文章编号：1000−8152(2006)04−0523−03

随机柔性Flow shop加权完成时间调度问题的启发式策略性能分析

陈华平[1]，古春生[1,2]

(1. 中国科学技术大学 信息管理与决策科学系, 安徽 合肥 230052; 2. 江苏技术师范学院 计算机科学与工程学院, 江苏 常州 213001)

摘要: 因实际生产中调度问题的规模很大, 分析其近似算法的绝对性能比很难, 有时甚至不可能, 所以研究近似算法的渐近性能比就很有必要. 本文针对随机柔性Flow shop加权完成时间调度问题, 使用单机松弛和概率分析方法, 证明了基于加权最短期望处理时间需求的启发式策略是渐近最优的.

关键词: 调度; 随机柔性Flow shop; 启发式策略; 渐近最优

中图分类号: O223 **文献标识码**: A

Performance analysis of policy of heuristic for the stochastic flexible flow shop weighted completion time scheduling problem

CHEN Hua-ping[1], GU Chun-sheng[1,2]

(1. Department of Information Management and Decision Science, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230052, China;
2. School of Computer Science and Engineering, Jiangsu Teachers University of Technology, Changzhou Jiangsu 213001, China)

Abstract: Due to the large size of scheduling problem in reality, it is more difficult, sometimes impossible, to analyze the absolute performance ratio of its approximation algorithm. It is thus necessary to study the asymptotical performance ratio of approximation algorithm for scheduling problem. By using single machine relaxation and probabilistic analysis, this paper proves that the policy of heuristic based on weighted shortest expected processing requirement is asymptotically optimal for the stochastic flexible flow shop weighted completion time scheduling problem.

Key words: scheduling; stochastic flexible Flow shop scheduling; policy of heuristic; asymptotic optimal

1 问题描述(Problem description)

在恒速处理机中心的随机柔性Flow shop加权完成时间调度问题(记为FFSP)中, 有一n个作业的集$J=\{1,2,\cdots,n\}$ 需要依次加工处理在固定的s个处理机中心上, 处理机中心i由l_i个恒速处理机$M_i=\{m_{i,1},m_{i,2},\cdots,m_{i,l_i}\}$ 组成, 机器$m_{i,l}$的速度为$s_{i,l}$. 不失一般性, 假定$s_{i,1}\geqslant s_{i,2}\geqslant\cdots\geqslant s_{i,l_i}>0$.作业$j(j\in J)$ 由s个工序$o_{j,1},o_{j,2},\cdots,o_{j,s}$组成, 每个工序由相应处理机中心的任一台机器进行加工, 工序$o_{j,i}$的处理时间需求$p_{j,i}$为一正随机处理时间需求, 作业权重为w_j, 作业到达时间相同. 知道作业权重w_j和作业处理时间需求的期望$\mathrm{E}[p_{j,i}]$, 而实际作业工序处理时间需求$p_{j,i}$直到作业工序完成时才知道. 每个作业一次仅能加工处理在某一处理机中心的一个机器上, 并且必须按处理机中心1到处理机中心s的顺序依次进行加工处理. 处理机中心的任一机器能处理任何作业的相应工序, 但每个机器一次只能加工处理一个作业. 两个连续的处理机中心之间有无穷的作业存储单元. 最优调度者没有实际的处理时间需求知识, 并且作业加工处理过程中不允许改变作业分配. 问题的目的是确定一个可行作业调度策略, 以使所有作业在最后一个处理机中心的加权完成时间期望和$\mathrm{E}[\sum w_jC_j]$最小, 这里C_j表示作业j的完成时间. 设P为该问题, $\mathrm{E}[Z^*]$ 为它的最优期望目标值, $\mathrm{E}[Z^{\mathrm{H}}]$为启发式策略H所产生的期望目标值.

显然, 这种问题是强NP-难问题[1,2]. 论文下面首先介绍相关研究工作, 然后给出启发式策略, 并证明

收稿日期: 2004−12−16; 收修改稿日期: 2005−09−22.
基金项目: 安徽省自然科学基金资助项目 (050460404); 中国科学技术大学研究生创新基金资助项目(KD2004056).

该启发式策略是渐近最优的.

