 1, 2, \dots, N$ , 其中 $\alpha > 0$ 称为网络的度秩指数,  $N$ 为网络中的结点总数(即网络的规模). 实证研究发现, 在自然界的大多数复杂网络中, 结点的度分布所服从的幂律的幂指数的绝对值 $\beta$ 位于2和3之间<sup>[2,4]</sup>, 而度秩指数 $\alpha$ 与幂指数的绝对值 $\beta$ 之间满足关系 $\alpha = \frac{1}{\beta - 1}$ (参见文献[7]). 因此, 度秩指数应该位于0.5和1之间.

Barabasi, Albert等人进一步研究了复杂网络的演化过程, 提出了著名的BA网络演化模型<sup>[8]</sup>. 该模型假定, 网络中最初存在 $m_0$ 个结点, 且 i) 每过单位时间, 网络增加一个新结点以及由新结点引向网络中已有结点的 $m$  ( $m < m_0$ ) 条边; ii) 新结点与网络中原有结点之间引入一条新边的概率正比于原有结点已经拥有的连接边数(连接偏好). 根据BA模型所演化出的网络是无标度网络, 且其结点的度分布的幂指数的绝对值 $\beta$ 为3.

自然界中大多数复杂网络的度秩指数均位于0.5和1之间这一事实说明, 复杂网络往往是按照某种组成原则(organizing principle)进行演化的, 这种组成原则限定了度秩指数的变化范围, 从而限定了复杂网络的拓扑结构, 使得复杂网络不仅区别于随机网络, 而且也区别于一般意义下的无标度网络. 然而, 至今为止, 尚未见到研究人员对此进行研究. 本文作者在文献[9]中运用所提出的复杂网络吸引率概念, 证明了度秩指数临界值趋于1. 本文利用网络结构熵概念<sup>[10]</sup>, 从仿真和理论研究两个方面给出了度秩指数与网络结构熵<sup>[10]</sup>之间的内在联系, 提出了度秩指数的临界值概念, 并针对不同规模的无标度网络计算出了相应的度秩指数的临界值, 最后给出了网络规模趋于无穷大时度秩指数的临界值为1. 这个结论进一步证明了大多数复杂网络的度秩指数的一个临界值趋于1的实证事实, 从而部分地回答了上述问题.

## 2 度秩指数与网络结构熵之间的关系(Relation between degree-rank exponent and network structural entropy)

本节针对无标度网络定义网络结构熵, 并研究网络结构熵与无标度网络中的度秩指数的关系.

假设 $G = (V, E)$ 为无标度网络所对应的图, 其中结点集为 $V = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ , 结点的度定义为与该结点相连的边的数目. 假定结点所对应的度为 $D = (d_1, d_2, \dots, d_N)$ . 不妨假定 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_N$ . 由于本文研究的是无标度网络, 故存在 $\alpha > 0$ 使得<sup>[3]</sup>

$$d_i = Ci^{-\alpha}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

这里的参数 $\alpha > 0$ 称为该网络的度秩指数.

定义结点 $v_i$ 的度的概率分布为

$$p_i = d_i / \sum_{j=1}^N d_j, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Barabasi, Albert等人所提出的BA网络演化模型<sup>[8]</sup>正是利用上述概率分布来引进“连接偏好”的概念. 根据Barabasi, Albert等人的结论, 上述概率分布实际上刻画了系统中新增加的结点如何连接到系统中已有结点的偏好情况. 根据上述概率分布, 定义网络结构熵如下:

$$E = - \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i. \quad (3)$$

网络结构熵越大, 说明式(2)的概率分布越均匀, 因而网络中新增结点与系统中所有原结点的连接的可能性基本均等, 网络将朝着各个结点的度值趋于相等的方向发展. 反之, 网络结构熵越小, 说明概率分布式(2)中只有少数结点有较大的概率, 其余概率都较小, 因而网络中新增结点将以较大的概率连接到网络中少数结点, 网络将朝着星形结构的方向发展.

