

轴向运动弦线横向振动控制的Lyapunov方法

张 伟^{1,2}, 陈立群^{2,3}

(1. 福州大学 机械工程及自动化学院, 福建 福州 350002; 2. 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;

3. 上海大学 力学系, 上海 200436)

摘要: 研究轴向运动弦线和作动器组成的耦合系统的横向振动控制. 此系统被作动器分成未控和受控两部分, 通过作用在作动器上的控制力对受控部分进行主动控制. 分析未控弦线的横向振动的有界性. 采用Lyapunov方法获得控制规律, 并证实受控弦线横向振动的指数稳定性. 在初始扰动和激励力作用下, 通过数值仿真证实控制规律的有效性.

关键词: 轴向运动弦线; 横向振动; 耦合系统; 振动控制; Lyapunov

中图分类号: TP241 **文献标识码:** A

Transverse vibration control of an axially moving string system by Lyapunov method

ZHANG Wei^{1,2}, CHEN Li-qun^{2,3}

(1. College of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou Fujian 350002, China;

2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, China;

3. Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200436, China)

Abstract: Vibration control of an axially moving string system consisting of a controlled span coupled to a tensioner is investigated in this paper. The axially moving string system is divided into two spans, i.e., a controlled span and an uncontrolled span, by a tensioner located in the middle section of the string. The transverse vibration of the controlled span of the string is controlled by the control force acting on the tensioner, and the constrained point is considered as the right boundary of the controlled span. The Lyapunov method is then employed to design the controlled law for ensuring the vibration reduction of the controlled span, and the exponential stability of the closed loop system under the boundary control is also proved. Finally, results for the response of the controlled string under initial disturbance and excitations are presented, and the effectiveness of the controller is demonstrated by simulations.

Key words: axially moving string; transverse vibration; coupled system; vibration control; Lyapunov

轴向运动弦线的横向振动控制是多个技术领域的重要工程目标, 如动力传送带、空中缆车索道、高楼升降机缆绳、单索架空索等. 随着轴向运动连续介质在柔性机械臂和柔性航天器中的运用, 这类介质的动力学分析和控制已经引起学者广泛注意^[1,2]. 尽管这些工程系统元件具有一些优势, 在一些系统尤其是一些高精密系统中, 由于一些不可预测的振动限制了它们在工程领域中的应用, 因此, 有必要引进控制手段来调整轴向运动弦线的振动^[3]. 在一些轴向传输介质运动中, 采用主动控制是一种重要的控制手段.

与在弦线空间域内采用控制手段相比, 通过边

界控制弦线的横向振动具有一些优势. 当以点分布的传感器和作动器位于鞍点时, 所得到的闭环控制系统是不可控的^[4]. 而与其相比, 在边界上采用控制器, 不仅可以通过主动或准主动^[5,6]控制手段易于实现, 而且增减传感器和作动器也不会改变系统的动力学模型. 基于偏微分方程Laplace变换的频域分析是研究分布参数系统控制的有效方法^[7]. Chung和Tan^[8]将频域分析与行波消去法相结合而提出轴向运动弦线一种新的控制方法, 从波的传播角度分析, 控制器使通过传感器的波在边界作动器处全部消除. 自适应控制是处理参数不确定系统的有效方法. 通过引入两个控制输入, Queiroz^[9]等建立

了自适应控制律,并给出了渐近稳定的控制条件. Fung等^[10]设计了用于弦线纵向振动控制的鲁棒自适应控制器.

本文中,轴向运动弦线被张紧器分为受控和未控两部分,如图1所示.通过作用在张紧器上的控制力对受控部分的横向振动进行控制.对于张紧器及受控部分,未控部分的振动为其外部扰动,约束点为受控弦线的边界.在分析未控部分横向振动有界性的同时,采用Lyapunov方法设计控制器,并证明受控弦线振动的指数稳定性.在数值仿真中,对系统在初始扰动和激励力作用下的横向振动的主动控制进行研究.