2 相关研究(Related work)

Rothkopf[3]证明了启发式策略WSEPT(加权最短期望处理时间优先)是随机问题$1|p_j\sim$ stoch$|\mathrm{E}[\sum\omega_jC_j]$的最优策略. Chou[4]证明了随机问题$1|p_j\sim$ stoch$,r_j|\mathrm{E}[\sum\omega_jC_j]$的启发式WSEPTA(有效作业加权最短期望处理时间优先)是渐近最优的. Mohring, Schulz and Uetz[5]基于LP方法分析证明了随机问题$P|p_j\sim$ stoch$|\mathrm{E}[\sum\omega_jC_j]$的启发式策略WSEPT是渐近最优的. 而对于随机Flow shop问题$Fm|p_{j,i}\sim$ stoch$,r_j|\mathrm{E}[\sum\omega_jC_j]$, 在一定概率假设条件下, Liu[6]证明了基于WSEPT的启发式策略是渐近最优的.

3 启发式策略(Policy of heuristic)

首先, 构造一个与P关联的随机单机问题$1|p_j\sim$ stoch$|\sum\omega_jC_j$, 记为P_q. 这里: q满足$s_q=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant s}s_i$, $s_i=\sum\limits_{k=1}^{l_i}s_{i,k}$, $m=l_q$. P_q构造如下: 有一n个作业的集$N=\{1,2,\cdots,n\}$, 作业$j(j\in N)$的权重与P中作业$j(j\in J)$的权重相同, 处理时间需求与P中作业j在处理机中心q的处理时间需求相同, 即$p_j=P_{j,q}$.如果P_q处理在速度为s_q的单机上, 则它的最优期望值记为$\mathrm{E}[Z_1^*(P_q)]$; 如果P_q处理在速度为$s_{q,1}\geqslant s_{q,2}\geqslant\cdots\geqslant s_{q,l_q}$的恒速平行机上, 则它的最优期望值记为$\mathrm{E}[Z_m^*(P_q)]$.

其次, 构造一个与随机柔性Flow shop机器模型关联的特殊随机Flow shop机器模型, 记为FSP, 它有s个处理机中心, 处理机中心i由一台速度为s_i的机器组成. P在FSP上由最优策略和启发式策略H所产生的期望值分别记为$\mathrm{E}[Z^*_{\mathrm{FSP}}]$, $\mathrm{E}[Z^{\mathrm{H}}_{\mathrm{FSP}}]$.

P_q使用启发式策略WSEPR(加权最短期望处理时间需求): 按权重与期望处理时间需求之比$\omega_j/\mathrm{E}[p_j]$的非增序加工处理作业. 设π为WSEPR所产生的作业调度序列(假定$\pi=1,2,\cdots,n$); $\mathrm{E}[Z_1^\pi(P_q)]$为WSEPR在速度为s_q的单机上所产生的期望目标值.

启发式策略 H 按照π在FFSP, FSP上加工处理P, 即在FFSP, FSP上的所有处理机中心上的作业加工序列与π相同.

4 渐近最优定理及其证明(Asymptotically optimal theorem and its proof)

定理 1 设随机问题P有一n个作业的集$J=\{1,2,\cdots,n\}$, 作业$j(j\in J)$在处理机中心$i(i=1,2,\cdots,s)$的处理时间需求为$p_{j,i}$, 作业权重为ω_j. 假设:

1) 作业权重为定义在区间$(0,1]$上随机变量;

2) 每个作业的处理时间需求$p_{j,i}$为定义在区间$(0,1]$上的同分布的随机变量, 不同作业之间相互独立. 在上述概率假设下, 启发式策略H是渐近最优的, 即概率为1的有$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{E}[Z^{\mathrm{H}}]/n^2=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{E}[Z^*]/n^2$.

在证明定理1之前, 首先给出几个引理.

引理 1 在定理1的假设下, 则$\mathrm{E}[Z_1^*(P_q)]=\mathrm{E}[Z_1^*(P_q)]\leqslant\mathrm{E}[Z_m^*(P_q)]$.

证 等式显然成立[3].