下面来考察网络结构熵与度秩指数之间的关系. 由式(1)(2)和(3), 有

$$E(\alpha, N) = \frac{\alpha \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} \ln i}{\sum_{i=1}^N i^{-\alpha}} + \ln \sum_{i=1}^N i^{-\alpha}. \quad (4)$$

由式(4)知, 网络结构熵依赖于网络的规模 $N$ 以及网络的度秩指数 $\alpha$ .

下面深入研究式(4)中的函数关系以揭示网络结构熵与网络的规模 $N$ 以及网络的度秩指数 $\alpha$ 的内在联系.

针对 $N=10, 000, 50, 000, 100, 000, 200, 000, 400, 000, 800, 000$ , 在 $\alpha \in [0, 5]$  的范围内描绘出 $E(\alpha, N)$  的曲线如图1所示. 图1中的6条曲线从下到上依次对应 $N=10,000, 50,000, 100,000, 200,000, 400,000, 800,000$ 的网络结构熵-度秩指数曲线. 可看到, 网络结构熵是度秩指数的递减曲线. 这一点的物理意义很明显: 度秩指数越大, 说明网络中多数结点均连接到越来越少的少数结点上, 网络变得越来越有序, 因而网络结构熵必定减少; 当度秩指数趋于0时, 网络中结点与结点之间连接关系的差异越来越不明显, 网络的无序性增强, 因而网络结构熵必定增大.

另外, 从图1还可以看到, 上述曲线在经过 $\alpha$ 为1至1.5中间某个点时, 其凹凸性由上凸变成下凸. 即上述曲线在 $\alpha$ 为1至1.5中间存在一个拐点,

当度秩指数小于该拐点时, 网络结构熵下降较快; 而当度秩指数大于该拐点时, 网络结构熵下降变得平缓. 因此, 该拐点构成了度秩指数的临界点. 为了进一步研究度秩指数的临界点的性质, 本文针对不同的网络规模 $N$ , 描绘出网络结构熵-度秩指数曲线关于 $\alpha$ 的二阶导数的图形如图2所示. 易知, 每条曲线的拐点一定是该曲线的二阶导数的零点, 曲线经过拐点时凹凸性发生变化.

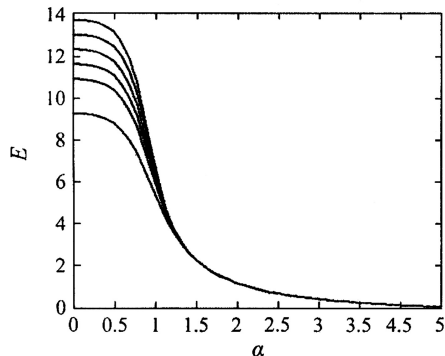


图1  $N = 10, 000, 50, 000, 100, 000, 200, 000, 400, 000, 800, 000$ 时, 网络结构熵-度秩指数曲线

Fig. 1 Network structural entropy vs. degree-rank exponent,  $N = 10, 000, 50, 000, 100, 000, 200, 000, 400, 000, 800, 000$

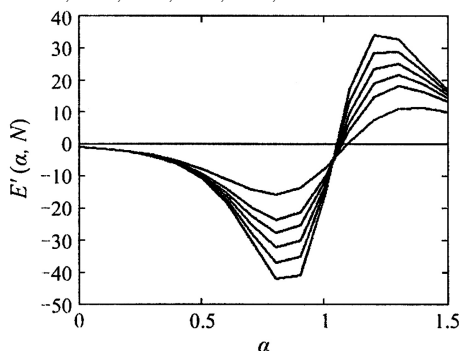


图2  $N=10,000, 50,000, 100,000, 200,000, 400,000, 800,000$ 时, 网络结构熵的二阶导数曲线

Fig. 2 Second derivative of network structural entropy,  $N=10,000, 50,000, 100,000, 200,000, 400,000, 800,000$