1 运动方程(Equations of motion)

轴向运动弦线受控系统的模型如图1所示.此模型包括一根弦线和一个张紧器.本文通过作用在张紧器上的控制力,控制弦线在约束点 x_a 处左半段($0 \leq x \leq x_a$)弦线的横向振动.设外部扰动力 $f(x, t)$ 作用在约束点 x_a 的右半段($x_a \leq x \leq l$)弦线上.此张紧器将弦线分成两部分,即受控部分和未控部分.如果仅考虑受控部分,则张紧器动力学方程为受控弦线的右边界条件.考虑长度为 l 、单位密度为 ρ 、轴向张力为 P ,以均匀运动通过相距为 l 的两个固定孔座的均匀弦线横向振动.

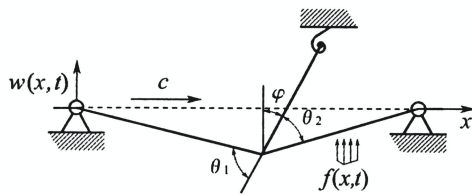


图1 带有张紧器的运动弦线

Fig. 1 Moving string with a tensioner

为简化系统模型,假设

- 1) 忽略系统元件相互间的阻尼影响;
- 2) 忽略弦线的抗弯刚度;
- 3) 忽略张紧器的张紧轮相对其质心的惯性矩.

在上述假设条件下,运用Hamilton原理可推导出弦线和张紧器的动力学方程:

$$\rho w_{tt}(x, t) + 2\rho c w_{xt}(x, t) - P_0 w_{xx}(x, t) + c_v(w_t + c w_x) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_a, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\rho w_{tt}(x, t) + 2\rho c w_{xt}(x, t) - P_0 w_{xx}(x, t) + c_v(w_t + c w_x) = f(x, t), \quad x_a \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$I \ddot{\theta}(t) = P_0 (w_x(x_a^+, t) \cos \theta_2 - w_x(x_a^-, t) \cos \theta_1) b - k \theta(t) - m_e \ddot{\theta}(t), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

边界条件和初始条件分别为

$$\begin{cases} w(0, t) = 0, \quad \chi(t) = b \theta(t), \quad w(l, t) = 0, \\ w(x_a^-, t) = w(x_a^+, t) = \chi(t) \sin \phi, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} w(x, 0) = u_0(x), \quad w_t(x, 0) = v_0(x), \\ \theta(0) = \alpha, \quad \theta_t(0) = \beta. \end{cases} \quad (5)$$

其中: $w(x, t)$ 为弦线的横向振动位移, c 为弦线的纵向运动速度, c_v 为弦线的粘性阻尼系数, $P_0 = P - \rho c^2$, I 和 b 分别为张紧器的有效惯性矩和有效长度, θ 为张紧器相对于平衡位置的转角, m_e 为作用在张紧器上的控制力矩, k 为扭转弹簧刚度, θ_1 和 θ_2 分别为张紧器两侧的弦线在平衡位置 $x = x_a$ 处和张紧器间的夹角, ϕ 为张紧器与铅垂线间的夹角, χ 为张紧器在 $x = x_a$ 处的位移.从方程(1)~(4)可知,弦线动力学方程(1)(2)和张紧器的动力学方程(3)通过边界条件(4)相耦合,形成一个耦合振动系统.

2 未控弦线横向振动的有界性(Boundedness of the transverse vibration of the uncontrolled string)

在设计控制规律时,首先研究未控弦线的横向振动是否有界.为便于分析,选用一变换参数

$$u(x, t) = w(x, t) - \frac{x-l}{x_a-l} w(x_a, t). \quad (6)$$

由式(6)可知, $u(x_a, t) = u(l, t) = 0$, $u_t(x_a, t) = u_t(l, t) = 0$.将式(6)代入式(2),得到

$$\rho u_{tt}(x, t) + 2\rho c u_{xt}(x, t) - P_0 u_{xx}(x, t) + c_v(u_t + c u_x) = F(x, t). \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} F(x, t) = & f(x, t) - \frac{\rho(x-l)}{x_a-l} \ddot{w}(x_a, t) - \\ & \frac{2\rho c \dot{w}(x_a, t)}{x_a-l} - c c_v \frac{w(x_a, t)}{x_a-l} - \\ & c_v \frac{x-l}{x_a-l} \dot{w}(x_a, t). \end{aligned} \quad (8)$$