设π_1为P_q在恒速平行机上的最优作业调度序列, 则在恒速平行机上P_q由π_1所产生的作业完成时间的非减序产生新的作业调度序列π_2, 并且在速度为s_q的单机上P_q根据π_2对作业进行加工. 易证$Z_1^{\pi_2}(P_q)\leqslant Z_m^{\pi_1}(P_q)$. 由期望性质知$\mathrm{E}[Z_1^{\pi_2}(P_q)]\leqslant\mathrm{E}[Z_m^{\pi_1}(P_q)]$, 故

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[Z_1^*(P_q)]\leqslant\mathrm{E}[Z_1^{\pi_2}(P_q)]\leqslant\\&\mathrm{E}[Z_m^{\pi_1}(P_q)]=\mathrm{E}[Z_m^*(P_q)].\end{aligned}$$

引理 2 在定理1的假设条件下, 则概率为1的有$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{E}[Z_1^\pi(P_q)]/n^2=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{E}[Z^{\mathrm{H}}_{\mathrm{FSP}}]/n^2$.

证 设$C_j^{\pi,1}$为P_q中作业j在单机上的完成时间, $C_{j,s}^{\pi,1}$为P中作业j在FSP上的完成时间, 则

$$\begin{aligned}&C_j^{\pi,1}=\sum_{r=1}^{j}p_r/s_q,\\&C_{j,s}^{\pi,1}=\max_{1\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_s=j}\{\sum_{r=1}^{t_1}p_{r,1}/s_1+\\&\quad\sum_{r=t_1}^{t_2}p_{r,2}/s_2+\cdots+\sum_{r=t_{s-1}}^{j}p_{r,s}/s_s\}=\\&\quad C_j^{\pi,1}+(2/s_q)\sum_{k\in[s],q}\cdot\\&\quad\max_{1\leqslant l\leqslant j}|\sum_{r=1}^{l}(p_{r,k}-p_{r,q})|+(s-1)/s_q,\\&\mathrm{E}[Z^{\mathrm{H}}_{\mathrm{FSP}}]=\mathrm{E}[\sum_{j=1}^{n}\omega_jC_{j,s}^{\pi,1}]\leqslant\mathrm{E}[Z_1^\pi(P_q)]+(2n/s_q)\cdot\\&\quad\mathrm{E}[\sum_{k[s]\backslash q}\max_{1\leqslant l\leqslant n}|\sum_{r=1}^{l}(p_{r,k}-p_{r,q})|]+\\&\quad n(s-1)/s_q.\end{aligned}$$

在定理1的假设条件下, Liu[6]证明概率为1的有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[\max_{1\leqslant l\leqslant n}|\sum_{r=1}^{l}(p_{r,k}-p_{r,q})|]/n=0,\\&k\in[s]\backslash q,\ \ [s]=\{1,2,\cdots,s\}.\end{aligned}\tag{1}$$

又易证

$$\mathrm{E}[Z_1^*(P_q)]\leqslant\mathrm{E}[Z^*_{\mathrm{FSP}}]\leqslant\mathrm{E}[Z^{\mathrm{H}}_{\mathrm{FSP}}].$$

再由引理1, 引理2得证.

引理 3　如果假定P_q有作业到达时间r_j, $r_j = O(n)$, 设$\pi_3 = 1, 2, \cdots, n$为P_q的一个可行调度策略, $C_j^{\pi_3,m}$, $C_j^{\pi_3,1}$分别为根据π_3在恒速平行机和单机上作业j的完成时间，则

$$C_j^{\pi_3,m} \leqslant C_j^{\pi_3,1} + 2/s_{q,l_q} - 1/s_q. \tag{2}$$

证　根据π_3, 设T为最大作业完成时间的一个上界, $[j]$ 为高优先级的前j个作业, 函数$R_{[j]}^{\pi_3,m}(t)$为在时间t作业集$[j]$在恒速平行机上剩余的处理时间需求, 函数$R_{[j]}^{\pi_3,1}(t)$为在时间t作业集$[j]$在单机上剩余的处理时间需求. 可由反证法证明对于任意时间$t \in [0, T]$, 两个剩余处理时间需求的函数满足

$$R_{[j]}^{\pi_3,m}(t) \leqslant R_{[j]}^{\pi_3,1}(t) + l_v - 1. \tag{3}$$

在时间$t = C_j^{\pi_3,1} - p_j/s_v$时, $[j-1]$中的所有作业已经到达, 故由式(3), $R_{[j-1]}^{\pi_3,m}(t) \leqslant R_{[j-1]}^{\pi_3,1}(t) + l_v - 1 = l_v - 1$. 因此由$\pi_3$, $[j-1]$中作业在恒速平行机上的完成时间不迟于$t + 1/s_{v,l_v}$, 即在恒速平行机上作业j的完成时间不大于$t + 1/s_{v,l_v} + p_j/s_{v,l_v}$.