图2中, 随着网络规模 $N$ 的增大, 网络结构熵的二阶导数曲线逐渐远离横轴. 从图1可以看到, 网络结构熵-度秩指数曲线的拐点是存在的, 并且随着网络规模 $N$ 的增大, 拐点向1接近. 事实上, 可以计算出相应 $N=10,000, 50,000, 100,000, 200,000, 400,000, 800,000$ 时的拐点为1.0918, 1.0694, 1.0622, 1.0560, 1.0508, 1.0462. 这一点, 从函数关系式(4)也可以获得. 根据式(4), 当 $\alpha > 1$ 时, 网络结构熵 $E(\alpha, N)$ 在 $N \rightarrow \infty$ 时的极限是有限的实数; 当 $\alpha < 1$ 时, 网络结构熵 $E(\alpha, N)$ 在 $N \rightarrow \infty$ 时的极限是无穷大. 关于在网络规模 $N \rightarrow \infty$ 时度秩指数的临界点问题, 本文作者在研究无标度网络的另一个重要参数吸引率时也

涉及到, 并且得到与本文相同的结论<sup>[9]</sup>.

### 3 理论研究(Theoretical study)

本节将从数学上证明上节的若干结论. 首先证明一个辅助引理.

**引理 1** 设 $\alpha > 0, m$ 为非负整数, 则极限  $\lim_{N \rightarrow +\infty} (\sum_{i=1}^N i^{-\alpha} (\ln i)^m - \int_1^N x^{-\alpha} (\ln x)^m dx)$  存在.

**证** 设  $Z_N = \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} (\ln i)^m - \int_1^N x^{-\alpha} (\ln x)^m dx$ . 本文将证明存在正整数 $N_0$ , 使得当 $N > N_0$ 时,  $\{Z_N\}$ 是一个单调递减的有界序列, 从而极限存在.

根据积分中值定理, 可以得到

$$\begin{aligned} Z_{N+1} - Z_N &= \\ (N+1)^{-\alpha} (\ln(N+1))^m - \int_N^{N+1} x^{-\alpha} (\ln x)^m dx &= \\ (N+1)^{-\alpha} (\ln(N+1))^m - \rho^{-\alpha} (\ln \rho)^m. \end{aligned}$$

其中

$$N < \rho < N+1. \tag{5}$$

令 $g(x) = x^{-\alpha} (\ln x)^m$ , 则

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\alpha x^{-\alpha-1} (\ln x)^m + m x^{-\alpha-1} (\ln x)^{m-1} = \\ &= -x^{-\alpha-1} (\ln x)^{m-1} (\alpha \ln x - m). \end{aligned} \tag{6}$$

容易看出, 存在正整数 $N_0$ , 使得当 $x > N_0$ 时,  $g'(x) < 0$ , 从而 $g(x)$ 单调递减, 于是对于 $N_0 < N < \rho < N+1$ , 得知 $g(N+1) - g(\rho) < 0$ .

根据式(5),  $Z_{N+1} < Z_N$ . 即当 $N > N_0$ 时,  $\{Z_N\}$ 单调递减.

现证明 $\{Z_N\}$ 是一个有界序列. 事实上, 由于当 $N > N_0$ 时,  $\{Z_N\}$ 单调递减, 只要证明 $\{Z_N\}$ 有下阶即可.