在随后的未控弦线横向振动位移有界性分析,以及受控弦线的稳定性分析中,需使用下面的不等式:

$$u^2(x, t) \leq x_a \int_0^{x_a} u_x^2(x, t) dx, \quad (9a)$$

$$u^2(x, t) \leq (l - x_a) \int_{x_a}^l u_x^2(x, t) dx, \quad (9b)$$

$$\int_{x_a}^l u^2(x, t) dx \leq \frac{4(l-x_a)^2}{\pi^2} \int_{x_a}^l u_x^2(x, t) dx, \quad (9c)$$

$$ab \leq \gamma^2 a^2 + \frac{1}{\gamma^2} b^2, \quad a, b, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma \neq 0. \quad (9d)$$

在未控弦线横向振动有界性分析中, 选取如下的Lyapunov函数

$$E^+(t) = E_1^+(t) + E_2^+(t). \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} E_1^+(t) &= \frac{1}{2}\rho \int_{x_a}^l u_t^2 dx + \frac{1}{2}P_0 \int_{x_a}^l u_x^2 dx, \\ E_2^+(t) &= \beta_1 \rho \int_{x_a}^l uu_t dx. \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\beta_1 > 0$ 为正的常数, 并且为小量. 在式(11)中取此常数以确保 $E(t) > 0$. 将不等式(9c)(9d)代入式(11)中, 并取 $\gamma = 1$, 得到

$$|E_2^+(t)| \leq 2\beta_1 \rho \frac{\max(1, 4(l-x_a)^2/\pi^2)}{\min(\rho, P_0)} E_1^+(t). \quad (12)$$

若取

$$\beta_1 < \frac{\min(\rho, P_0)}{2\rho \max(1, 4(l-x_a)^2/\pi^2)},$$

则

$$0 \leq \lambda_1 E_1^+(t) \leq E^+(t) \leq \lambda_2 E_1^+(t). \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - 2\beta_1 \rho \frac{\max(1, 4(l-x_a)^2/\pi^2)}{\min(\rho, P_0)} > 0, \\ \lambda_2 &= 1 + 2\beta_1 \rho \frac{\max(1, 4(l-x_a)^2/\pi^2)}{\min(\rho, P_0)} > 1. \end{aligned} \quad (14)$$

将式(10)对时间 t 求导:

$$\dot{E}^+(t) = \dot{E}_1^+(t) + \dot{E}_2^+(t). \quad (15)$$

利用式(7)(9a)~(11), 并运用分部积分得到

$$\begin{aligned} \dot{E}_1^+(t) &\leq \\ &-(c_v - \gamma_1^2 - \frac{cc_v}{\lambda_2^2}) \int_{x_a}^l u_t^2 dx + \\ &cc_v \gamma_2^2 \int_{x_a}^l u_x^2 dx + \frac{1}{\gamma_1^2} \int_{x_a}^l F^2 dx, \\ \dot{E}_2^+(t) &\leq \\ &\beta_1 (\rho + \frac{2\rho c}{\gamma_2^2} + \frac{c_v}{\gamma_4^2}) \int_{x_a}^l u_t^2 dx - \beta_1 (P_0 - \\ &\frac{4(l-x_a)^2}{\pi^2} \gamma_3^2 - 2\rho c \gamma_2^2 - \frac{4c_v \gamma_4^2 (l-x_a)^2}{\pi^2} - \\ &\frac{4cc_v (l-x_a)^2}{\gamma_5^2 \pi^2} - cc_v \gamma_5^2) \int_{x_a}^l u_x^2 dx + \frac{\beta_1}{\gamma_3^2} \int_{x_a}^l F^2 dx. \end{aligned} \quad (16)$$