设$C_{j,i}^{\pi,m}$和$C_{j,i}^{\pi,1}$分别为在FFSP,FSP上根据H, P中作业j在处理机中心i的完成时间.

引理 4　在定理1的假设下, 则$C_{j,i}^{\pi,m} \leqslant C_{j,i}^{\pi,1} + (1/s_{1,l_1} - 1/s_1) + \sum\limits_{k=2}^{i}(2/s_{k,l_k} - 1/s_k)$.

证　证明中固定$i = 2$, 一般情况同样成立. 设$C_{j,2}^{\pi,m,1}$表示根据调度π, 在第1个处理机中心由恒速平行机进行处理, 在第2个处理机中心由速度s_2的单机进行处理的情况下, 作业j 在第2个处理机中心的完成时间. 对作业j作归纳法可证下列不等式成立: $C_{j,2}^{\pi,m,1} \leqslant C_{j,2}^{\pi,1} + 1/s_{1,l_1} - 1/s_1$.再由引理3和上述不等式, 得

$$\begin{aligned} & C_{j,2}^{\pi,m} \leqslant C_{j,2}^{\pi,m,1} + 2/s_{2,l_2}, \\ & 1/s_2 \leqslant C_{j,2}^{\pi,1} + (1/s_{1,l_1} - 1/s_1) + \\ & \qquad \sum_{k=2}^{2}(2/s_{k,l_k} - 1/s_k). \end{aligned}$$

引理 5　在定理1的概率假设下, 则

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[Z^{\mathrm{H}}]/n^2 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[Z_{\mathrm{FSP}}^{\mathrm{H}}]/n^2.$$

证　由引理4得

$$C_{j,s}^{\pi,m} \leqslant C_{j,s}^{\pi,1} + (1/s_{1,l_1} - 1/s_1) + \sum_{k=2}^{s}(2/s_{k,l_k} - 1/s_k),$$

故

$$\mathrm{E}[Z^{\mathrm{H}}] = \mathrm{E}[\sum_{j=1}^{n}\omega_j C_{j,s}^{\pi,m}] \leqslant \mathrm{E}[Z_{\mathrm{FSP}}^{\mathrm{H}}] + n \times s \times \max_{1\leqslant i\leqslant s}(2/s_{i,l_i} - 1/s_i),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{E}[Z_{\mathrm{FSP}}^{\mathrm{H}}]}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{E}[Z_1^*(P_q)]}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{E}[Z_m^*(P_q)]}{n^2} \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{E}[Z^*]}{n^2} \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{E}[Z^{\mathrm{H}}]}{n^2} \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{E}[Z_{\mathrm{FSP}}^{\mathrm{H}}]}{n^2}.$$

定理1证毕.

参考文献(References):

[1] GAREY M R, JHONSON D S, SETHI R. The complexity of flowshop and jobshop scheduling [J]. *Mathematics of Operations Research*, 1976, 1(2): 117 – 129.

[2] PINEDO M. *Scheduling: Theory, Algorithms and Systems*[M]. Engle-wood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995: 352 – 373.

[3] ROTHKOPF M H. Scheduling with random service times [J]. *Management Science*, 1966, 12(9): 707 – 713.

[4] CHOU C M. *Asymptotic performance analyses of machine scheduling problems with release dates*[D]. Evanston, Illinois: Northwestern University, 2001.

[5] MOHRING R H, SCHULZ A S, UETZ M. Approximation in stochastic scheduling: the power of LP-based priority policies [J]. *Journal of the ACM*, 1999, 46(6): 924 – 942.

[6] LIU H. *Probabilistic analysis and practical algorithms for machine scheduling problems with or without release date constraints*[D]. Evanston, Illinois: Northwestern University, 2001.

作者简介:

陈华平　(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为智能信息与决策支持系统、商务智能、机器任务调度,E-mail:hpchen@ustc.edu.cn;

古春生　(1971—), 男, 博士研究生, 主要研究商务智能、多机调度, E-mail:chunsheng_gu@163.com.