当 $N > N_0 + 2$ 时,

$$\begin{aligned} Z_N &= \\ \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} (\ln i)^m - \int_1^N x^{-\alpha} (\ln x)^m dx &= \\ \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} (\ln i)^m - \sum_{i=1}^{N-1} \int_i^{i+1} x^{-\alpha} (\ln x)^m dx &= \\ N^{-\alpha} (\ln N)^m + \sum_{i=1}^{N-1} (i^{-\alpha} (\ln i)^m - \int_i^{i+1} x^{-\alpha} (\ln x)^m dx) &= \\ N^{-\alpha} (\ln N)^m + \sum_{i=1}^{N-1} (i^{-\alpha} (\ln i)^m - \rho_i^{-\alpha} (\ln \rho_i)^m) &= \\ N^{-\alpha} (\ln N)^m + \sum_{i=1}^{N_0} (i^{-\alpha} (\ln i)^m - \rho_i^{-\alpha} (\ln \rho_i)^m) + \\ \sum_{i=N_0+1}^{N-1} (i^{-\alpha} (\ln i)^m - \rho_i^{-\alpha} (\ln \rho_i)^m). \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $i < \rho_i < i+1$ .

由于 $g(x) = x^{-\alpha} (\ln x)^m$ 当 $x > N_0$ 时单调递减,

可以看出,式(7)中的最后一个和式大于0,于是根据式(7),当 $N > N_0 + 2$ 时,

$$Z_N > \sum_{i=1}^{N_0} (i^{-\alpha} (\ln i)^m - \rho_i^{-\alpha} (\ln \rho_i)^m), \quad (8)$$

即 $\{Z_N\}$ 存在下阶.

总之,存在正整数 $N_0$ ,使得当 $N > N_0$ 时, $\{Z_N\}$ 是一个单调递减的有界序列,从而极限存在.

证毕.

根据式(4),可以求得网络结构熵关于度秩指数 $\alpha$ 的一阶导数为

$$E'(\alpha, N) = \frac{\alpha \left( \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} (\ln i)^2 \sum_{j=1}^N j^{-\alpha} - \left( \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} \ln i \right)^2 \right)}{\left( \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} \right)^2}. \quad (9)$$

证明下列定理1.

**定理1** 关于 $E'(\alpha, N)$ ,有下列结论:

1) 当 $\alpha > 0$ 时,  $E'(\alpha, N) < 0$ ;

2) 当 $0 \leq \alpha < 1$ 时,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} E'(\alpha, N) = -\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2};$$

3) 当 $\alpha = 1$ 时,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} E'(\alpha, N) = -\infty$ ;

4) 当 $\alpha > 0$ 时, 极限  $\lim_{N \rightarrow +\infty} E'(\alpha, N)$  存在;

5)  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E'(\alpha, N) = 0$ .

结论1)的证明:

根据式(9),有

$$E'(\alpha, N) = \frac{\alpha \left( \sum_{i,j=1}^N i^{-\alpha} j^{-\alpha} (\ln i)^2 - \sum_{i,j=1}^N i^{-\alpha} j^{-\alpha} \ln i \ln j \right)}{\left( \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} \right)^2} = \frac{\alpha \left( \sum_{i,j=1}^N (ij)^{-\alpha} \ln i (\ln i - \ln j) \right)}{\left( \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} \right)^2} = -\alpha \left( \sum_{i < j} (ij)^{-\alpha} \ln i (\ln i - \ln j) + \sum_{i > j} (ij)^{-\alpha} \ln i (\ln i - \ln j) \right) / \left( \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} \right)^2. \quad (10)$$

在式(10)分子的第二个和式中,交换变量 $i$ 和 $j$ 后得到

$$E'(\alpha, N) = -\alpha \left( \sum_{i < j} (ij)^{-\alpha} \ln i (\ln i - \ln j) - \right.$$

$$\left. \sum_{i < j} (ij)^{-\alpha} \ln j (\ln i - \ln j) \right) / \left( \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} \right)^2 =$$

$$(-\alpha \sum_{i < j} (ij)^{-\alpha} (\ln i - \ln j)^2) / \left( \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} \right)^2 < 0. \quad (11)$$

结论1)得证.