将式(16)(17)代入式(15), 得到

$$\begin{aligned} \dot{E}^+(t) &\leq \\ &-A \int_{x_a}^l u_t^2 dx - B \int_{x_a}^l u_x^2 dx + (\frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{\beta_1}{\gamma_3^2}) \int_{x_a}^l F^2 dx \leq \\ &-\lambda_3 E_1^+(t) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_3 &= \min(\frac{A}{\rho}, \frac{B}{P_0}) > 0, \\ A &= c_v - \gamma_1^2 - \frac{cc_v}{\lambda_2^2} - \beta_1 (\rho + \frac{2\rho c}{\gamma_2^2} + \frac{c_v}{\gamma_4^2}), \\ \varepsilon &= (\frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{\beta_1}{\gamma_3^2}) \int_{x_a}^l F^2 dx, \\ B &= \beta_1 (P_0 - \frac{4(l-x_a)^2}{\pi^2} \gamma_3^2 - 2\rho c \gamma_2^2 - \\ &\frac{4c_v \gamma_4^2 (l-x_a)^2}{\pi^2} - \frac{4cc_v (l-x_a)^2}{\gamma_5^2 \pi^2} - \\ &cc_v \gamma_5^2 - \frac{cc_v \gamma_2^2}{\beta_1}). \end{aligned} \right. \quad (19)$$

如果 $f(x, t) \in L^\infty$, $\frac{\partial^n w(x_a, t)}{\partial t^n} \in L^\infty$, 其中 $n =$

0,1,2, 那么, 对于 $x \in [x_a, l]$, 则 $w(x, t) \in L^\infty$.

证 根据此假设, 则 $F(x, t) \in L_{[x_a, l]}^\infty$.

若选取恰当的 $\beta_1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$, 使 $A > 0$, $B > 0$ 并且满足

$$\varepsilon = (\frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{\beta_1}{\gamma_3^2}) \sup \int_{x_a}^l F^2 dx < \infty,$$

则由式(13)(18)可得

$$E^+(t) \leq E^+(0)e^{-\lambda t} + \frac{\varepsilon}{\lambda} \in L^\infty. \quad (20)$$

其中 $\lambda = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$, 由式(9b)(13)得到

$$\frac{\lambda_1 P_0 u^2}{l-x_a} \leq E^+(0)e^{-\lambda t} + \frac{\varepsilon}{\lambda} \in L^\infty. \quad (21)$$

由式(21)可知 $u \in L^\infty$. 根据式(6)得到 $w \in L^\infty$. 因此, 若满足上面的假设, 则未控弦线的横向振动位移是有界的.

3 控制规律设计(Design for the control law)

在本节中, 将利用Lyapunov方法设计受控弦线的控制规律. 在设计控制规律作用下, 使受控弦线的横向振动位移收敛到零. 在此方法中, 恰当的Lyapunov函数的选取和有效的控制规律的设计是非常重要的. 因为受控弦线的横向振动依赖于其边界即作动器的动力学行为, 设计的控制规律和受控弦线相耦合, 所以在约束点 x_a 处的横向振动位移也应收敛到零.

为了方便控制规律的设计, 选用如下的辅助变量

$$\zeta = w_t(x_a, t) + w_x(x_a^-, t). \quad (22)$$

由式(4), 作动器的动力学方程(3)化为

$$\begin{aligned} I\ddot{w}(x_a, t) &= \\ &P_0 b^2 \sin \varphi (w_x(x_a^+, t) \cos \theta_2 - w_x(x_a^-, t) \cos \theta_1) - \\ &kb \sin \varphi \theta(t) - b \sin \varphi m_e(t). \end{aligned} \quad (23)$$

将式(22)代入式(23)得到

$$I\dot{\zeta}(x_a, t) = P_0 b^2 \sin \varphi(w_x(x_a^+, t) \cos \theta_2 - w_x(x_a^-, t) \cos \theta_1) - kw(x_a, t) - b \sin \varphi m_e(t) + Iw_{xt}(x_a^-, t). \quad (24)$$

取

$$m_e(t) = \{P_0 b^2 \sin \varphi(w_x(x_a^+, t) \cos \theta_2 - w_x(x_a^-, t) \cos \theta_1) - kw(x_a, t) + Iw_{xt}(x_a^-, t) + k_c \zeta\} / b \sin \varphi, \quad (25)$$

由式(24)(25)得到

$$I\dot{\zeta}_t = -k_c \zeta. \quad (26)$$

如果控制力 $m_e(t)$ 如式(25)所取, $w(x, t) \in L_{[0, x_a]}^\infty$, $\int_0^{x_a} w_t^2 \in L^\infty$, $m_e(t) \in L^\infty$, 其中 $n = 0, 1, 2$, 那么, 对于 $x \in [x_a, l]$, 受控弦线的横向振动 $w(x, t)$ 是指数稳定的.

证 选取如下的Lyapunov函数

$$E^-(t) = E_1^-(t) + E_2^-(t) + \frac{1}{2}I\zeta^2. \quad (27)$$

其中

$$E_1^-(t) = \alpha \left(\frac{1}{2} \rho \int_0^{x_a} w_t^2 dx + \frac{1}{2} P_0 \int_0^{x_a} w_x^2 dx \right), \\ E_2^-(t) = 2\beta \rho \int_0^{x_a} x w_x (w_t + c w_x) dx. \quad (28)$$

将不等式(9d)代入式(28), 并取 $\gamma = 1$, 得到

$$|E_2^-(t)| \leq \frac{4\beta \rho x_a (1+c)}{\alpha \min(\rho, P_0)} E_1^-(t). \quad (29)$$

通过选取恰当的正数 α 和 β , 并由式(27)(29)得

$$0 \leq \lambda_{1c}(E_1^-(t) + \zeta^2) \leq E^-(t) \leq \lambda_{2c}(E_1^-(t) + \zeta^2). \quad (30)$$

其中

$$\lambda_{1c} = \min\left(1 - \frac{4\beta \rho x_a (1+c)}{\alpha \min(\rho, P_0)}, \frac{I}{2}\right) > 0, \\ \lambda_{2c} = 1 + 2\beta_1 \rho \frac{\max(1, 4(l-x_a)^2/\pi^2)}{\min(\rho, P_0)} > 1. \quad (31)$$

将式(27)对时间 t 求导

$$\dot{E}^-(t) = \dot{E}_1^-(t) + \dot{E}_2^-(t) - k_c \zeta^2. \quad (32)$$

利用式(1)(9a)(28), 并运用分部积分得到

$$\frac{1}{\alpha} \dot{E}_1^- \leq -\rho c w_t^2(x_a, t) - \frac{P_0}{2} (w_t^2(x_a, t) + w_x^2(x_a^-, t)) + \frac{P_0}{2} \zeta^2 + \frac{cc_v}{\gamma_6^2} \int_0^{x_a} w_t^2 dx + cc_v \gamma_6^2 \int_0^{x_a} w_x^2 dx, \quad (33)$$

$$\frac{1}{\beta} \dot{E}_2^- (t) \leq \rho x_a w_t^2(x_a, t) - \rho \int_0^{x_a} w_t^2 dx + P_0 x_a w_x^2(x_a^-, t) - P_0 \int_0^{x_a} w_x^2 dx + \frac{2c_v x_a}{\gamma_6^2} \int_0^{x_a} w_t^2 dx + 2\gamma_6^2 c_v x_a \int_0^{x_a} w_x^2 dx. \quad (34)$$

将式(33)(34)代入式(32), 得

$$\dot{E}^-(t) \leq -\left(\frac{\alpha P_0}{2} + \alpha \rho c - \beta \rho x_a\right) w_t^2(x_a, t) - \left(\frac{\alpha P_0}{2} - \beta P_0 x_a\right) w_x^2(x_a^-, t) - \left(k_c - \frac{\alpha P_0}{2}\right) \zeta^2 - \left(\beta \rho - \frac{\beta 2c_v x_a}{\gamma_6^2} - \frac{\alpha cc_v}{\gamma_6^2}\right) \int_0^{x_a} w_t^2 dx - \left(\beta P_0 - 2\beta \gamma_6^2 c_v x_a - \alpha cc_v \gamma_6^2\right) \int_0^{x_a} w_x^2 dx. \quad (35)$$