结论2)的证明:

令

$$U_N = \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} - \int_1^N x^{-\alpha} dx, \quad (12)$$

$$V_N = \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} \ln i - \int_1^N x^{-\alpha} \ln x dx, \quad (13)$$

$$W_N = \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} (\ln i)^2 - \int_1^N x^{-\alpha} (\ln x)^2 dx. \quad (14)$$

根据引理1,  $U_N$ ,  $V_N$ 和 $W_N$ 当 $N \rightarrow +\infty$ 时的极限存在,特别地,这3个序列是有阶的.另一方面,

$$\int_1^N x^{-\alpha} dx = \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}, \quad (15)$$

$$\sum_{i < j} (ij)^{-\alpha} \ln j (\ln i - \ln j) / \left( \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} \right)^2 = \int_1^N x^{-\alpha} \ln x dx = \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ln N - \frac{N^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^2} + \frac{1}{(1-\alpha)^2}, \quad (16)$$

$$\int_1^N x^{-\alpha} (\ln x)^2 dx = \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} (\ln N)^2 - \frac{2N^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^2} \ln N + \frac{2N^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^3} - \frac{2}{(1-\alpha)^3}. \quad (17)$$

令

$$\bar{U}_N = \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} - \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad (18)$$

$$\bar{V}_N = \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} \ln i - \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ln N + \frac{N^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^2}, \quad (19)$$

$$\bar{W}_N = \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} (\ln i)^2 - \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} (\ln N)^2 + \frac{2N^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^2} \ln N - \frac{2N^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^3}. \quad (20)$$

根据式(12)~(20)以及 $U_N$ ,  $V_N$ 和 $W_N$ 的有界性,得知 $\bar{U}_N$ ,  $\bar{V}_N$ 和 $\bar{W}_N$ 是有阶序列.将式(18)(19)及(20)代入式(9)得到

$$E'(\alpha, N) = -\frac{\alpha(\Delta_1 - \Delta_2)}{\left( \bar{U}_N + \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^2}. \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} (\ln i)^2 \sum_{i=1}^N i^{-\alpha} = \\ &(\bar{W}_N + \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} (\ln N)^2 - \frac{2N^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^2} \ln N + \\ &\frac{2N^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^3} (\bar{U}_N + \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha})) = \\ &\frac{N^{2(1-\alpha)} (\ln N)^2}{(1-\alpha)^2} - \frac{2N^{2(1-\alpha)} \ln N}{(1-\alpha)^3} + \\ &\frac{2N^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^4} + O(N^{1-\alpha} (\ln N)^2), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (\sum_{i=1}^N i^{-\alpha} \ln i)^2 = \\ &\frac{N^{2(1-\alpha)} (\ln N)^2}{(1-\alpha)^2} - \frac{2N^{2(1-\alpha)} \ln N}{(1-\alpha)^3} + \\ &\frac{N^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^4} + O(N^{1-\alpha} \ln N). \end{aligned} \quad (23)$$

根据式(21)(22)及(23), 可得

$$\begin{aligned} E'(\alpha, N) &= \\ &\frac{\alpha \frac{N^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^4} + O(N^{1-\alpha} (\ln N)^2)}{\frac{N^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2} + O(N^{1-\alpha})} \rightarrow -\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

结论2)得证.

结论3)的证明:

令

$$U_N = \sum_{i=1}^N i^{-1} - \int_1^N x^{-1} dx, \quad (25)$$

$$V_N = \sum_{i=1}^N i^{-1} \ln i - \int_1^N x^{-1} \ln x dx, \quad (26)$$

$$W_N = \sum_{i=1}^N i^{-1} (\ln i)^2 - \int_1^N x^{-1} (\ln x)^2 dx. \quad (27)$$