若选取恰当的 α, β 和 γ_6 , 使得

$$\begin{cases} \alpha > 2\beta \rho x_a, & k_c > \frac{\alpha P_0}{2}, \\ C = \min\left(\frac{2}{\alpha \rho} \left(\beta \rho - \frac{\beta 2c_v x_a}{\gamma_6^2} - \frac{\alpha cc_v}{\gamma_6^2}\right), \right. \\ \left. \frac{2(\beta P_0 - 2\beta \gamma_6^2 c_v x_a - \alpha cc_v \gamma_6^2)}{\alpha P_0} \right) > 0, \end{cases} \quad (36)$$

则式(35)可化为

$$\dot{E}^-(t) \leq -\left(k_c - \frac{\alpha P_0}{2}\right) \zeta^2 - C E_1^-(t) \leq -\lambda_{3c}(E_1^-(t) + \zeta^2). \quad (37)$$

其中 $\lambda_{3c} = \min(k_c - \frac{\alpha P_0}{2}, C) > 0$, 利用式(30)(32)(37)得到

$$\dot{E}^-(t) \leq -\lambda_c E^-(t). \quad (38)$$

其中 $\lambda_c = \frac{\lambda_{3c}}{\lambda_{2c}}$. 由式(38)可得

$$E^-(t) \leq E^-(0) e^{-\lambda_c t}. \quad (39)$$

由式(9a)(37)可得

$$\frac{\alpha P_0 \lambda_{1c}}{2x_a} w^2 \leq \frac{\alpha \lambda_{1c}}{2} P_0 \int_0^{x_a} w_x^2 dx \leq \lambda_{1c} E_1^- \leq E^-(t) \leq E^-(0) e^{-\lambda_c t}. \quad (40)$$

由式(40)可知, 若 $0 \leq x \leq x_a$, 通过选取恰当的正数 α, β 和 γ_6 , 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $w(x, t) \rightarrow 0$, 即受控弦线的横向振动是指数稳定的.

控制规律(25)仅仅需要测量弦线与作动器接触点处两侧的斜率, 控制侧斜率对时间的导数及接触点处的速度. 因此控制规律可以很方便地通过增量式编码器和位置传感器等标准的传感器得到物理实现.

4 数值仿真(Numerical simulation)

本文通过数值仿真计算, 验证经Lyapunov方法得到的控制规律的有效性. 系统参数^[11] 为 $I = 0.001165 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $P = 60 \text{ N}$, $k = 54.37 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$, $l = 0.6 \text{ m}$, $b = 0.097 \text{ m}$, $\rho = 0.1029 \text{ kg}/\text{m}$, $x_a = 0.3 \text{ m}$, $c = 23 \text{ m}/\text{s}$, $c_v = 0.001 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}$. 初始扰动为 $w(x, 0) = \sin(4\pi x/l)$, 其中 $0 \leq x_a \leq l$, 作用在未控弦线上的外部激励力为 $f(x, t) = 100\delta(x - 0.45) \sin(\omega t)$, 其中 $\omega = 47.1$. 数值计算采用Crank-Nicolson^[12]的半显式数值离散方法, 此方法为稳定的差分格式. 本文计算控制弦线在 $x = 0.15$ 处的横向振动位移. 图2为在初始扰动和激励力作用下的系统响应. 从图2可以看出, 在控制力的作用下, 受控系统的横向振动得到了有效的控制, 振动位移迅速衰减并趋于零值. 所以当 $0 \leq x \leq x_a$ 时, 本文所得到的控制规律有效地控制了弦线的横向振动.