根据引理1,  $U_N, V_N$  和  $W_N$  当  $N \rightarrow +\infty$  时的极限存在, 特别地, 这3个序列是有阶的. 另一方面,

$$\int_1^N x^{-1} dx = \ln N, \quad (28)$$

$$\int_1^N x^{-1} \ln x dx = \frac{(\ln N)^2}{2}, \quad (29)$$

$$\int_1^N x^{-1} (\ln x)^2 dx = \frac{(\ln N)^3}{3}. \quad (30)$$

将式(25)~(30)代入式(9)得到

$$\begin{aligned} E'(\alpha, N)|_{\alpha=1} &= \\ &\frac{(W_N + \frac{(\ln N)^3}{3})(U_N + \ln N) - (V_N + \frac{(\ln N)^2}{2})^2}{(U_N + \ln N)^2} = \end{aligned} \quad (31)$$

$$-\frac{(\ln N)^4}{12} + O((\ln N)^3) - \frac{(\ln N)^4}{(U_N + \ln N)^2} \rightarrow -\infty. \quad (32)$$

即定理1中的结论(3)得证.

结论4)的证明是明显的.

结论5)的证明是明显的.

设  $\alpha_N$  为  $E'(\alpha, N)$  的最小值点(最小值点的存在性可以由定理1的结论1)和结论5)推得), 则  $\alpha_N$  必定是网络结构熵  $E(\alpha, N)$  的拐点, 称为度秩指数  $\alpha$  的临界点. 在上节已经猜测出  $\alpha_N \rightarrow 1$ , 下面给出严格的数学证明.

**定理 2** 度秩指数  $\alpha$  的临界点满足:  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \alpha_N = 1$ .

**证** 由于  $\alpha_N$  为  $E'(\alpha, N)$  的最小值点, 故特别地有  $E'(\alpha_N, N) \leq E'(1, N)$ . 由于  $E'(1, N) \rightarrow -\infty$  (定理1的结论3)), 得知  $E'(\alpha_N, N) \rightarrow -\infty$ . 再利用定理1的结论2)、结论4)和结论5), 有  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \alpha_N = 1$ .

证毕.

#### 4 结论(Conclusion)

本文通过仿真和理论研究两个方面对于度秩指数与网络结构熵之间的关系做了深入的研究, 发现了下列结果:

1) 网络结构熵是度秩指数和网络规模的函数, 随着度秩指数的增加而单调递减;

2) 无标度网络中的度秩指数存在一个依赖于网络规模  $N$  的临界值  $\alpha_N$ , 当度秩指数小于  $\alpha_N$  时, 网络结构熵的减少速度随着度秩指数的增加而增加, 当度秩指数大于  $\alpha_N$  时, 网络结构熵的减少速度随着度秩指数的增加而减少;

3) 当网络中的结点总数  $N$  无限增加时, 临界值  $\alpha_N \rightarrow 1$ .

本文的结果与本文作者在文献[9]中所获得的结果, 证明了复杂网络的度秩指数  $\alpha$  的临界值趋于1. 至于度秩指数  $\alpha$  的另一临界值为0.5的问题, 有待于进一步研究.

#### 参考文献(References):

- [1] ERDOS P, RENYI A. On the evolution of random graphs[J]. *Publication of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Science*, 1960, 5(1): 17 - 61.
- [2] AIBERT R, BARABASI A L. Statistical mechanics of complex networks[J]. *Reviews of Modern Physics*. 2002, 74(1):47 - 97.
- [3] FALOUTSOS M, FALOUTSOS P, FALOUTSOS C. On power-law relationships of the Internet topology[J]. *Computer Communication Review*, 1999, 29(4): 251 - 262.
- [4] 吴金闪, 狄增如. 从统计物理学看复杂网络研究[J]. *物理学进展*, 2004, 24(1): 18 - 46.  
(WU Jinshan, DI zengru. Complex networks in statistical physics[J]. *Progress in Physics*, 2004, 24(1): 18 - 24.)