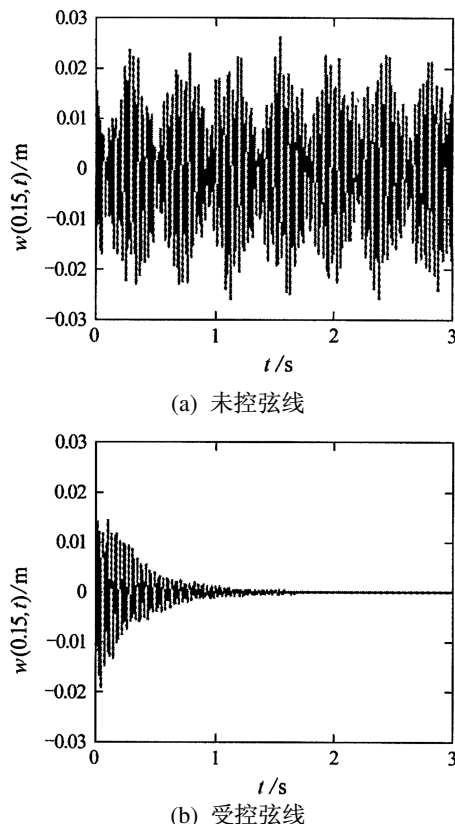


图2 激励力和初始扰动下的系统响应

Fig. 2 Response under excitation and initial disturbance

5 结论(Conclusion)

通过作用在张紧器上的控制力, 对轴向运动弦线和张紧器组成的耦合振动系统的部分弦线进行主动

控制. 采用Lyapunov方法设计控制规律. 数值仿真结果表明, 若系统弦线的未控部分的扰动有界, 所得到的控制器有效地控制了受控弦线的横向振动, 并具有指数稳定性.

参考文献(References):

- [1] YANG K J, HONG K S, YOO W S, et al. Model reference adaptive control of a cantilevered flexible beam[J]. *Int J of Japan Society of Mechanical Engineers*, 2003, 46(2): 640 – 651.
- [2] MATSUNO F, OHNO T, ORLOV Y. Proportional derivative and strain (PDS) boundary feedback control of a flexible space structure with a closed-loop chain mechanism[J]. *Automatica*, 2002, 38(7): 1201 – 1211.
- [3] 陈立群, 祖武争. 轴向运动弦线的纵向振动及其控制[J]. *力学进展*, 2001, 31(4): 535 – 546.
(CHEN Liqun, ZU Wuzheng. Transverse vibration and control of the axially moving strings[J]. *Advances in Mechanics*, 2001, 31(4): 535 – 546.)
- [4] JAI A E, PRITCHARD A J. Sensors and actuators in distributed systems[J]. *Int J Control*, 1987, 46(4): 1139 – 1153.
- [5] LEE S Y, MOTE C D. Vibration control of an axially moving string by boundary control[J]. *Trans on American Society of Mechanical Engineerings*, 1996, 118(3): 66 – 74.
- [6] FUNG F R, WU J W, WU S L. Stabilization of an axially moving string by nonlinear boundary feedback[J]. *ASME J of Dynamic Systems, Measure and Control*, 1999, 121(1): 117 – 121.
- [7] BUTLOVSKIY A G. *Structural Theory of Distributed Systems*[M]. New York: Wiley, 1983.
- [8] CHUNG C H, TAN C A. Active vibration control of the axially moving string by wave cancellation[J]. *ASME J of Vibration and Acoustics*, 1995, 117(1): 49 – 55.
- [9] QUEIROZ M S, DAWSON D M, RAHN C D, et al. Adaptive vibration control of an axially moving string[J]. *ASME J of Vibration and Acoustics*, 1999, 121(1): 41 – 49.
- [10] FUNG F R, WU J W, LU P Y. Adaptive boundary control of an axially moving string system[J]. *ASME J of Vibration and Acoustics*, 2002, 124(1): 435 – 440.
- [11] ZHANG L, ZU J W. Modal analysis of serpentine belt drive systems[J]. *J of Sound and Vibration*, 1999, 222(1): 259 – 279.
- [12] CRANK J, NICOLSON P. A practical method for a hyperbolic difference equation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1947, 43(3): 50 – 57.

作者简介:

张伟 (1971—), 男, 上海市应用数学和力学研究所博士生, 研究方向为机械振动和控制, E-mail: wzhangfz@163.com;

陈立群 (1963—), 男, 上海大学力学系教授, 博士生导师, 研究方向为非线性动力学和控制.