- [8] YONEYAMA J, NISHIKAWA M, KATAYAMA H, et al. Output stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 111: 253 – 266.
- [9] YONEYAMA J, NISHIKAWA M, KATAYAMA H, et al. Design of output feedback controllers for Takagi-Sugeno fuzzy systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 121(1): 127 – 148.
- [10] TEIXEIRA M C M, ASSUNCAO E, AVELLAR R G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers [J]. *IEEE Trans on Fuzzy systems*, 2003, 11(5): 613 – 623.
- [11] KORBA P, BABUSKA R, VERBRUGGEN H B, et al. Fuzzy gain scheduling: Controller and observer design based on Lyapunov method and convex optimization [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2003, 11(3): 285 – 298.
- [12] 修智宏,张运杰,任光. 输入采用标准模糊分划的模糊控制系统性质及稳定性分析[J]. 模糊系统与数学, 2004, 18(4): 99 – 106. (XIU Zhihong, ZHANG Yunjie, REN Guang. Properties and stability analysis of fuzzy control systems employing standard fuzzy partition inputs [J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2004, 18(4): 99 – 106.)
- [13] XIU Z H, REN G. Stability analysis and systematic design of Takagi-Sugeno fuzzy control systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, 151: 119 – 138.
- [14] CAO S G, REES N W, FENG G. Quadratic stability analysis and design of continuous-time fuzzy control systems [J]. *System Science*, 1996, 27(2): 193 – 203.
- [15] CAO S G, REES N W, FENG G. Further results about quadratic stability of continuous-time fuzzy control systems [J]. *System Science*, 1997, 28(4): 397 – 404.
- [16] D'AZZO J J, HOUPIIS C H. *Linear Control System Analysis and Design-Conventional and Modern* [M]. Fourth Edition. New York: McGraw-Hill Companies, 1995.
- [17] OGATA K. *Modern Control Engineering* [M]. Third Edition. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1998.

### 作者简介:

**修智宏** (1967—),男,海军大连舰艇学院作战指挥系高级工程师,现在大连理工大学控制科学与工程流动站做博士后研究工作,研究领域为模糊控制、混杂系统、作战指挥自动化, E-mail: xzhdy@126.com;

**王伟** (1955—),男,大连理工大学信息与控制研究中心教授,博士生导师,研究领域为自适应控制、模型预测控制、计算机控制, E-mail: wangwei@dlut.edu.cn.

### (上接第507页)

- [5] 王林,戴冠中. Internet拓扑中连接率的研究[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2004, 1(2): 9 – 15. (WANG Lin, DAI Guanzhong. Research on the connectivity coefficients of Internet topology [J]. *Complex Systems And Complexity Science*, 2004, 1(2): 9 – 15.)
- [6] WANG Lin, DAI Guanzhong. Research on the connectivity coefficients of internet topology [C]//*Proc of IADIS Int Conf WWW/Internet 2004, Madrid, Spain*. Libon, Portugal: IADIS Press, 2004.
- [7] CHOU Hongsong. A note on power-laws of internet topology [DB/OL]. ArXiv:cs.NI/0012019.
- [8] BARABASI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. *Science*. 1999, 286(15): 509 – 512.
- [9] 王林,戴冠中. Internet拓扑结构的静态概率模型研究[J]. 西北工业大学学报, 2004, 23(3): 341 – 346. (WANG Lin, DAI Guan-zhong. Exploring global properties of Internet topology [J]. *J of Northwestern Polytechnical University*, 2005, 23(3): 341 – 346.)
- [10] 谭跃进,吴俊. 网络结构熵及其在非标度网络中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(6): 1 – 3. (TAN Yuejin, WU Jun. Network structure entropy and its application [J]. *System Engineering Theory and Practice*, 2004, 24(6): 1 – 3.)

### 作者简介:

**王林** (1963—),男,西安理工大学教授,西北工业大学在职博士研究生,主要研究方向为复杂系统及控制理论, E-mail: wanglin@xaut.edu.cn;

**戴冠中** (1937—),男,西北工业大学教授,博士生导师,主要研究方向为复杂系统、控制及网络信息安全, E-mail: daigz@nwpu.edu.cn.